Mat-1.3430 Funktionaalianalyysin perusteet

Harj. 8.
23.11.2007

Peltonen / Aalto

1) Olkoot Y normiavaruus, H Hilbertin avaruus, $M \subset H$ suljettu vektorialiavaruus ja $A \in \mathcal{L}(M, Y)$. Osoita, että löytyy $A_1 \in \mathcal{L}(H, Y)$ siten, että pätee $Ax = A_1 x \quad \forall\, x \in M$ ja $\|A\| = \|A_1\|$.

2) Olkoon X äärellisulotteinen vektoriavaruus. Osoita, että pätee $X^{**} = X$.

3) Olkoon $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineaarinen kuvaus ja (a_{ij}) sen esitysmatriisi standardikantojen suhteen.

a) Osoita, että jos $\mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^n$ varustetaan normilla $\|(t_i)\|_1 = \sum |t_i|$, niin

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(saraketsummanormi)}$$

b) Osoita, että jos $\mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^n$ varustetaan normilla $\|(t_i)\|_\infty = \max |t_i|$, niin

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(rivisummanormi)}$$

4) Kuvaus $f : \ell^p \to \mathbb{K}$ $(1 < p < \infty)$, joka määräytyy ehdosta $f(x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = x_1 - x_2 + 10 x_8$, on jatkuva lineaarikuvaus eli $(\ell^p)'$:n alkio. Mikä ℓ^q:n alkio vastaa funktiota f samastuksessa $(\ell^p)' = \ell^q$? Määrää f:n duaalinormi.

5) Olkoon $c = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \exists \lim_{k \to \infty} x_k\}$ ja $c_0 = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \lim_{k \to \infty} x_k = 0\}$, $c, c_0 \subset (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Osoita, että kuvaus

$$A : (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto (x_{k+1} + x_1)_{k \in \mathbb{N}}$$

on lineaarinen isomorfismi $c_0 \to c$.