Mat-1.3345 Diff.yht. inversio-ongelmat MALLIT
HARJOITUS 7
29.11.2006

1. Mitta- ja koordinaatiston muunnoksella

$$\partial_t^2 - c(x)^2 \partial_x^2$$

saadaan muotoon

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 + q(x)$$

Juuri tämän enempää tehtävässä ei tarvitse esittää.

2. $A = -\partial_x^2 \Rightarrow g(x) \equiv 1$

Lasketaan ominaisarvot λ_j ja niitä vastaavat ominaisvektorit φ_j

$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad \varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$$

Reunaspektraalidata on siis kokoelma

$$\{ \lambda_j,\ g^{\frac{1}{2}}(0)\varphi_j'(0),\ g^{-\frac{1}{2}}(1)\varphi_j'(1) : j = 1, 2, \dots \}$$

Ratkaistaan siis yhtälöä

$$-\varphi'' = \lambda \varphi$$

$\lambda > 0$: $\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0$

$\Rightarrow$ ratkaisu φ on muotoa (φ L^2-normalisoitu)

$$\varphi(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Reuna-arvot $\Rightarrow \varphi_j(x) = \sqrt{2}\sin(\pi j x)$, $\lambda_j = \pi^2 j^2$

$\lambda < 0$: $\varphi''(x) - |\lambda|\varphi(x) = 0$

$$\Rightarrow \varphi(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}$$

$\Rightarrow$ ei ratkaisuja

Data: $\{ \pi^2 j^2, \sqrt{2}\pi j, (-1)^k\sqrt{2}\pi j ; j \in \mathbb{N} \}$

HUOM! Tehtävässä pitää lisäksi olettaa $t \in [0,T]$

3. Olk. $f \in C_0^\infty(0,1)$. Jos $t > 1$, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$|u_j^f(t)| = \left| \int_0^1 f(t') s_j(t-t') dt' \varphi_j'(0) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f^{(n)}(t') S_j^n(t-t') dt' \varphi_j'(0) \right|,$$

missä $\frac{d^n}{dt'^n} S_j^n(t-t') = s_j(t-t')$.

Jos $\lambda_j > 0$, niin $|S_j^n(t)| \leq C(T)\lambda_j^{-\frac{n+1}{2}}$ $(*)$

Tämä ei vielä riitä, sillä kun $\lambda_j \to 0$ niin oikea puoli räjähtää. Riittää laskea

$$|u_j^f(t)| \leq C(T) \left| \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{\lambda_j} t}{\sqrt{\lambda_j}} dt \right|$$

$$= C(T) \left| \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_j}}{\lambda_j} \right| < C(T) \quad (**)$$

Viimeinen epäyhtälö pätee pienillä λ_j.

Yhdistämällä nyt arviot $(**)$ ja

$$|u_j^f(t)| \leq \tilde{C}(T)\lambda_j^{-\frac{n+1}{2}}$$

saadaan tulos.

Samoin voidaan laskea tapaukselle $\lambda_j < 0$.

DEMO!

Olkoon $A = -a(x)\partial_x^2 + b(x)\partial_x + c(x)$

<u>Lause</u> Kaikille $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-)$ on $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-)$ s.e.

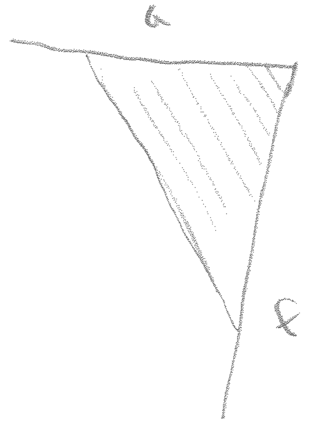
$$\begin{cases} (\partial_t^2 + A)u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}_-,\ t \in \mathbb{R} \\ u|_{x=0} = f(t) & \\ u|_{t<-T} = 0 & \text{jollakin } T > 0 \\ u(x,0) = a(x) & \end{cases}$$

<u>Tod</u> Muuttamalla koordinaatteja $\tilde{x} = \tilde{x}(x)$ yhtälö voidaan kirjoittaa $\tilde{u}(\tilde{x}, t) = u(\tilde{x}^{-1}(\tilde{x}), t)$:ll

$$(\partial_t^2 + \tilde{A})\tilde{u} = (\partial_t^2 - \partial_{\tilde{x}}^2 + \tilde{b}(\tilde{x})\partial_x + \tilde{c}(\tilde{x}))\tilde{u}(\tilde{x}, t) = 0$$

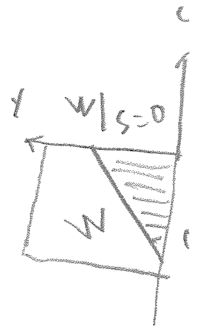
Voimme siis olettaa että $a \equiv 1$.

Tekemällä mittamuunnos $\tilde{u} \mapsto \kappa(x)u(x,t)$ voidaan olettaa $b \equiv 0$.



Olkoon $w(y,s)$ ratkaisu yhtälölle

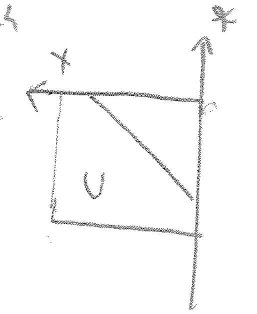
$$\begin{cases} \left(\partial_s^2 - \partial_y^2 - c(s)\right) w(y,s) = 0, & y \in \mathbb{R}_-, \; s \in \mathbb{R}_- \\ w|_{y=0} = a(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-) & \\ w|_{s<-s_0} = 0 \quad \text{jollakin } s_0 > 0 & \end{cases}$$



Aaltojen äärellisen etenemisnopeuden takia

$w(y,s) = 0$ kun

$s < -L$ tai $y < -L$,



missä $\mathrm{supp}(a) \subset [-L, 0]$. Tällöin $u(x,t) = w(t,x)$, eli kun $x = s$, $t = y$ toteuttaa

$$\begin{cases} \left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + c(x)\right) u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}_-, \; t \in \mathbb{R}_- \\ u(x,t)|_{x=0} = f(t) := w(t,s)|_{s=0} & \\ u|_{t<-T} = 0 \quad \text{jollakin } T > 0 & \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = a(x).$$

□

Ex/18 $c = 0$.

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\, f(x+t) = 0$$

$$f(x+t)\big|_{x=0} = f(t)$$

$$f(x+t)\big|_{t=0} = f(x)$$