Teknillinen korkeakoulu
Mat-1.3462 Funktionaalianalyysin sovelluksia **Lassas/Helin**
Harjoitus 1
Ti 18.9.2007 klo 16-18 U322

1. Olkoon $K \subset\subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, missä Ω on avoin (ja K kompakti). Kertaa hieman $\mathbb{R}^n$:n topologiaa varmistamalla, että

   (i) $d(K, \partial\Omega) > 0$,

   (ii) K:n kompaktisuus on riippumaton siitä tarkastellaanko sitä metrisen avaruuden Ω vai $\mathbb{R}^n$ osajoukkona.

2. Perustele yksityiskohtaisesti, että $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{jos } x > 0, \\ 0, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases}$$

3. Olkoot funktiot f, g, h jatkuvia ja enintään yhden kantaja ei-kompakti. Todista:

   (i) $(c_1 f + c_2 g) * h = c_1 f * h + c_2 g * h$, missä $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$,

   (ii) $f * g = g * f$ ja

   (iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

4. Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funktio, joka on jatkuva välillä $[0,1]$ ja jatkuvasti derivoituva välillä $(0,1)$. Oletetaan, että f:n derivaatta on jatkettavissa jatkuvaksi funktioksi välille $[0,1]$. Osoita, että on olemassa funktio $F \in C_0^1(\mathbb{R})$ jolle $F|_{(0,1)} = f|_{(0,1)}$, eli toisin sanoen, f voidaan jatkaa jatkuvaksi funktioksi $F \in C_0^1(\mathbb{R})$.

   Vihje: Peilaa funktiota välin päätepisteiden suhteen.

   Huomautus: Tämä tehtävä osoittaa, että avaruus $C^1([0,1])$ voidaan määritellä joko

$$C^1([0,1]) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} f \text{ on jatkuvasti derivoituva välillä } (0,1) \text{ ja} \\ \text{sekä } f \text{ että } f' \text{ voidaan jatkaa välin } [0,1] \\ \text{jatkuvaksi funktioksi.} \end{array} \right\}$$

   tai

$$C^1([0,1]) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} : \text{on olemassa } F \in C_0^1(\mathbb{R}), \text{ jolle } F|_{(0,1)} = f\}.$$

5. Olkoon $(a_n)_{n=0}^\infty$ mielivaltainen reaalilukujono. Osoita, että on olemassa $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, jolle $\phi^{(k)}(0) = a_k$ kaikilla $k \geq 0$. [Opastus: Tämä on Rudinin *Real and Complex Analysis* -kirjan luvun 19 harjoitustehtävä.