Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 7 AV/ 8 LV (viikko 45 , 7 – 11.11.2005)

Ominaisarvoteoriaa: `[KRE]` Ch 7, alk. s. 370, Lay: Ch 5, alk. s. 327,
`[KRE]` 8.2 ss. 408–413, hyvä kerrata "pistetulo", "dot product"
`[KRE]` 6.8 Yleinen sisätulo ("inner product") esitelty hyvin lyhyesti.
Ominaisarvopruju:
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/ominaisarvot.pdf`
`[KRE]`-kirjasta puuttuu: Diskreettien dynaamisten systeemien käsitteet ja *Gram–Schmidt-ortogonalisointi*.
Toisen välikokeen aihepiiri harjoitusten osalta päättyy tähän tehtäväsarjaan.

Alkuviikko

1. Matriisin A jälki ("trace") on diagonaalialkioiden summa: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$. Osoita, että $2\times 2-$matriisin ominaisarvot ovat reaaliset, jos ja vain jos $tr(A)^2 \geq 4\det(A)$.

2. (a) Muodosta kompleksinen diagonalisointi matriisille $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) Muodosta reaalinen esitys $A = PCP^{-1}$, missä C on kiertomatriisi (mahdollisesti yhdistettynä venytykseen/kutistukseen).

   Ohjeita:
   (a) Kompleksinen diagonalisointi muodostetaan aivan samoin kuin reaalinen, toki hieman työläämpää. Jotta ei tule liian työlääksi, annetaan käänteismatriisin kaava (Cramerin sääntö $2\times 2-$matriisille):

   Jos $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, niin $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (jos $\det M \neq 0$)

   (b) Jos $\lambda = \alpha + i\,\beta$ ja vastaava ominaisvektori on $\boldsymbol{v}$, niin $P = [Re\,\boldsymbol{v} \;\; | \;\; Im\,\boldsymbol{v}]$ ja $C = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

3. Osoita, että vektorit $\boldsymbol{v}_1 = [3,1,1]\,, \boldsymbol{v}_2 = [-1,2,1]\,, v_3 = [-1/2,-2,7/2]$ muodostavat ortogonaalisen kannan $\mathbb{R}^3$:ssa. [1]

   Määritä vektorin $\boldsymbol{v} = [6,1,8]$ esitys tässä kannassa. Huom! Tehtävän voisi toki laskea Gaussilla, mutta tässä on tarkoitus käyttää ortogonaalisuutta ja sen ansiosta päästä vähemmällä laskutyöllä.
   Tämä on ainoa kerta kurssin aikana tähän mennessä, jolloin Gauss ei kelpaa!

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$. Merkitään $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

   Osoita, että A :n ominaisarvot ovat A_1 :n ominaisarvot ja g. Mitkä ovat ominaisvektorit, jos A_1 :n ominaisvektorit ovat $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$?

5. (a) Osoita, että matriisin $A = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ (voit halutessasi olettaa positiivisiksi)

   sarakkeet ovat keskenään ortogonaaliset. Millä kertoimilla pitää sarakkeet normeerata, jotta ne olisivat ortonormaalit, jolloin olisimme oikeutettuja kutsumaan matriisia *ortogonaaliseksi.*

   (b) Olkoon $a = 0.8, \quad b = 0.6, \quad c = 1.07$. Määritä A :n ominaisarvot ja -vektorit.

6. Matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ eräs ominaisarvo on 5 ja eräs ominaisvektori $[-1,1,0]^T$. Muodosta ortogonaalinen diagonalisointi A :lle.

   Vihje: Jos ominaisvektori on annettu, on ominaisarvo helppo määrätä suoraan määritelmän mukaan. Kun tunnet kaksi ominaisarvoa, saat kolmannen helposti vaikkapa miettimällä, miten ominaisarvojen tulo esiintyy karakteristisessa polynomissa.

[1] Jätämme välillä tarkoituksella transpoosimerkin vektoreista pois. Oikeasti on olennaista vain se, mikä on vektorin $1., 2., \ldots$ komponentti, ei se, missä "asennossa" vektori seisoo tai makaa.

Ohjeita

Ortogonaalinen diagonalisointi: $A = V\,D\,V^{-1}$. Jos matriisi on symmetrinen, voidaan V korvata ortogonaalisella matriisilla U, jolloin siis $U^{-1} = U^T$. Useampikertaisen ominaisvektorin tapauksessa ominaisvektorit eivät automaattisesti ole ortogonaaliset. Tällöin on ominaisavaruudelle muodostettava ortonormaali kanta. Piirrä tavallisen vektorigeometrian mukainen mallikuva, jossa vektorista $\boldsymbol{v}$ vähennät sen kohtisuoran projektion toisella (LRT) vektorilla. (Tämä on yleisen *Gram–Schmidt*-prosessin 1. askel.) Muista, että kaikki ominaisvektorit pitää normeerata yksikkövektoreiksi.

Loppuviikko

1. Olkoon A $2\times 2-$matriisi, jonka ominaisarvot ovat 3 ja 1/3 ja vastaavat ominaisvektorit $\boldsymbol{v}_1 = [1,1]^T$ ja $\boldsymbol{v}_2 = [-1,1]^T$.
   Olkoon $(\boldsymbol{x}_k)$ differenssiyhtälön $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\,\boldsymbol{x}_k, \quad \boldsymbol{x}_0 = [9,1]^T$ ratkaisujono.
   (a) Laske $\boldsymbol{x}_1 = A\,\boldsymbol{x}_0$ ja $\boldsymbol{x}_2 = A\,\boldsymbol{x}_1$ ja piirrä pisteet $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ tasoon. (Huomaa: tätä varten ei todellakaan tarvitse tuntea matriisia A.)
   (b) Määritä ratkaisukaava $\boldsymbol{x}_k$:lle lausuttuna k :n ja ominaisvektorien $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ avulla.
   (c) Piirrä joitakin lisäpisteitä tasoon, käytä hyväksesi ominaisvektorikoordinaatistoa.
2. Selvitä kuitenkin, mikä tuo edellisen tehtävän matriisi A on.
3. Jatketaan AV- tehtävää 5(b).
   (a) Selvitä, minkälaista reittiä kulkee x_1x_2-tason lähtöpiste iteraatiossa $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\,\boldsymbol{x}_n$. Laske kiertomatriisin kiertokulma ja selvitä sanallisesti, miten piste $\boldsymbol{x}_n$ liikkuu avaruudessa, kun n kasvaa.
   (b) Sama kuin edellä, mutta lähdetään pisteestä, joka ei ole x_1x_2-tasossa.
   (c) Lähde iteroimaan pisteistä $\boldsymbol{x}_0 = [2,0,0]$ ja $\boldsymbol{x}_0 = [2,0,1]$ ja piirrä kuvat, joissa on muutama iteraatiopiste (yhdistettynä viivoilla (kaarilla)).
4. Olkoon (a) $A = \begin{bmatrix} 1.7 & -0.3 \\ -1.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ ja (b)$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.3 & 1.1 \end{bmatrix}$.
   Selvitä kummassakin tapauksessa, mitä tyyppiä O on dynaamisen systeemin $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\,\boldsymbol{x}_n$ suhteen, kun tyyppejä ovat "repellori", "attraktori" ja "satula". Piirrä ominaisvektorit ja systeemin etenemistä kuvaavat suuntanuolet niille. Piirrä lisäksi joitakin trajektoreita (suuntanuolineen), jotka eivät lähde ominaisvektoreilta. Käytä piirroksissa mieluusti ominaisvektorikantaa.
5. Mitä ominaisuuksista: "Hermiittinen, vinohermiittinen, unitaarinen, ym." seuraavilla matriiseilla A, B ja C on?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\; B = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 1+i \\ 0 & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

(Huomaa, että vastaus voi myös olla: "ei mitään".)
Määritä kunkin spektri (ominaisarvot) ja vertaa mainittua tyyppiä olevien matriisen peruslauseisiin. Negatiivisessa tapauksessa etsi mahdollisimman monta "ei-ominaisuutta". (Vaikkapa KRE Thm. 1 s. 386.)

Vastauksia: Ominaisarvot ja -vektorit
(b) $\lambda = 1/2\,\sqrt{3} + 1/2\,i, \quad -1/2\,\sqrt{3} + 1/2\,i$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\lambda = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\; V = \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2\,i & 1/2 + 1/2\,i & -i \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 + 1/2\,i & 1/2 - 1/2\,i & 1 \end{bmatrix}$$

Diskreettien dynaamisten systeemien käsitteitä

Lineaarinen diskreetti dynaaminen systeemi on differenssiyhtälö $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\,\boldsymbol{x}_n$. Tässä erit. A on 2×2.
Trajektori: Pistejonon kuvat $\boldsymbol{x}_k$ tasossa, usein siihen ajatellaan kuuluvaksi myös pisteitä yhdistävä käyrä.
Kiintopiste: $\boldsymbol{x}$, jolle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. Origo on aina kiintopiste.
Origo on
attraktiivinen, jos kaikki trajektorit $\to 0$, kun $n \to \infty$. Näin käy, jos $|\lambda_k| < 1$
repulsiivinen, jos kaikki trajektorit $\to \infty$, kun $n \to \infty$. ($|\lambda_k| > 1$)
satula, jos osa trajektoreista $\to \infty$, ja osa $\to 0$, kun $n \to \infty$.
Kompleksiset ominaisarvot: Attraktiivinen tai repulsiivinen spiraali. Jos $|\lambda| = 1$, niin trajektori kiertää pitkin samaa ellipsiä (heikosti stabiili).