Matematik
Aalto-universitetet
Metsalo

Mat-1.1510 Svenskspråkig grundkurs i matematik 1

Mellanförhör nr 2, 15.11.2010

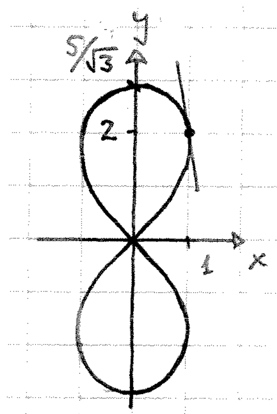
Fyll i tydligt *på varje svarpapper* samtliga uppgifter. På *förhörskod och -namn* skriv kursens kod, namn samt *slutförhör* eller *mellanförhör* med ordningsnummer. Examenprogrammen är ARK, AUT, BIO, EST, ENE, GMA, INF, KEM, KTA, KON, MAR, MTE, PUU, RRT, TFM, TIK, TLT, TUO, YYT.

Vid detta mellanförhör får varken räknare eller tabellsamlingar användas.
Fråga om ni misstänker att det förekommer något tryckfel!

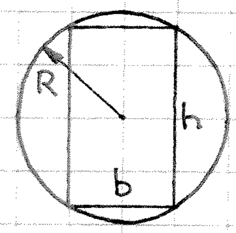
1. Om det finns någon vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ sådan att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ för något (reellt eller komplext) tal λ, säges $\vec{x}$ vara en *egenvektor* till (den kvadratiska) matrisen A, som hör till *egenvärdet* λ.

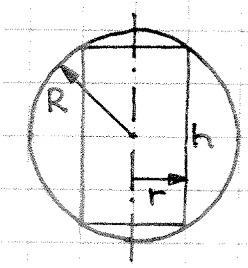
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Visa att $\vec{x}$ är en egenvektor till A och bestäm egenvärdet, som den tillhör.
b) -1 är ett egenvärde till A. Bestäm någon egenvektor, som hör till detta egenvärde.
c) A har även ett tredje egenvärde. Bestäm även det.



2. Grafen av ekvationen $3(x^2 + y^2)^2 = 25(y^2 - x^2)$ (se den övre figuren till höger) kallas för en *lemniskata*. Punkten $(1, 2)$ ligger på lemniskatan och ekvationen bestämmer implicit y som en funktion av x i en omgivning av den punkten. Lemniskatans tangentlinje i punkten $(1, 2)$ begränsar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en rätvinklig triangel. Beräkna arean hos denna triangel.





3. a) Visa att av alla rektanglar, som får plats inuti en cirkel med radien R, är det kvadraten med basen $b =$ höjden $h = \sqrt{2}R$, som har största arean.
b) Nu attackerar vi motsvarande problem i 3 dimensioner: Bestäm radien r och höjden h hos den räta cirkulära cylindern med maximal volym, som får plats inuti en sfär med radien R.

4. Om f är definierad i $\mathbf{R}$ och det finns något tal $T > 0$ sådant att $f(t + T) = f(t)$ för alla $t \in \mathbf{R}$, säges f vara *periodisk* med perioden T. I så fall är f även periodisk med perioden nT för $n \in \mathbf{N}$. Om f och g bägge är periodiska med perioden T och $c \in \mathbf{R}$, så är även $c \cdot f$ (som ges av $(c \cdot f)(t) = c \cdot f(t)$), $f + g$ (som ges av $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$) och $f \cdot g$ (som ges av $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$) periodiska med perioden T, eftersom $(c \cdot f)(t + T) = c \cdot f(t + T) = c \cdot f(t) = (c \cdot f)(t)$, $(f + g)(t + T) = f(t + T) + g(t + T) = f(t) + g(t) = (f + g)(t)$ och $(f \cdot g)(t + T) = f(t + T) \cdot g(t + T) = f(t) \cdot g(t) = (f \cdot g)(t)$.
a) Visa att om f är periodisk med perioden T och h är en godtycklig funktion definierad i $\mathbf{R}$, så är $h \circ f$ (som ges av $(h \circ f)(t) = h(f(t))$) också periodisk med perioden T.
b) Visa t.ex. mha. ett motexempel att om f är periodisk med perioden T och h är en godtycklig funktion definierad i $\mathbf{R}$, så är $f \circ h$ (som ges av $(f \circ h)(t) = f(h(t))$) inte nödvändigtvis periodisk.
c) Visa att om f är *differentierbar* och periodisk med perioden T, så är även f:s derivatafunktion f' periodisk med perioden T.