Mat-1.3345 Diff. yhtälöiden inversio-ongelmat
HARJOITUS 2
27.9.2006

1. Osoita, että kuvaus $T: u(x_1, x_2) \mapsto u(x_1, 0)$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi

$$T: H^s(\mathbb{R}^2) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}), \quad s > \tfrac{1}{2}.$$

Huom. alkuperäinen tehtävänanto $T: H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R})$ ei pidä paikkaansa. Trace-kuvaus vie sileyttä!

Todistetaan, että T on rajoitettu

$$\left|[\mathcal{F}_{x_1 \to \xi_1}(Tu)](\xi_1)\right|^2 (1+\xi_1^2)^{s-\frac{1}{2}}$$

$$\leq (1+\xi_1^2)^{s-\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi_2 \right]^2$$

$$\leq C (1+\xi_1^2)^{s-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_2 \cdot \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi_2$$

$$= (*)$$

<u>Huomautus:</u> $\exists C_1, C_2 : C_1(1+|\xi|_1)^2 \leq 1+|\xi|^2 \leq C_2(1+|\xi|_1)^2$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi_2 \leq 2C_1 \int_0^\infty (1+|\xi_1|+\xi_2)^{-2s} d\xi_2$$

$$\overset{t=\xi_2+|\xi_1|+1}{=} 2C_1 \int_{|\xi_1|+1}^\infty t^{-2s} dt$$

$$\leq \frac{2C_1}{2s-1} (1+|\xi_1|)^{1-2s}$$

$$\leq \frac{2C_1C_2}{2s-1} (1+\xi_1^2)^{\frac{1}{2}-s}$$

$$\Rightarrow (*) \leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi_2$$

$$\Rightarrow \|Tu\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$

2. Osoita, että $S(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ on tiheä.

Fourier-muunnos on isometria avaruuksien $H^s(\mathbb{R})$ ja $L^2(\mathbb{R}, (1+\xi^2)^s d\xi)$ (painotettu L^2) välillä. Tiedämme myös $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ jatkuvasti.

Näin ollen riittää todistaa $S(\mathbb{R})$ tiheäksi $L^2(\mathbb{R}, (1+\xi^2)^s d\xi)$:ssä

Olk. $f \in L^2(\mathbb{R}, (1+\xi^2)^s d\xi) =: L^2$ ja $\varepsilon > 0$.
Osoitetaan, että on $f_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$ s.e. $\|f - f_\varepsilon\|_{L^2} < \varepsilon$.

Kiinnitä R s.e. $\|\chi_{[-R,R]} f - f\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\chi_{[-R,R]} f$:llä on kompakti kantaja. Silloin

$$h_j := \varphi_j * (\chi_{[-R,R]} f) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}),$$

missä $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$ ja $\varphi_j(x) := j\varphi(jx)$.

Lasketaan auki: (merk $\chi = \chi_{[-R,R]}$)

$$\chi(\xi)f(\xi) - h_j(\xi) = \chi(\xi)f(\xi)\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(\xi - y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(\xi-y)\chi(y)f(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} j\varphi(j(\xi-y))\left[\chi(\xi)f(\xi) - \chi(y)f(y)\right]dy \qquad z = j(\xi - y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(z)\left[\chi(\xi)f(\xi) - \chi\left(\xi - \frac{z}{j}\right)f\left(\xi - \frac{z}{j}\right)\right]dz$$

$$\overset{\text{LDCT}}{\Rightarrow} \lim_j \|\chi f - h_j\|_{L^2} = 0 \quad (R \text{ kiinnitetty})$$

$\Rightarrow$ Valitaan sellainen $f_\varepsilon := h_j$, että $\|\chi f - h_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Silloin

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\chi f - f\|_{L^2} + \|\chi f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$$

$\square$

3. Osoita, että kuvaus $I : u \mapsto u$, $u \in S(\mathbb{R})$, voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi

$$I : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}), \qquad s > \tfrac{1}{2}.$$

Osoitetaan, että $I : H^s(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ on rajoitettu.

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= |F^{-1} Fu(x)| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \, d\xi \\
&= C \int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-\frac{s}{2}} (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \cdot |\hat{u}(\xi)| \, d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{s} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \tilde{C} \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_x |u(x)| \leq \tilde{C} \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ I on rajoitettu

4. Etsi ainakin kaksi distribuutiota $g(x,t)$, joille

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\, g(x,t) = \delta_{(0,0)}(x,t). \qquad (*)$$

Tehdään muuttujanvaihto

$$a = \frac{x+t}{2}, \quad b = \frac{x-t}{2},$$

jolloin $(*)$ muuntuu muotoon:

$$\partial_a \partial_b\, g(a,b) = \delta_{(0,0)}(a,b).$$

Tästä näemme, että ainakin $H(a)\otimes H(b)$ toteuttaa yhtälön:

$$\begin{aligned}\partial_a \partial_b\, H(a)\otimes H(b) &= (\partial_a H)(a)\otimes(\partial_b H)(b)\\ &= \delta_0(a)\otimes\delta_0(b)\\ &= \delta_{(0,0)}(a,b)\end{aligned}$$

Muuttujanvaihto takaisin antaa

$$\begin{aligned}(\partial_x^2 - \partial_t^2)\, H(x+t)H(x-t) &= \delta_0(x+t)\otimes\delta_0(x-t)\\ &= \delta_{(0,0)}(x,t)\end{aligned}$$

Toinen ratkaisu saadaan esim. lisäämällä vakio tai joku homogeenisen yhtälön ratkaisu yllä esitettyyn ratkaisuun.