NÅGRA ALGEBRAISKA GRUNDBEGREPP

En mängd M kallas för en HALVGRUPP, om M är utrustad med en binär operation $*$, som satisfierar

A0) $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$ (M *sluten* under $*$)

A1) $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$ ($*$ *associativ*)

En halvgrupp $(M, *)$ kallas för en KOMMUTATIV HALVGRUPP (eller Abelsk halvgrupp), om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

(I en kommutativ halvgrupp betecknas operationen ofta $+$.)

En halvgrupp $(M, *)$ kallas för en MONOID, om $*$ dessutom satisfierar

A2) $\exists e \in M$ sådant att $e * x = x * e = x, \forall x \in M$ (e *enhet* under $*$)

En monoid $(M, *)$ kallas för en KOMMUTATIV MONOID (eller Abelsk monoid), om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

(I en kommutativ monoid betecknas operationen ofta $+$ och enheten ofta 0.)

En monoid $(M, *)$ kallas för en GRUPP, om $*$ dessutom satisfierar

A3) $\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M$ sådant att $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (*invers* under $*$)

En grupp $(M, *)$ kallas för en KOMMUTATIV GRUPP (eller Abelsk grupp), om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

(Även i en kommutativ grupp betecknas operationen ofta $+$ och enheten ofta 0. Då betecknas inversen till x ofta $-x$.)

En mängd M kallas för en RING, om M är utrustad med två binära operationer $+$ och $*$, som satisfierar

B1) $(M, +)$ är en kommutativ grupp

B2) $(M, *)$ är en halvgrupp

A5) $x * (y + z) = (x * y) + (x * z), \forall x, y, z \in M$ ($*$ *distributiv*
$(x + y) * z = (x * z) + (y * z), \forall x, y, z \in M$ med avseende på $+$)

En ring $(M, +, *)$ kallas för en KOMMUTATIV RING (eller Abelsk ring), om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

En ring $(M, +, *)$ kallas för en RING MED ETTA, om $*$ dessutom satisfierar

A2) $\exists e \in M$ sådant att $e * x = x * e = x, \forall x \in M$ (e *enhet* under $*$)

En ring $(M, +, *)$ med etta kallas för en KOMMUTATIV RING MED ETTA (eller Abelsk ring med etta), om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

En ring $(M, +, *)$ med etta kallas för en DIVISIONSRING, om $e \neq 0$ och om $*$ dessutom satisfierar

A3) $\forall x \in M \backslash \{0\}\ \exists x^{-1} \in M$ sådant att $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (*invers* under $*$)

En divisionsring innehåller alltså alltid minst två olika element, nämligen 0 (enheten under $+$) och e (enheten under $*$). Likaså har varje element en invers under $+$ och varje element utom (möjligen) 0 har också en invers under $*$.

En divisionsring $(M, +, *)$ kallas för en KROPP om $*$ dessutom satisfierar

A4) $x * y = y * x, \forall x, y \in M$ ($*$ *kommutativ*)

En kropp är alltså en kommutativ divisionsring. Uttrycket SKEVKROPP används ibland för icke-kommutativa divisionsringar.

En mängd M kallas för en ORDNAD MÄNGD, om M är utrustad med en relation $<$, som satisfierar

A6) $x, y \in M \Rightarrow$ en och endast en (enn) av relationerna nedan gäller:

$x < y, x = y, y < x$

A7) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ ($<$ *transitiv*)

($y < x$ betecknas också $x > y$. $x \leq y$ betyder $x < y$ eller $x = y$ och $x \geq y$ betyder $x > y$ eller $x = y$.)

En halvgrupp $(M, *)$, som är ordnad som mängd betraktad, kallas för en ORDNAD HALVGRUPP, om $<$ dessutom satisfierar

A8) $x < y, z \in M \Rightarrow x * z < y * z$ och $z * x < z * y$

Ordnade monoider, ordnade grupper och deras kommutativa motsvarigheter definieras analogt.

En ring $(M, +, *)$, där $(M, +)$ är en ordnad kommutativ grupp med enheten 0, kallas för en ORDNAD RING, om $<$ dessutom satisfierar

A9) $0 < x, 0 < y \Rightarrow 0 < x * y$

Ordnade ringar med etta, ordnade divisionsringar och deras kommutativa motsvarigheter definieras analogt.

Egenskaper, som följer ur axiomen ovan:

Sats 1: Enheten i en monoid är unik.
Sats 2: $e^{-1} = e$ i en grupp.
Sats 3: Inversen till varje element i en grupp är unik.
Följdsats: $(x^{-1})^{-1} = x$ för varje element x i en grupp.
Sats 4: $a * b = a * c$ eller $b * a = c * a \Rightarrow b = c$ i en grupp.
Sats 5: $a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = b$ i en grupp.
Sats 6: $0 * a = a * 0 = 0$ i en ring.
Sats 7: $(-e) * a = a * (-e) = -a$ i en ring med etta.
Följdsats: $(-e) * (-e) = e$ i en ring med etta.
Sats 8: $0 < a \Rightarrow -a < 0$ i en ordnad kommutativ grupp.
Sats 9: $0 < e$ i en ordnad divisionsring.
Följdsats: $e < e + e$ i en ordnad divisionsring.
Sats 10: $0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1}$ i en ordnad divisionsring.