Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka
Apiola/Bingham

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005
http://www.math.hut.fi/teaching/k3/

Laskuharjoitus 2 LV (viikko 38 , 21 – 23.9.2005), **loppuviikko**

Näihin harjoituksiin liittyvää oppimateriaalia:
Prujut: http://math.tkk.fi/opetus/k3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf
http://math.tkk.fi/opetus/k3/05/L/kompleksianalyysi_osa2.pdf.
Molemmat Edita-jakoon nyt viikonloppuna (16.9.)
Oppikirja KRE8 CH 12 pykälät 4,7.

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: http://www.math.hut.fi/teaching/k3/
Luentosivu: http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/
Harjoitussivu: http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/

Tehtävät loppuviikolle 38

1. Esitä alla olevat funktiot f muodossa $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, missä u ja v ovat kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktiota. a) $f(z) = z^3$, b) $f(z) = \frac{1}{z^2+i}$
2. a) Osoita, että kompleksialueellakin pätee kosinin "parillisuus" ja sinin "parittomuus", ts. $\cos(-z) = \cos z$ ja $\sin(-z) = -\sin z$. b) Johda $\sin z$:n esitys muodossa $u(x, y) + i\,v(x, y)$ Tulokseksi pitäisi saada: $\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
3. Reaaalimuuttujan sini ja kosini voidaan laskea myös kompleksikaavasta, tämähän oli lähtökohta kompleksialueen määritelmille. (Saatiin Eulerin kaavoista $e^{\pm i\,x} = \ldots$ ratkaisemalla.) Näitä voidaan käyttää monessa reaalialueen tehtävässä hyödyksi. Osoita tätä tekniikkaa käyttäen, että $\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\,x \sin n\,x\,dx = 0$, kun $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.
   Huom 2 Yllä oleva on keskeisen tärkeä ominaisuus Fourier-sarjojen teoriassa, johon palaamme myöhemmin. Tulos on toki laskettavissa (helpostikin) reaalialueella, mutta kompleksialueelle siirtymällä lasku menee vielä lyhyemmin. Vastaavanlaisia kompleksiseen eksponenttifunktioon palauttamisia näemme myös (pian) mm. Laplace-muunnosten yhteydessä.
4. Missä joukossa funkto $f(z) = \frac{2\,z+i}{z-i}$ on analyyttinen ja millä perusteella? Muodosta derivaatta $f'(z)$ ja laske sen arvo, kun $z = -i$. (Älä vetoa CR-yhtälöihin, sinun ei tarvitse tietää niistä mitään vielä tässä harjoituksen vaiheessa.)
5. Osoita kahdella tavalla, että funktio $f(z) = \frac{1}{z}$ on analyyttinen joukossa $z \neq 0$ ja johda derivaatan kaava. a) Ilman CR-yhtälöitä, b) CR-yhtälöiden avulla.
6. Osoita CR-yhtälöiden avulla, että $f(z) = |z|^2$ on derivoituva vain pisteessä $z = 0$.
   Johtopäätös: f ei ole analyyttinen missään. (Selitä!)

Ohjeita

Sinin ja kosinin määritelmiä ei kenenkään tarvitse muistaa ulkoa, ne voidaan aina johtaa käden käänteessä *Eulerin kaavasta* (joka täytyy osata ulkoa, kuten koko exp-funktion määritelmäkin). (Eulerin kaavoistahan ($\pm$) saatiin reaaliset sin ja cos ja sitten vain määriteltiin samoilla kaavoilla kompleksiselle, eli x :n tilalle kirjoitettiin z.)

Funktion derivoituvuuden (analyyttisyyden) osoittamiseen on kaksi eri tapaa (erotusosamäärän lisäksi):
1) Jos funktion lauseke sisältää pelkän muuttujan z, on mahdollista, että derivoituvuus saadaan käyttämällä yleisiä lauseita, kuten summan, tulon, osamäärän, yhdistetyn funktion, käänteisfunktion, potenssin jne., aivan samoin kuin reaalifunktion tapauksessa. Tällä tavoin saadaan mm. kaikki rationaalifunktiot määrittelyjoukossaan (tasosta poistetaan nimittäjän nollakohdat) analyyttisiksi.
2) Muussa tapauksessa (toki toisinaan, vaikka esiintyisikin pelkkä z) f esitetään muodossa $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ (vast. $u(r, \varphi) + i\,v(r, \varphi)$) ja käytetään Cauchy–Riemannin yhtälöitä + osittaisderivaattojen jatkuvuutta. (Vastaavasti voidaan käyttää CR-yhtälöiden napakoordinaattimuotoa,)
Ei-derivoituvuus saadaan osoitetuksi jossain pisteessä z toteamalla, että toinen CR-yhtälöistä ei päde. "Kyllä"-derivoituvuuteen tarvitaan molemmat CR-yhtälöt ja lisäksi osittaisderivaattojen jatkuvuus ao. pisteessä.