2. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Osoita, että

$$t : X \times X \to X$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

ja

$$s : \mathbb{K} \times X \to X$$
$$(a, x) \mapsto ax$$

ovat jatkuvia.

Tod. Ks. [K] Lause 1.4-8 ss. 30-31

Olkoon $z_n \in X \times X$ jono, joka suppenee pisteeseen $z \in X \times X$. Merkitään

$$z_n = (x_n, y_n)$$
$$z = (x, y)$$

$$z_n \xrightarrow{X \times X} z \iff x_n \xrightarrow{X} x \text{ ja } y_n \xrightarrow{X} y$$

Osoitetaan nyt, että

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$$

Olkoon $\varepsilon > 0$.

Olkoon $N_x \in \mathbb{N}$ s.e. (siten että)

$$\| x_n - x \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_x .$$

Olkoon $N_y \in \mathbb{N}$ s.e.

$$\| y_n - y \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_y .$$

Tällöin kolmioepäyhtälön nojalla

$$\| x_n + y_n - (x + y) \| = \| x_n - x + y_n - y \|$$

$$\leq \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \leq \varepsilon$$

$\square$

Katso tehtäväsarjan lopussa liitepaperi (14)

3. a) Kolmioepäyhtälöä käyttäen

$$\|x\| - \|y\| = \| x - y + y \| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\|$$

$$= \| x - y \|$$

$$\|y\| - \|x\| = \| y - x + x \| - \|x\| \leq \|y - x\| + \|x\| - \|x\|$$

$$= \| x - y \|$$

Näin ollen $(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$

ja $-(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$

jolloin $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$ $\square$

b) <u>Tasainen jatkuvuus</u>

Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus.

f on tasaisesti jatkuva, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. kaikilla $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$, joille $d_X(x_1, x_2) < \delta$ pätee

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon .$$

Nyt osoitetaan, että $x \longmapsto \|x\|$ on tasaisesti jatkuva normiavaruudessa $(X, \|\cdot\|)$

<u>Tod.</u> Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $\delta = \varepsilon$.

Olkoon $x_1, x_2 \in X$ s.e. $\|x_1 - x_2\| < \delta$. Tällöin a)-kohdan nojalla

$$\big|\, \|x_1\| - \|x_2\| \,\big| \le \|x_1 - x_2\| < \delta = \varepsilon$$

□

3.c) Osoita, että kuvaus

$$d : \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R} \quad , \quad d(x,y) := \|x-y\|$$

on $\bar{X}$:n metriikka.

<u>Tod.</u> Normin aksioomat:

(N1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x,y \in \bar{X}$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad \forall x \in \bar{X}, \ \alpha \in \mathbb{K}$

(N3) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

Osoitetaan näiden avulla d metriikaksi.

(M1) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in \bar{X}$.

<u>Tod.</u>
$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|x-z+z-y\| \\ &\overset{(N1)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \quad \square \end{aligned}$$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

<u>Tod.</u>
$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= |-1| \, \|x-y\| \\ &= \|y-x\| = d(y,x) \quad \square \end{aligned}$$

3.c) (M3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

Tod. $d(x,y) = 0$

$$\iff \|x-y\| = 0$$

$$\iff x - y = 0$$

$$\iff x = y \quad \square$$

4. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ vektoriavaruuden X ekvivalentit normit. Osoita, että avaruuksien $(X, \|\cdot\|_1)$ ja $(X, \|\cdot\|_2)$ avoimet ja suljetut joukot ovat samat.

Tod. Annetut normit ovat ekvivalentteja, joten on olemassa $C > 0$ s.e.

$$\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Olkoon $S \subset X$ ~~...~~ avaruuden $(X, \|\cdot\|_1)$ mielivaltainen ~~suljettu~~ avoin joukko. Olkoon $x \in S$. Koska S on avoin avaruudessa $(X, \|\cdot\|_1)$ on olemassa pallo $B(x, r_1) \subset S$. Olkoon $r_2 = \frac{r_1}{C}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|_2 &\leq C\|x-y\|_1 \\
&< C r_1 \\
&= r_2 .
\end{aligned}
$$

Siis $x \in S$ on sisäpiste avaruuden $(X, \|\cdot\|_2)$ topologiassa. Koska x on mielivaltainen, niin S:n kaikki pisteet ovat sisäpisteitä ja S on avoin avaruuden $(X, \|\cdot\|_2)$ topologiassa.

Kaikki $(X, \|\cdot\|_1)$:n avoimet joukot ovat siis avoimia $(X, \|\cdot\|_2)$:ssa.

Täsmälleen samalla todistuksella voidaan, vaihtamalla avaruudet toisikseen, todeta avaruuksien avoimet joukot samoiksi.

Olkoon nyt $K \subset X$ avaruuden $(X, \|\cdot\|_1)$ suljettu joukko. Tällöin

$$U = X \setminus K \text{ on avoin}$$

avaruudessa $(X, \|\cdot\|_1)$ ja edellä todistetun nojalla myös avaruudessa $(X, \|\cdot\|_2)$. Tällöin

$$X \setminus U = K$$

on suljettu avaruudessa $(X, \|\cdot\|_2)$ $\square$

5. a) Ks. luentomuistiinpanot Seuraus 3.5.

Olkoon $1 \le p < q < \infty$. Olkoon $x \in \ell^p$. Oletetaan ensin, että $\|x\|_p = 1$.

Tällöin

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \ldots\right)^{1/p}$$
$$= |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \ldots$$

$$\|x\|_p = \|x\|_p^{p/q}$$

$$= \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots \right)^{1/q}$$

$$\geq \left(|x_1|^q + |x_2|^q + \dots \right)^{1/q}$$

$$= \|x\|_q \quad ,$$

sillä $|x_j| \leq 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots$

ja $p < q$.

Olkoon nyt $x \in \ell^p$ s.e. $\|x\|_p > 0$.

Tällöin $\frac{x}{\|x\|_p} \in \ell^p$ ja $\left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p = 1$.

Siis

$$\|x\|_q = \left\| \frac{1}{\|x\|_p} x \; \|x\|_p \right\|_q$$

$$= \|x\|_p \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_q$$

$$\leq \|x\|_p \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_p$$

$$= \|x\|_p \quad .$$

Lopulta, jos $x \in \ell^p$ ja $\|x\|_p = 0$, niin saadaan $x = 0$ ja ~~$\|x\|_q$~~ $\|x\|_q = 0$, jolloin $\|x\|_q \le \|x\|_p$. Näin

$$\ell^p \subset \ell^q .$$

$\square$

b) Osoitetaan, että $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.

Huom! Sarja $\sum_k \frac{1}{k^\alpha}$ suppenee, kun $\alpha > 1$ ja hajaantuu, kun $\alpha = 1$.

Tässä muodostamme vastaesimerkin käyttämällä havaintoa hyväksi.

Tod. Riittää löytää yksi jono $x^n \in \ell^p$ s.e. ~~on~~ $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy ja jono ei suppene mihinkään $\hat{x} \in \ell^p$.

Olkoon

$$x^{(n)} = \left(1, \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/p}, \left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/p}, \dots, \left(\tfrac{1}{n}\right)^{1/p}, 0, 0, \dots\right),$$

kun $n \in \mathbb{N}$.

Tällöin $\quad x^{(n)} \in \ell^p \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Lisäksi $\quad (x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy :

$$\| x^n - x^{n+p} \|_q = \| (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ kpl}}, \left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{1/p}, \dots, \left(\tfrac{1}{n+p}\right)^{1/p}, 0, 0, \dots$$

$$\leq \| (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ kpl}}, \left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{1/p}, \left(\tfrac{1}{n+2}\right)^{1/p}, \dots) \|_q$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k}\right)^{\frac{q}{p}} \right)^{1/q} \xrightarrow{n \to \infty} 0 ,$$

sillä $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k}\right)^{\frac{q}{p}}$ suppenee yliharmonisena.

Oletetaan nyt, että olisi $\hat{x} \in \ell^p$ s.e. $x^{(n)} \xrightarrow[q]{} \hat{x}$,

kun $n \to \infty$. Tällöin

$$| x_k^{(n)} - \hat{x}_k | = \left(| x_k^{(n)} - \hat{x}_k |^q \right)^{1/q}$$

$$\leq \| x_k^{(n)} - \hat{x}_k \|_q \longrightarrow 0 ,$$

kun $n \to \infty$. Siis

$$\hat{x}_k = \lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = \left(\tfrac{1}{k}\right)^{1/p} .$$

Kuitenkin $$\|\hat{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)^{1/p}$$

$$= \infty .$$

Siis $\hat{x} \notin \ell^p$, jolloin avaruus

$(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.

$\square$

6. Olkoon $x \in \ell^1$ ja asetetaan

$$\|x\| = \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| .$$

Osoitetaan, että $(\ell^1, \|\cdot\|)$ on normiavaruus.

<u>Tod.</u> (N1): Olkoon $x, y \in \ell^1$.

$$\|x+y\| = \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j + y_j \right|$$

$$= \sup_n \left| \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \right|$$

$$\leq \sup_n \left(\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} y_j\right| \right)$$

$$\leq \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| + \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} y_j \right|$$

$$= \|x\| + \|y\| .$$

(N2): Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. (tai $\alpha \in \mathbb{C}$) ja $x \in \ell^1$.

$$\|\alpha x\| = \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha x_j \right|$$

$$= \sup_n \left| \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j \right|$$

$$= \sup_n |\alpha| \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right|$$

$$= |\alpha| \sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right|$$

$$= |\alpha| \, \|x\| .$$

(N3): Olkoon $x \in \ell^1$. Olkoon $\|x\| = 0$.

Tällöin induktiolla komponenttien suhteen saadaan väite:

1° $x_1 = 0$, sillä $\sup_n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{1} x_j \right| = |x_1| = 0$

2° Oletetaan, että $x_1, \ldots, x_{n-1} = 0$. Tällöin

$$0 = \|x\| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| = |x_n| .$$

Toisaalta, jos $x = 0$, niin $\|x\| = 0$.

$\square$

Osoitetaan lopuksi, että $(l^1, \|\cdot\|)$ ei ole Banachin avaruus. Olkoon

$$x^{(i)} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, (-1)^{i+1}\frac{1}{i}, 0, 0, \dots\right).$$

Tällöin $x^{(i)} \in l^1 \quad \forall i = 1, 2, \dots$

Jono on kuitenkin Cauchy, sillä

$$\|x^{(i)} - x^{(i+h)}\|$$

$$= \Big\|\Big(\underbrace{0, \dots, 0}_{i \text{ kpl}}, \frac{(-1)^{i+2}}{i+1}, \dots, \frac{(-1)^{i+h+1}}{i+h}, 0, 0, \dots\Big)\Big\|$$

$$\overset{\text{Leibniz}}{\leq} \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} \leq \frac{2}{i} \xrightarrow{i \to \infty} 0.$$

Kuten kohdassa 5.b), jos olisi $\hat{x} \in l^1$ s.e. $x^{(i)} \to \hat{x}$, niin olisi $x_j^{(i)} \to \hat{x}_j$, jolloin $\hat{x}_j = (-1)^{j+1}\frac{1}{j}$. Kuitenkin

$$\|\hat{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty,$$

jolloin $\hat{x} \notin l^1$.

2. Osoitetaan, että skalaarilla kertominen on jatkuva operaatio normiavaruudessa.

<u>Tod.</u> Olkoon $z_n \in \mathbb{K} \times X$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, että $z_n \longrightarrow z \in \mathbb{K} \times X$.

Tällöin merkitsemällä $z_n = (\alpha_n, x_n)$

$$\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$$

$$x_n \longrightarrow x \in X .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $A = \sup_n |\alpha_n|$.

Koska $\alpha_n \to \alpha$, niin $A < \infty$. Olkoon nyt $N_x \in \mathbb{N}$ s.e. $\| x - x_n \| < \frac{\varepsilon}{2A}$

kaikilla $n \geq N_x$. Olkoon $N_\alpha \in \mathbb{N}$ s.e.

$| \alpha - \alpha_n | < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ kaikilla $n \geq N_\alpha$.

Tällöin kaikilla $n \geq \max(N_x, N_\alpha)$

$$\|\alpha x - \alpha_n x_n\| \leq \|\alpha x - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_n x_n\|$$

$$= |\alpha - \alpha_n| \, \|x\| + |\alpha_n| \, \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon |\alpha_n|}{2A}$$

$$\leq \varepsilon$$

□