5 Huonosti asetetut ongelmat ja inversio-ongelmien stabiilisuus

Määr 5.1 Tutkitaan ongelmaa

(1) $$A(u) = m,$$

missä $A : X \to Y$ on ~~mahdollisesti~~ jatkuva, epälineaarinen kuvaus topologisten avaruuksien X ja Y välillä.

Ongelma (1) on (Hadamardin mielessä) hyvin asetettu, jos

1) $A : X \to Y$ on bijektio

2) $A^{-1} : Y \to X$ on jatkuva

Huom: Jos A on lineaarinen, X, Y Banach-avaruuksia $1) \Rightarrow 2)$.

Jos (1) ei ole hyvin asetettu, se on huonosti asetettu

Jos $X = Y = L^2(\mathbb{R}^n)$ ja

$$A : X \to Z = H^s(\mathbb{R}^n) \quad , \quad s > 0$$

on lineaarinen, rajoitettu ja bijektio, jolloin

$$c_1 \|f\|_X \le \|Af\|_Z \le c_2 \|f\|_X \quad , \quad c_1, c_2 > 0$$

Avoimen kuvauksen lause — rajoitettu

Sanotaan, että $A : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ on miedosti huonosti asetettu asteella s.

Esim $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$,

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} f(y)\, dy$$

jolloin

$$Af = g \iff f = (-\Delta + 1) g.$$

$A : L^2(\mathbb{R}) \to H^2(\mathbb{R})$ on bijektio. (HT.)

Esim $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$Af = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|^2/2} f(y)\,dy$$

ei ole miedosti huonosti asetettu

(Ht)

Seuraavaksi tarkastellaan Radon-muunnosta. Olkoon

$$Z = \mathbb{R} \times S^1 \qquad (S^1 = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1 \}$$
$$= [0, 2\pi] / \sim ,$$

missä $x \sim y \iff$ ~~$x = y$ tai~~ $x, y \in \{0, 2\pi\}$.

Merkitään $g(s,\theta) \in H^s(Z)$ joss

$$\|g\|^2_{H^s(Z)} := \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1+\sigma^2)^s \left| (\mathcal{F}_{s \to \sigma} g)(\sigma, \theta) \right|^2 d\sigma\, d\theta$$
$$< \infty .$$

Huom: $g \in H^1(Z) \iff g(s,\theta) \in L^2(Z)$ ja $\partial_s g(s,\theta) \in L^2(Z)$.

Lause 5.2. Olkoon $s \geq 0$ ja

$$\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \chi|_{B(0,R)} = 1.$$

Tällöin funktiolle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

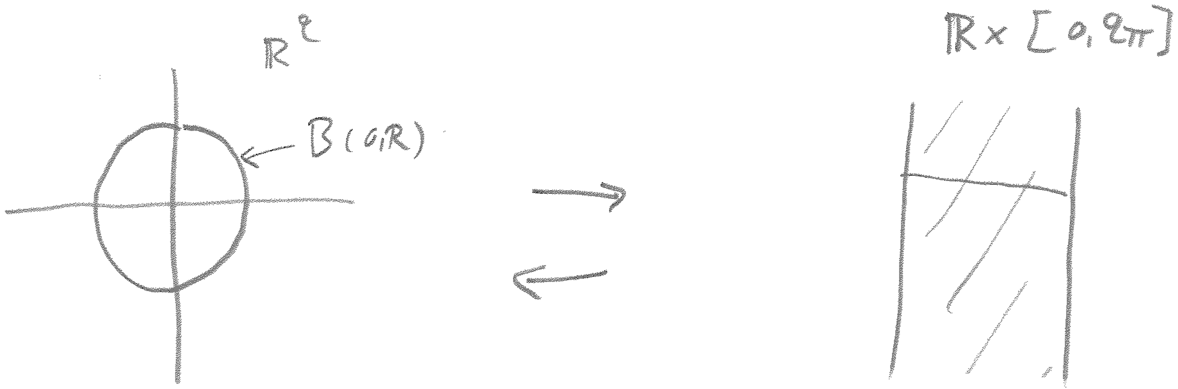
(2) $$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|Rf\|_{H^{s+1/2}(Z)}$$

(3) $$\|R(\chi f)\|_{H^{s+1/2}(Z)} \leq C_{s,\chi} \|\chi f\|_{H^s(\mathbb{R}^2)},$$

missä $C_{s,\chi} > 0$ riippuu s:stä ja χ:stä.

Huom: Jos $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ niin

$$\chi f = f.$$



Tod. Funktiolle $R_\theta w(s) = Rw(s,\theta)$, $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}$

pätee

$$\widehat{R_\theta w}(\sigma) = \hat{w}(\sigma\theta).$$

Siispä

$$\int_Z |\widehat{R_\theta w}(\sigma,\theta)|^2 (1+\sigma^2)^{s+1/2}\, d\sigma\, d\theta$$

$$= \int_{S^1} \int_{\substack{\mathbb{R} \\ \| \\ \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-}} |\hat{w}(\sigma\theta)|^2 (1+\sigma^2)^{s+1/2}\, d\sigma\, d\theta \quad , \quad \sigma\theta = (-\sigma)(-\theta)$$

"Polaarikoord."

$$= 2\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{w}(\rho)|^2 \underbrace{\frac{(1+|\rho|^2)^{s+1/2}}{|\rho|}}_{\geq (1+|\rho|^2)^s} d\rho$$

$$:= 2\left(\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)} + \int_{B(0,1)}\right) \cdot h(\rho)\, d\rho$$

$$= I_1 + I_2$$

Tämä lasku ja $\dfrac{(1+|\xi|^2)^{s+1/2}}{|\xi|} \geq (1+|\xi|^2)^s$

antaa heti

$$\|Rw\|_{H^{s+1/2}(Z)} \geq \sqrt{2}\, \|w\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$

Seuraavaksi tarkastellaan toista epäyhtälöä.
Olkoon $w = f\kappa$.

- Alueessa $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)$

$$\frac{(1+|\xi|^2)^{s+1/2}}{|\xi|} \leq 2(1+|\xi|^2)^s ,$$

joten

$$I_1 \leq 2\|\kappa f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)} .$$

- Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\psi|_{\mathrm{supp}(\kappa)} = 1$, jolloin $\psi\kappa f = \kappa f$.

Merkitään $\psi_\xi(x) = e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)$.

Tällöin

$$|\widehat{(\chi f)}(\xi)| = |\widehat{(\psi\cdot\chi f)}(\xi)|$$

$$= \Big|\int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\psi_\xi(x)}_{= e^{-i\xi\cdot x}\psi(x)} (\chi f)(x)\, dx\Big|$$

Parseval

$$= (2\pi)^{-2}\Big|\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\psi_\xi}(k)\, \widehat{\chi f}(k)\, dk\Big|$$

$$= (2\pi)^{-2}\Big|\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{\psi}_\xi(k)}{(1+|k|^2)^{s/2}} \cdot (1+|k|^2)^{s/2}\, \widehat{\chi f}(k)\, dk\Big|$$

Schwartz

$$\leq (2\pi)^{-2}\, \|\psi_\xi\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^2)} \cdot \|\chi f\|_{H^{s}(\mathbb{R}^2)}$$

Kur $s \geq 0$, pātec

$$\|\psi_\xi\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^2)} \leq \|\psi_\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} .$$

Kosha

$$C_s = \left\| \frac{(1+|\xi|^2)^{s+1/2}}{|\xi|} \right\|_{L^1(B(0,1))} < \infty, \qquad B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$$

Pātec

$$I_2 \leq C_s \cdot \sup_{|\xi| \leq 1} \left| \widehat{(\chi f)}(\xi) \right|$$

$$\leq \underbrace{C_s \cdot \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}_{< \infty} \cdot \|\chi f\|_{H^s} .$$

$\square$

<u>Huom</u> Kaavan

(2) $$\|Rf\|_{H^{1/2}(Z)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

avulla voimme laajentaa R:n yksikäsitteiselle tavalla operaattoriksi

$$R : L^2(\mathbb{R}^2) \to H^{1/2}(Z)$$

jolle (2) pätee. (HT)

<u>Huom</u> Jos $u(x,t)$ toteuttaa aaltoyhtälön

$$(\partial_t^2 - \Delta) u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \; t \in \mathbb{R}_+$$

$$u|_{t=0} = f(x)$$

$$u_t|_{t=0} = g(x),$$

osoita, että $R_\theta u(s,t)$ toteuttaa 1-ulotteisen aaltoyhtälön

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) R_\theta u(s,t) = 0.$$