Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

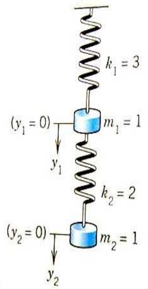
Laskuharjoitus 8 AV/9 LV (viikko 46 , 14 – 18.11.2005)

Alkuviikko

1. Muunna seuraavat differentiaaliyhtälöt/ryhmät 1. kertaluvun ryhmiksi. (Tarkoitus **ei ole** yrittää ratkaista.)
   (a) $y''' + e^t y' + y = 0$, (b) $y'' + k \sin y = 0$ (heiluriyhtälö),
   (c) $\begin{cases} y_1'' - y_1' - 2y_1 = t^2 \\ y_2'' - y_2 - 3y_1 = 0 \end{cases}$
   Huomaa, että (a) ja (c) ovat lineaarisia, sensijaan (b) on epälineaarinen, joten sille on turha etsiä matriisia.

2. Massapiste liikkuu tasossa olevan voimakentän alaisuudessa siten, että sen paikkavektori $\boldsymbol{y}(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Matriisin A ominaisarvot ja - vektorit ovat vastaavasti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{v}_1 = [-2, 1]^T$ ja $\boldsymbol{v}_2 = [1, 1]^T$. Määritä massapisteen paikka ajanhetkellä t, kun $\boldsymbol{y}(0) = [-0.1, 0.1]$. Piirrä ajanhetkiä $t = 0, 1, 1.5, 2$ vastaavat ratkaisupisteet $\boldsymbol{y}(t)$ tasoon ja hahmottele niiden kautta kulkeva trajektori.

3. (a) Kirjoita oheisen kuvan (vaimentamatonta) massa-jousisysteemiä mallintava differentiaaliyhtälösysteemi sekä toisen kertaluvun 2×2- systeeminä että 1. kertaluvun 4×4- systeeminä.



   (b) Ratkaise edellinen sijoittamalla yrite $\boldsymbol{y} = e^{\omega t}\boldsymbol{x}$ ja asettamalla $\omega^2 = \lambda$.

4. Määritä yleinen ratkaisu yhtälölle $y'' + 2\,y' + 5\,y = 0$ kirjoittamalla se ensimmäsisen kertaluvun $2 \times 2-$systeemiksi ja ratkaisemalla matriisitekniikkaa (ominaisarvoja) käyttäen. Vertaa tehtävään 2 LV4:ssä, jonka osana ratkaistiin sama "klassisella"tekniikalla.

5. Määritä yleinen ratkaisu systeemille $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 8/3 & 5/3 \end{bmatrix}$.
   Piirrä kuvaan ominaisvektorit ja niille "virtauksen"suuntanuolet. Piirrä lisäksi pisteisiin $(1, 0)$ ja $(1, 1)$ liittyvät suuntakentän suuntanuolet sekä ominaisvektorikannan pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevan trajektorin hahmotelma. (Ominaisvektorikannassa alkupisteen koordinaatit ovat (c_1, c_2) tavallisen notaation mukaisesti.)
   Mikä faasitasotyyppi on kyseessä?

6. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = [0.1, 0]$ missä $A = \begin{bmatrix} -1/2 & -2 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$
   Annetaanpa ominaisarvot: $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$ (johan niitä on jauhettu). Piirrä trajektorin hahmotelma ja selvitä KRP-origon luonne ja stabiilisuus.

Matlab-ohjelma `pplane5` **.** Sivulla `../k3/03/L/pplane5.m` on helppokäyttöinen ja havainnollinen-ohjelma faasitasopiirroksiin. Tarvitsee vain kopioida tiedosto Matlabpolun varrelle ja antaa Matlabissa komento
`>> pplane5`, joka avaa graafisen käyttöliittymän. Mitään muuta MATLAB-osaamista ei tarvita.
Ohjelma liittyy kirjaan *Golubitsky–Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations*, koodin on kirjoittanut *John Pohlking*.
Googlella löydät varmaan jo uudemmatkin: `pplane6, pplane7`, muistaakseni *Rice University*.

Lisäksi MAPLE-**työarkkeja**, joita voi käyttää hyvänä pohjana erityyppisiin tilanteisiin, on L-sivulla, niissä on myös faasitasopiirrokset mukana, tosin ei samalla tavalla interaktiivisesti kuin `pplanella`.

Loppuviikko

1. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään

nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhe tkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Kirjoita tehtävä differentiaaliyhtälöpariksi ja määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona.

```
          ----------          ----------
3 l/min  -->       |          |         |
    --             |__________|         |
     |              4 l/min ->          |
     |             -----------          |
     |     A       |          |    B    |
     |             |----------|         |
     |              <-- 1 l/min         |
     |             |----------|        ----
     |___________  |          |____________-> 3 l/min
```

Miten pitkän ajan kuluttua suolamäärät säiliöissä ovat yhtäsuuret? Piirrä suolamääräfunktioiden $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ kuvaajat ajan funktiona ja hahmottele myös trajektori $(y_1(t), y_2(t))$.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y'} = A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y(0)} = [1, 0]^T$, kun

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Hahmottele ratkaisufunktiot $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ "aikatasoon" ja käyrä $(y_1(t), y_2(t))$ (t on käyräparametri) faasitasoon ($y_1 y_2-$tasoon).

Piirrä faasitasoon myös ominaissuorat ja hahmottele ylimalkaisesti jokunen muukin trajektori suuntanuolineen, ja selvitä O:n luonne ja stabiilisuus.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y'} = A\,\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = [2, 3]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}.$$

Vast: $\boldsymbol{y}(t) = e^{-2\,t} \begin{bmatrix} 2 + 3\,t \\ 3 + 9\,t \end{bmatrix}$

Vihje: Degeneraatiotapaus, Vrt. KRE s. 168, exa 6

4. Määritä vapaan vaimennetun värähtelyn:

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

kriittisen pisteen (0,0) luonne tapauksissa

a) ei vaimennusta, $c = 0$, b) alivaimennus, $c^2 < 4mk$,
c) kriittinen vaimennus, $c^2 = 4mk$, d) ylivaimennus, $c^2 > 4mk$.

Ohje: Kirjoita yhtälö ensin 1. kl. systeemiksi. Esitä perustelut ominaisarvojen tyyppien nojalla. Niiden selvittämisessä voit (mutta ei ole pakko) laskemisen sijasta käyttää toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia. Merkinnät $tr(A)$ ja $det(A)$ ovat silloin suositeltavia `KRE`-kirjan p :n ja q :n sijasta . (Jos joku kirjoittaa kokeessa jonkun $pq-$epäyhtälön selittämättä, mitä niillä tarkoitetaan, niin siitä ei hyvää seuraa.)

Lineaaristen $2 \times 2-$systeemien faasitasoluokitus

Ominaisarvot λ_1, λ_2. Tyyppikuvaus ja stabiilisuus viittaavat kriittiseen pisteeseen, joka lineaarisella homogeenisella on $\mathbf{0}$. (Jos A on singulaarinen, niin kaikki $N(A)$:n pisteet ovat kriittisiä pisteitä, mutta alla olevassa luokittelussa tämä suljetaan pois (ts. ominaisarvo 0 on suljettu pois).

- samanmerkkiset $\Longrightarrow$ *noodi*, jos < 0, niin *nielunoodi*, (vahvasti) stabiili, jos > 0, niin *lähdenoodi*, epästabiili,
- erimerkkiset $\Longrightarrow$ *satula*, epästabiili
- Vain yksi ominaisvektori $\Longrightarrow$ *degeneroitunut noodi*, jos ominaisarvo $\lambda < 0$, nielu (stabiili) ja jos $\lambda > 0$, niin lähde, epästabiili.
- Puhtaasti imaginaariset ominaisarvot ($\pm bi$), *keskus*, heikosti stabiili.
- Kompleksiset ominaisarvot $\lambda = \alpha \pm i\beta$, *lähdespiraali*, jos $\alpha > 0$, epästabiili, ja *nieluspiraali*, jos $\alpha < 0$, stabiili