Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 5 LV (viikko 41 , 12 – 14.10.2005), **loppuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

1. välikokeen alue kattaa luennot pe 7.10. saakka (mahd. lineaarialgebraan siirtymistä lukuunottamatta) ja laskarit alusta tämän harjoituksen tehtävään 3 saakka (3 mukaan lukien). Webbisivulle kohtaan "kokeet" tullee vielä jotain pientä tarkennusta asiaan.
Välikoetehtävät: 2 kompleksianalyysiä, 2 Laplace-muunnosta.

1. Muodosta $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\,s}}{s(s-2)}\right\}$, $(a>0)$.

   (a) osamurtokehitelmää, (b) konvoluutiolausetta hyödyntäen.

2. (a) Johda konvoluutiolusetta apuna käyttäen ratkaisukaava vaimentamattomalle värähtelytehtävälle $y'' + \omega_0^2 y = r(t), \quad y(0) = y_0, y'(0) = v_0$.

   Vast: $y(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \star r(t) + y_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$.

   (Tähti ($\star$) tarkoittaa konvoluutiota.)

   (b) Sovella edellä johtamaasi kaavaa tapaukseen $r(t) = A\sin\omega_0 t$. Tällöin herätteen taajuus yhtyy vapaan harmonisen värähtelijän taajuuteen, ja seurauksena on resonanssi. Ratkaise siis ja katso, miten resonanssi ilmenee ratkaisussa.

   Vast: $y(t) = \frac{A}{2\,\omega_0^2}(-\omega_0\, t\,\cos\omega_0\, t + \sin\omega_0\, t)$

   Vihje: Muista taas nuo trig. tulokaavat (vrt. AV4 teht. 5 b).

3. Ratkaise diffyhtälösysteemi $\begin{cases} y_1' = -y_2 + 1 - u(t-1) \\ y_2' = y_1 + 1 - u(t-1) \end{cases}$ alkuehdoilla $y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0$.

   Vast: $y_1 = -1 + \cos t + \sin t + u(t-1)(1 - \cos(t-1) - \sin(t-1))$,
   $y_2 = 1 - \cos t + \sin t + u(t-1)(-1 + \cos(t-1) - \sin(t-1))$.

   Ohje: Laplace-muunna molemmat yhtälöt, ratkaise $Y_1(s)$ ja $Y_2(s)$ saamastasi yhtälöryhmästä ja käänteismuunna.

4. Alla olevat matriisit edustavat lineaarisia yhtälösysteemejä $A\,x = \boldsymbol{b}$. Viimeinen sarake on oikean puolen vektori $\boldsymbol{b}$. Tällaista matriisia sanotaan yhtälöryhmän liitännäismatriisiksi ("augmented matrix").

   Saata systeemit Gaussin rivioperaatioilla porrasmuotoon (yläkolmiomuotoon) "row echelon form" ja ratkaise, jos ratkaisu(ja) on, muussa tapauksessa kerro ja perustele tuo huono uutinen.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 40 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

5. Annettuna on yhtälöryhmän liitännäismatriisi.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

   (a) Määritä yhtälö, jonka tulee vallita arvojen g, h, k välillä, jotta yhtälöryhmä olisi konsistentti (ts. sillä olisi ratkaisu(ja)).
   (b) Määritä tämän ehdon vallitessa ratkaisu(t), jo(t)ka saadaan, kun
   $h = k = 1$.