Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 6 LV (viikko 42 , 19 – 21.10.2005), **loppuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$ riviavaruuden row(A) ja sarakeavaruuden col(A) kanta sekä nolla-avaruuden $N(A)$ dimensio.

2. Määritä edellisen tehtävän nolla-avaruuden kanta.

3. Olkoon A kääntyvä neliömatriisi. Osoita, että
(a) A^2 on kääntyvä ja $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$,
(b) A^T on kääntyvä ja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. Olkoon A neliömatriisi, jonka kaikki päälävistäjän alapuoliset alkiot ovat nollia. (Sanotaan: A on yläkolmiomatriisi.) Osoita, että $\det(A)$ on päälävistäjän alkioiden tulo. Osoita sama asia myös alakolmiomatriisille.

5. Tason kierto kulman φ verran voidaan esittää kompleksitason kuvauksena $w = F(z) = e^{i\varphi}z$, kuten hyvin tiedämme. Kirjoita tämän (lineaari)kuvauksen matriisiesitys, ts. esitä $w = F(z)$ muodossa
$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{z}$, missä $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

6. Olkoon T tason lineaarikuvaus itselleen, joka on yhdistelmä kahdesta kuvauksesta. Ensin suoritetaan tyyppiä “horizontal shear” (“vaakasuora leikkaus”) oleva, joka kuvaa yksikkövektorin $\boldsymbol{e}_1$ itselleen ja $\boldsymbol{e}_2$:n vektorille $\boldsymbol{e}_2 - 0.5\,\boldsymbol{e}_1$. Jatkoksi pannaan heijastus pystyakselin (x_2-akselin) suhteen. Määritä kuvauksen matriisi.
Ohje: Katso, miten kantavektorit e_1 ja e_2 kuvautuvat yhdistetyssä kuvauksessa. Tai: Määritä kummankin kuvauksen matriisi ja kerro ne keskenään. Huvi & hyöty : Kokeile Matlab-piirtoa.

Ohjeita

Tehtävät 1 ja 2 menevät samoilla rivioperaatioilla. Muista, mikä ero on rivi- ja sarakeavaruuksien kannoilla. Syy tähän on se, että rivioperaatioissa muodostetaan rivivektorien lineaarikombinaatiota, siis pystytään riviavaruudessa. Sensijaan **rivioperaatioissa ei** yleensä muodostu **sarakevektorien lineaarikombinaatioita**, eihän!
Muista myös, että vektoriavaruuden kanta on kaikkea muuta kuin yksikäsitteinen, oikeita vastauksia on siis paljon.

Tehtävä 2 ratkaistaan normaaliin tapaan merkitsemällä mielellään vapaita muuttujia vaikka $s, t, \ldots$. Kirjoitetaan ratkaisu muotoon M kertaa vapaiden muuttujien vektori, jolloin M:n sarakkeet ovat N(A):n kanta. (Tai kirjoitetaan suoraan muodossa $s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}2 + \ldots$.) Miksi ovat (aina) LRT?

Tehtävä 3: Käänteismatriisille riittää toinen ehto $AX = I$ tai $XA = I$. Tämä johtuu esim. siitä, että $r(A) = r(A^T)$ (joka on yksi ”lineaarialgebran ihmeen”ilmenemismuoto).

Lineaarikuvaus määräytyy kantavektorien kuvista. Matriisi peruskantojen suhteen saadaan latomalla kantavektorien kuvat sarakkeiksi.

Tason lineaarikuvaukset ja tietokonegrafiikka

Monikulmio voidaan esittää 2-rivisenä matriisina, jonka sarakkeet edustavat koordinaattipisteitä. Esim. Kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0), (1,1), (1,-1)$ voitaisiin esittää matriisina $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Kärkipisteet yhdistetään janalla tässä järjetyksessä. Matlab:ssa voidaan nyt piirtää: `plot(T(1,:),T(2,:))`. Jos tähän sovelletaan lineaarikuvausta, eli kerrotaan matriisilla A, saadaan kuvan kärkipisteet $S = AT$. Matlabilla voitaisiin siten kirjoittaa `S=A*T; plot(S(1,:),S(2,:))`.
Lisää aiheesta L-hakemiston LA3.html:ssä. Kokeile myös:
`http://math.tkk.fi/teaching/v/matlab/laode/map.m`.