Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka
Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 6 AV/ 7 LV (viikko 44 , 31.10 – 4.11.2005)

Ominaisarvoteoriaa: [KRE] Ch 7, alk. s. 370, Lay: Ch 5, alk. s. 327
Ominaisarvopruju:
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/04/L/ominarvot.pdf` (Tämä on viimevuotinen, se kehittyy ja tulee prujujakoon.)

Alkuviikko (6)

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{R})$ ominaisarvot ja -vektorit,
   (a) selvittämällä A:n määräämän lineaarikuvauksen toiminta ja päättelemällä geometrisesti,
   (b) laskemalla.

2. Määritä seuraavien lineaarikuvausten ominaisarvot ja -vektorit laskematta (ellei muuta mainita), pelkän geometrisen kuvailun perusteella.
   (a) Heijastus y-akselin suhteen tasossa $\mathbb{R}^2$,
   (b) Kierto $\mathbb{R}^2$:ssa kulman $\pi/2$ verran. (Tämä on reaalisen intuition vastainen, kuten luennolla samaa vauhtia pyörivä sininen ja punainen nuoli osoittivat. Kun sallitaan kompleksiset skalaarit, tulee kierto mukaan skalaarilla kertomiseen. Arvaa ensin ja laske sitten.)
   (c) Heijastus yz-tason suhteen $\mathbb{R}^3$:ssa.
   (d) Kohtisuora projektio y-akselille $\mathbb{R}^2$:ssa.

   (Laskeminen LV-tehtäväksi)

3. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja kutakin ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden E_λ kanta. Jotta ei tarvitse ryhtyä arvailemaan, annetaan yksi arvo: $\lambda_1 = 1$.
   Mitkä ovat ominaisarvojen algebralliset kertaluvut M_λ ja geometriset m_λ?

4. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. Pane merkille, että tässä on esimerkki tapauksesta, jossa $m_\lambda < M_\lambda$.

5. Osoita, että yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat diagonaalialkiot. Aivan samoin saat alakolmiomatriisille, mutta se seuraa myös transponoimalla, vrt. seuraava tehtävä.
   Neuvo: Voidaan tehdä determinanttitarkastelulla ja vedota aiempaan dettehtävään. **Suositus:** Tee mieluummin ilman determinantteja kirjoittamalla ominaisarvotehtävä lineaariseksi yhtälösysteemiksi ja katselemalla tukialkioita. (No saathan toki tehdä determinanteillakin jos se tuntuu “turvallisemmalta”.)

6. Osoita, että A:lla ja A^T:lla on samat ominaisarvot. (Ominaisvektorien ei tarvitse olla samoja, esimerkiksi käy vaikka jokin Markovin matriisi.)
   Ohje: Muista, että $(A+B)^T = A^T + B^T$ ja että matriisilla ja sen transposilla on sama determinantti. Sitten vain kirjoitat A^T:n karakteristisen polynomin A:n karakteristisen polynomin avulla.

Loppuviikko (7)

1. Laske AV-tehtävän 2 ominaisarvot. Kun luet ohjeet, saat osan laskutyöstä ”ilmaiseksi”.

2. (a) Osoita, että jos λ on A:n ominaisarvo ja $\mathbf{x}$ vastaava ominaisvektori, niin λ^k on A^k:n ominaisarvo, ja samainen $\mathbf{x}$ on vastaava ominaisvektori.

   (b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Osoita, että λ^{-1} on A^{-1}:n ominaisarvo ja $\mathbf{x}$ siihen liittyvä ominaisvektori (yhtä hyvin Ax). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?

   Vihje: (a): Tarvitset vain määritelmää.
   Mieti (b)-kohdan loppukysymyksessä: Mitä merkitsee kääntyvyyteen nähden, jos ominaisarvo on 0 ? Ajattele vaikkapa homogeeniyhtälön ratkaisuja tms.

3. Matti ja Sauli päättävät mittauttaa kannatustaan keskenään (koska Tarjan kanssa on turha kilpailla). Tarkastellaan sellaista kansan osajoukkoa, joka ei missään olosuhteissa siirry kannattamaan Tarjaa. Oletetaan, että Matin ja Saulin kannatus kuukausittain kehittyy siirtymämatriisin $P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.22 \\ 0.2 & 0.78 \end{bmatrix}$ määräämällä tavalla. Ensimmäinen sarake tarkoittakoon ”Matilta siirtyy”ja toinen ”Saulilta siirtyy”, rivit vastaavasti ”Matille ja ”Saulille”.

   Olkoot kannatusmäärät lokakuun lopusssa prosenteissa 49 ja 51 Saulin hyväksi. Mitä tasapainojakaumaa lähestyvät kannatusosuudet, kun kuukausia kuluu? Vaikuttaako alkutilanne asiaan?

4. Stokastinen matriisi P tarkoittakoon sellaista, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia ja sarakesummat $= 1$. [1] Osoita, että 1 on aina P:n ominaisarvo. (Esimerkkinä edellisen tehtävän matriisi)
   Vihje: Väite on helppo osoittaa transposille P^T, ajattele ominaisvektorin määritelmää ja mitä saat, jos kerrot P^T:llä vektorin $[1, 1, \dots, 1]$.

5. Päättele matriisia $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ katsomalla, että se on diagonalisoituva, ja laske diagonalisointiesitystä hyödyntäen A^6.
   Ohje: Ominaisvektorimatriisi on myös kolmiomuotoinen, joten käänteismatriisi saadaan parilla hassulla ”alhaalta ylös”rivioperaatiolla. Matriisioperaatioihin (kuten kertolaskuihin) saat toki mieluusti käyttää ohjelmia tai muuta ”matriisilaskinta”.

6. (a) Olkoon A 5×5-matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Toinen ominaisavaruus on 2- ja toinen 3-ulotteinen. Onko A diagonalisoituva?

   (b) Olkoon A $3{\times}3$-matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Kumpaankin liittyvä ominaisavaruus on 1-ulotteinen. (Eli kummankin geometrinen kertaluku $= 1$. Onko A diagonalisoituva?

   (c) Olkoon A 4×4-matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrinen kertaluku $= 1$ ja yhden taas 2. Onko mahdollista, että A ei ole diagonalisoituva?

   (d) Olkoon A 7×7-matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrinen kertaluku $= 2$ ja toisen $= 3$. Onko mahdollista, että matriisi ei ole diagonalisoituva?

[1] KRE-kirjassa otetaan rivisummat $= 1$.

Ohjeita, ominaisarvo-oppia

- **Ominaisarvo** on luku, se voi olla kompleksiluku, vaikka matriisi olisi reaalinen.
- **Ominaisvektori** on (reaalisen matriisin tapauksessa) $\mathbb{R}^n$:n tai $\mathbb{C}^n$:n vektori sen mukaan, onko vastaava ominaisarvo reaalinen vai kompleksinen.
- Ominais**arvo saa** aivan mainiosti **olla** 0, ominais**vektoriksi emme hyväksy nollavektoria**.
- Ominaisarvoon λ liittyvä **ominaisavaruus** E_λ koostuu kaikista λ:aan liittyvistä ominaisvektoreista ja lisäksi nollavektorista. Tällöin kyseessä on vektori(ali)avaruus, nimittäin matriisin $A - \lambda I$ nolla-avaruus, $N(A - \lambda I)$.
- Ominaisarvon λ_j **algebrallinen kertaluku** M_{λ_j} on karakteristisen polynomin $\det(A - \lambda I)$ juuren kertaluku. **Geometrinen kertaluku** m_{λ_j} on $\dim(E_{\lambda_j})$.
  Pätee: $m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j}$
- Jos on määrättävä diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit, niin laskentatyötä ei jää lainkaan. Älä siis suotta ryhdy veivaamaan $\det(A - \lambda I)$:n kautta. (Koko ominaisarvohomman perustavoite on saattaa lineaarikuvauksen matriisi diagonaalimuotoon. Jos se jo on, niin mitään ei tarvitse enää tehdä, kunhan osaat siitä lukea.)
  Ominaisarvojen suhteen sama pätee myös ylä- tai alakolmiomatriisille, kuten tehtävässä AV 5 näytetään.
- Kun pyydetään laskemaan johonkin ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit, on sopivaa antaa vastaukseksi ominaisavaruuden kanta. Helpoimmin se saadaan antamalla ratkaisun vapaille muuttujille vuorollaan arvot $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (jos kyseessä on 3-ulotteinen ominaisavaruus). Tässähän on kyse nolla-avaruuden kannan määräämistehtävästä.
- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat `LRT`.
- Diagonalisointi: Annettu A. Etsittävä, jos mahdollista, matriisit V ja D, V kääntyvä ja D diagonaalimatriisi siten, että $A = VDV^{-1}$.
  Jos tehtävänä on diagonalisoida A, etsitään matriisit V ja D ja perustellaan V:n kääntyvyys. (Yleensä ei vaadita V^{-1}:n laskemista ilman eri kehoitusta, tai jatkotehtävän asettamaa tarvetta.)