

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi K3/P3 syksy 2005

<http://www.math.hut.fi/teaching/k3/>

Laskuharjoitus 1 AV (viikko 38 , 19 – 21.9.2005), **alkuviikko**

Näihin harjoituksiin liittyyvää oppimateriaalia:

Pruju: http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/kompleksianalyysi_osa1.pdf

Päivittyä ja tulee Edita-jakoon.Älä printtaa yleisillä!

Oppikirja KRE8 CH 12 pykälät 6,...

Kurssin www-sivuja:

Pääsivu: <http://www.math.hut.fi/teaching/k3/>

Luentosivu: <http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/L/>

Harjoitussivu: <http://www.math.hut.fi/teaching/k3/05/H/>

Tehtävät alkuvuorolle 38

1. a) Esitä e^z muodossa $u + iv$ ja määritä $|e^z|$, kun $z = 2 + 3\pi i$.
b) Kirjoita kompleksiluku $1 + i$ polaarimuotoon käyttäen eksponenttifunktiomerkitä.
c) Tee sama juurille $\sqrt[4]{-i}$.
2. a) Osoita, että $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$.
b) Määritä kaikki kompleksiluvut z , joilla $|e^{-z}| < 1$.
3. Piirrä ja selvitä alla olevien kompleksitason käyrien tai alueiden tyyppi/luonne. (Jos olet tehnyt 3 kohtaa, voit merkitä rastin.) a) $Re(z^2) = 1$,
b) $\frac{1}{2} < |z - i - 1| < 2$, c) $Im \frac{z}{z} \leq 2$, d) $|z - i| + |z + i| = 4$.
4. Tarkastellaan kuvausta $w = e^z$. Piirrä alla annetut alueet z -tasoon ja niiden kuva-alueet w -tasoon. a) $-1 \leq x \leq 1$, $-\pi \leq y \leq \pi$,
b) $0 < y < \pi/2$, c) $\ln 0.1 < x < \ln 5$.
5. Määritä pääarvot a) $Log(-5)$ ja b) $Log(-12 - 16i)$
c) Määritä kaikki arvot $\log e^{-i}$ ja merkitse joitakin tasoon.
6. Piirrä napakoordinaateissa ilmaistu z -tason alue
 $2 \leq |z| \leq 3$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$ ja sen kuva kuvauksessa $w = Log z$.

Ohjeita, määritelmiä, kaavoja, ominaisuuksia

Eksponenttifunktio

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (z = x + iy)$$

Kuvaus $w = e^z$

Jos $x = vakio = c$ ja $y_1 \leq y \leq y_2$, niin w kulkee pitkin e^c -säteistä ympyräviivaa piirtäen sektorin, jota rajaavat kulmat y_1 ja y_2 .

Jos $y = vakio = d$ ja $x_1 \leq x \leq x_2$, niin w kulkee pitkin puolisädettä, joka muodostaa x -akselin kanssa kulman d , piirtäen säteen osan, jota rajaavat $e^{x_1} -$ ja $e^{x_2} -$ säteiset ympyrät.

Tasokäyristä

Kompleksitason käyrä voidaan usein ilmaista muodossa, jossa esiintyy vaikkapa $|z - z_0|$. Kyseessä on z :n etäisyys z_0 :sta, ja asia ei siitä selkiydy, jos se kirjoitetaan koordinaattimuodossa $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (pikemminkin päinvastoin).

On toki tilanteita, jolloin koordinaattimuotoa ei voi välttää, vaan esim. ympyrän tapauksessa johdetaan muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. olevaan yhtälöön. Tällöin keskipiste ja säde saadaan neliöiksi täydentämällä. (Kannattaa palauttaa mieleen kouluajoilta, samaa tekniikkaa tarvitaan myöhemmin mm. Laplace-muunnosten yhteydessä.)

Palautetaan niinkään koulumuisteloista mieleen *ellipsin määritelmä*: Niiden pisteiden joukko, joiden etäisyyksien summa kahdesta kiinteästä pisteestä (polttopisteet) on vakio ($= 2a$).

Logaritmi

Eksponenttifunktion käänteisrelaatio (monihaarainen funktio).

$Log z = \ln |z| + i Arg z$; logaritmin päähaara

$\log z = \ln |z| + i arg z = Log z + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$; logaritmin kaikki arvot.