Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

Laskuharjoitus 4 LV (viikko 40 , 5 – 7.10.2005), **loppuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Tehtävät loppuviikolle 40

1. Johda Laplace-muunnoksen derivaatan kaavaa (2 kertaa) käyttäen $\mathcal{L}\{\sinh t\}$ ja $\mathcal{L}\{\cosh t\}$.
   Muistathan derivoimiskaavat: $\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh$.

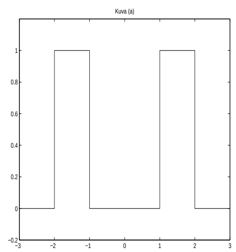
2. Ratkaise massa-jousisysteemiä kuvaava vaimennettu värähdysliiketehtävä, jota mallinnetaan yhtälöllä $y'' + 2\,y' + 5\,y = 2\,\cos\,t$.

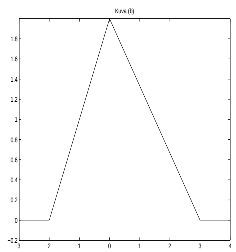
   Olkoot alkuehdot $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

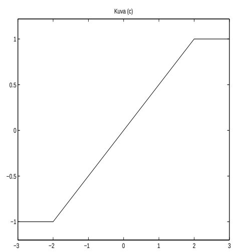
   Ratkaise yhtälö "perinteiseen"tyyliin (kts. ohjeita).
   Vast. $2/5\,\cos(t) + 1/5\,\sin(t) - 2/5\,e^{-t}\cos(2\,t) - 3/10\,e^{-t}\sin(2\,t)$

3. Ratkaise edellinen tehtävä Laplace-muunnoksen avulla.

4. Lausu kuvien esittämät paloittain määritellyt funktiot koko $\mathbb{R}$:ssä määriteltyjen funktioiden lineaarikombinaatioina. Käytä apuna Heavisiden funktiota (yksiköaskelfunktiota) $u(t) = 0,$ kun $t < 0, \quad 1,$ kun $t > 0$.







   (a) x-nurkat: $-2, -1, 1, 2$, y-arvot: $0, 1$, (b) x-nurkat: $-2, 0, 3$, y-arvot: $0, 2, 0$, (c) x-nurkat: $-2, 2$, y-arvot: $-1, 1$.

5. Määritä seuraavat käänteismuunnokset: $f(t) = (\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\})(t)$, kun

$$\text{(a) } F(s) = \frac{e^{-5\,s}}{s}, \quad \text{(b) } F(s) = \frac{e^{-3\,s}}{(s-2)^2}, \quad \text{(c) } F(s) = \frac{se^{-2\,s}}{s^2+9}.$$

   Vast. (b) $\left(e^{2\,t-6}t - 3\,e^{2\,t-6}\right)u\,(t-3)$

6. Ratkaise alkuarvotehtävä $y''+2y' = \begin{cases} 0, 0 \le t < 1 \\ 1, t \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

   Vast: $y(t) = -1/2\,e^{-2\,t} + 1/2 + u(t-1)\left(1/2\,t - 3/4 + 1/4\,e^{-2\,t+2}\right)$

   Elämänviisaus: Älä hyvä ihminen milloinkaan, missään olosuhteissa yritä ratkaista tällaista tehtävää kahdessa osassa, kahden eri herätteen vallitessa. Se on kyllä mahdollista, mutta ... tähän mennessä jokainen yritys on tuottanut kokeessa 0 pistettä. (Nimim. "kokemusta on").

Ohjeita

Vakiokertoimiset lineaariset differentiaaliyhtälöt

Kertauksena 1–2-kurssien asioista:

Yhtälö $a\,y'' + b\,y' + c\,y = r(t)$ ratkaistaan vaiheittain:
1. Homogeeniyhtälön yleinen (HY) ratkaisu: Lähdetään yritteellä $y(t) = e^{\lambda\,t}$. Kun tämä sijoitetaan (HY):öön, saadaan 2. asteen yhtälö "ominaisarvojen"λ määräämiseksi. Jos juuret ovat kompleksiset, johdutaan Eulerin kaavan avulla ratkaisuihin $e^{\alpha\,t}\cos\,\beta\,t$ ja $e^{\alpha\,t}\sin\,\beta\,t$, missä $\lambda = \alpha \pm i\,\beta$.
(HY):n yleinen ratkaisu on $y_h = C_1\,e^{\alpha\,t}\cos\,\beta\,t + C_2\,e^{\alpha\,t}\sin\,\beta\,t$.
2. Epähomogeenisen (EHY) yleinen: Etsitään jokin (EHY):n erityisratkaisu y_e. (EHY):n yleinen on $y = y_h + y_e$ ((HY):n yleinen + (EHY):n erityinen). Erityisratkaisun etsintä tapahtuu yritteellä, joka ensiyrityksellä on samaa muotoa kuin oikean puolen "heräte". Tässä siis $y_e = a\,\cos\,t + b\,\sin\,t$. (Koska $\cos' = -\sin$, ei pärjätä pelkällä kosinitermillä.) Kertoimet määrätään, jos voidaan siten, että yhtälö toteutuu. (Ellei voida, on yrite väärää muotoa.)
3. Alkuarvotehtävä (AA). Otetaan ja ratkaistaan alkuehtojen (AE) perusteella vakiot C_1 ja C_2.