Teknillinen korkeakoulu Apiola/Bingham
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`

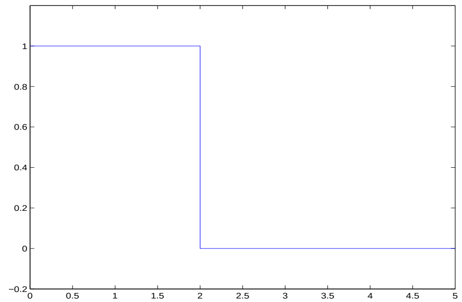
Laskuharjoitus 3 AV (viikko 40 , 3 – 5.10.2005), **alkuviikko**

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/`
Luentosivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/`
Harjoitussivu: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/`

Tehtävät alkuviikolle 40

1. Muodosta suoraan määritelmän mukaan seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset:

   a) $f(t) = t - 2$, b) f on kuvan mukainen (jatkuu nollana).



   Vast: b) $(1 - e^{-2s})/s$.

2. Laske $\mathcal{L}\{\sin^2 t\}$ kahdella tavalla:
   (a) kirjoittamalla $\sin^2 t$ *Eulerin kaavan* avulla exponenttifunktioden yhdistelmänä ja
   (b) lausumalla $\sin^2 t$ $\cos 2t$:n avulla.

   Saat ottaa tehtäväpaperin lopussa olevasta taulukosta (ja vain siitä) kaikki tarvitsemasi Laplace-muunnokset.

3. Määritä a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}\}$, b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+6}{s^2+4}\}$,

   Vast: a) $-e^{-t} + 2e^{3t}$, b) $2\cos 2t + 3\sin 2t$.

4. Määritä $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2-2\,s+2}\}$ kahdella tavalla:
   (a) Suorittamalla nimittäjässä neliöksi täydentäminen ja katselemalla taulukosta sinin ja kosinin muunnoksia (takaperin).
   (b) Muodostamalla osamurtokehitelmä, jossa esiintyy kompleksilukuja ja tähtäilemällä eksponenttifunktioon ja käyttämällä lopuksi Eulerin kaavaa.

5. (a) Määritä $\mathcal{L}\{t^2 e^{-2\,t} - e^{-t}\cos 2t + 3\}$, (b) $\mathcal{L}\{t\,\cosh\,t\}$.

   Vihje: Käytä s-siirtolausetta.
   Vast. (a): $\frac{2}{(s+2)^3} - \frac{s+1}{s^2+2\,s+5} + \frac{3}{s}$ $(Re\,s > 0)$
   (b) $\frac{s^2+1}{(s+1)^2(s-1)^2}$ $(Re\,s > 1)$

6. Määritä seuraavien funktioiden $F(s)$ käänteismuunnokset $f(t)$:
   (a) $F(s) = \frac{3}{(s+2)^5}$ (b) $F(s) = \frac{s+8}{s^2+4s+5}$. (c) $F(s) = \frac{4s}{(s-1)(s+1)^2}$

   Vihje edelleenkin: s-siirtolause. Lisävihje b)-kohtaan: Suorita nimittäjässä neliöksi täydentäminen.

   Vast. b) $e^{-2t}(\cos t + 6\sin t)$ (c) $e^t - e^{-t} + 2\,t\,e^t$.

Ohjeita

Laplace-muunnokset

Alla oleva (viivojen väliin jäävä) teksti tulee tässä muodossa välikoe- ja tenttitehtäväpapereihin mukaan.

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos \omega t$	$\sin \omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1 s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_r s+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Tästä eteenpäin oleva ei sisälly koetehtäväpaperiin.

Osamurtoniksejä

Jos nimittäjän nollakohdat ovat yksinkertaiset, voidaan osamurtokehitelmän kertoimien laskentaa lyhentää tuntuvasti menettelemällä tähän tapaan: Olkoon vaikka nimittäjä muotoa $(s - a)(s - b)(s - c)$, missä a,b,c, erilliset, jolloin

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c}.$$

Kerrotaan $(s - a)$:lla ja asetetaan $s = a$, jolloin saadaan suoraan kerroin A. Vastaavasti muut.

Jos nollakohdat eivät ole yksinkertaiset, saadaan silti osa kertoimista tähän tyyliin, mutta ei kaikkia.

Huom! Jotta tulos olisi varmasti oikein, on tiedettävä osamurtokehitelmän oikea muoto. “Perinteisessä” tyylissä kehitelmän oikeus tulee samalla varmistetuksi. (Tarkistus selvittää asian aina, se ei koskaan ole pahitteeksi, neuvoo ope.)