Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3345 Differentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmat **Lassas/Helin**
Harjoitus 4
Ke 11.10.2006 klo 14-16 U345

1. Olkoon $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Osoita, että kertomisoperaattori $M_q u(x) = q(x)u(x)$ on jatkuva $M_q : H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \in \mathbb{N}$.

2. Osoita, että jos kaikille $f \in C_0^\infty(B(0,1))$ pätee
$$||Rf||_{H^{1/2}(Z)} \leq C\, ||f||_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,,$$
niin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva laajennus
$$R : L^2(B(0,1)) \to H^{1/2}(Z),$$
missä $L^2(B(0,1)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \mathrm{supp}(f) \subset \overline{B(0,1)}\}$ on $L^2(\mathbb{R}^2)$:n aliavaruus.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in L^2(B(0,1))$. Osoita, että f:n Fourier-muunnos $\hat{f}(\xi)$ on laajennettavissa $\mathbb{C}^2$:n funktioksi, joka riippuu muuttujasta $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ ja kaikilla $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}$ funktiot $\xi_1 \mapsto \hat{f}(\xi_1, \eta_2)$ ja $\xi_2 \mapsto \hat{f}(\eta_1, \xi_2)$ ovat analyyttisiä.

4. (Demo) Olkoon $f \in L^2(B(0,R))$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Osoita, että arvot
$$Rf(s,\theta), \quad (s,\theta) \in T_\epsilon,$$
missä $T_\epsilon = \{(s,\theta) \mid s \in \mathbb{R}, \theta = (\cos\alpha, \sin\alpha), |\alpha| < \epsilon\}$ määräävät f:n yksikäsitteisesti. Onko kuvaus
$$R : L^2(B(0,R)) \to L^2(Z), \quad R : f \mapsto Rf|_{T_\epsilon},$$
hyvin asetettu?