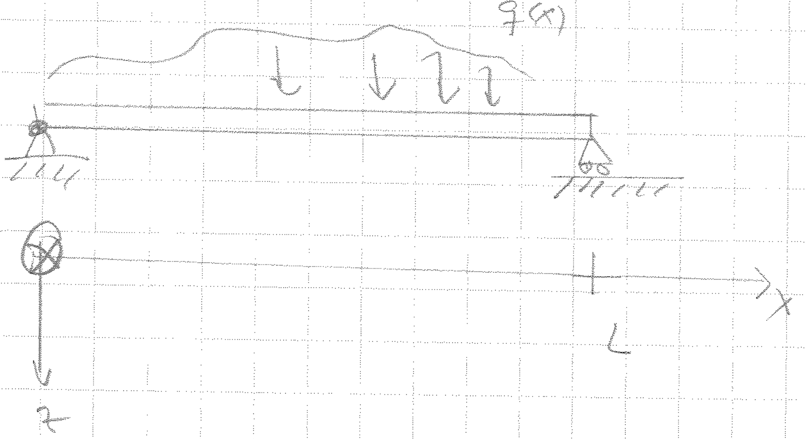
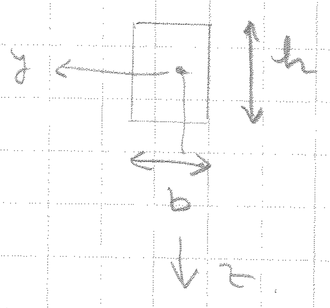
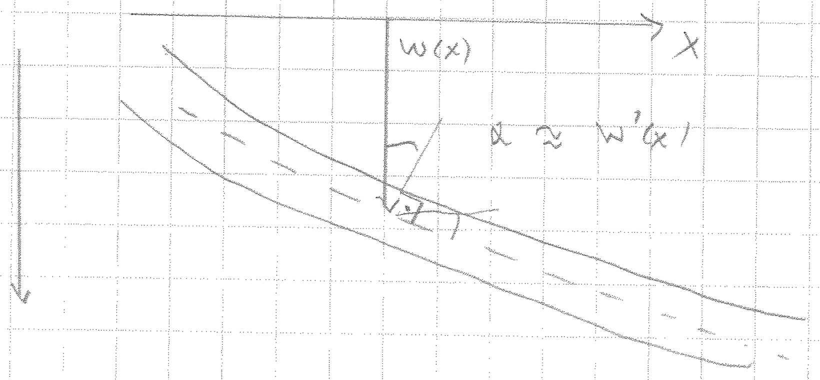
3.1 ~~2.6.~~ Palkki . B-malli







Bernoullin oletus: normaali pysyy normaalina. Saadaan siirtymäkenttä

$$\begin{cases} u_1(x) = -z\,w'(x), \\ u_2(x) = 0, \\ u_3(x) = w(x). \end{cases}$$

Venymät

$$\varepsilon_{11} = -z\,w''(x)$$

$$\varepsilon_{13} = -\frac{1}{2}(w'(x) - w'(x)) = 0.$$

$$\varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0.$$

Kimmoinen energia on siis

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^b\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{11}\,\varepsilon_{11}\,dz\,dy\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\,b\int_0^L\int_{-h/2}^{h/2} (E z^2 [w''(x)]^2\,dz\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L E\frac{bh^3}{12}[w''(x)]^2\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\,[w''(x)]^2\,dx, \quad I = \frac{bh^3}{12}.$$

Ulkoisen voiman potentiaalienergia on

$$-\int_0^L q(x)\,w(x)\,dx$$ ja kokonaisenergia

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_0^L EI\,[w''(x)]^2\,dx - \int_0^L q(x)\,w(x)\,dx.$$

Variaatiotehtävä:

$$\underbrace{\int_0^L EI\,w''(x)\,v''(x)\,dx}_{:=\,a(w,v)} = \underbrace{\int_0^L q(x)\,v(x)\,dx}_{:=\,l(v)}.$$

Osittaisintegrointi $\Rightarrow$

Leikkausvoimassa ja jännityksessä tehdään aikaan tuloksen johtava epäloogisuus (Leikkausjännitys pitäisi oletusten perusteella olla nolla)

Palataan tasapainoyhtälöihin

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-E z\, w''(x)\right)$$

$$= z\,(E\, w''(x))'$$

josta

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} z^2 (E\, w''(x))' + g(x)$$

$$\tau_{xz}(\pm h/2) = 0.$$

$$\frac{h^2}{8}[E\, w''(x)]' + g(x) = 0.$$

$$g(x) = -\frac{h^2}{8}(E\, w''(x))'$$

Siis

$$\tau_{xz} = (E\, w''(x))'\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{h^2}{8}\right).$$

$$\int_0^L [(EI\, w''(x))'' - q(x)]\, v(x)\, dx$$

$$+ \Big|_0^L \Big[(EI\, w''(x))'\, v(x) - EI\, w''(x)\, v'(x) \Big] = 0 .$$

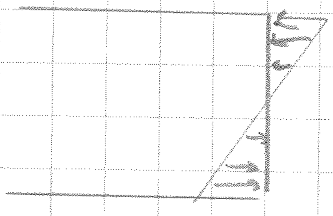
Siis E.-L. yhtälö

$$(EI\, w''(x))'' = q(x)$$

ja reunaehto vaihtoehdot

Kinemaattinen	Luonnollinen
$v(0)$	$(EI\, w''(0))'$
$v'(0)$	$EI\, w''(0)$.

Luonnollisten ehtojen fyys. merkitys.



$\tau_{11} = -E z\, w''(x)$

Kokonaismomentti

$$M = \int_{P.\,Pinta} z\, \tau_{11}\, dA$$

$$= b \int_{-h/2}^{h} -E z^2\, w''(x)\, dz = -EI\, w''(x) .$$

Kokonais leikkausvoima on

$$V = b\int_{-h/2}^{h/2} (\quad w''(x)]' \left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{h^2}{8}\right) dz$$

$$= [E\, w''(x)]' \quad b \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} z^2 - \frac{h^2}{8})\, dz,$$

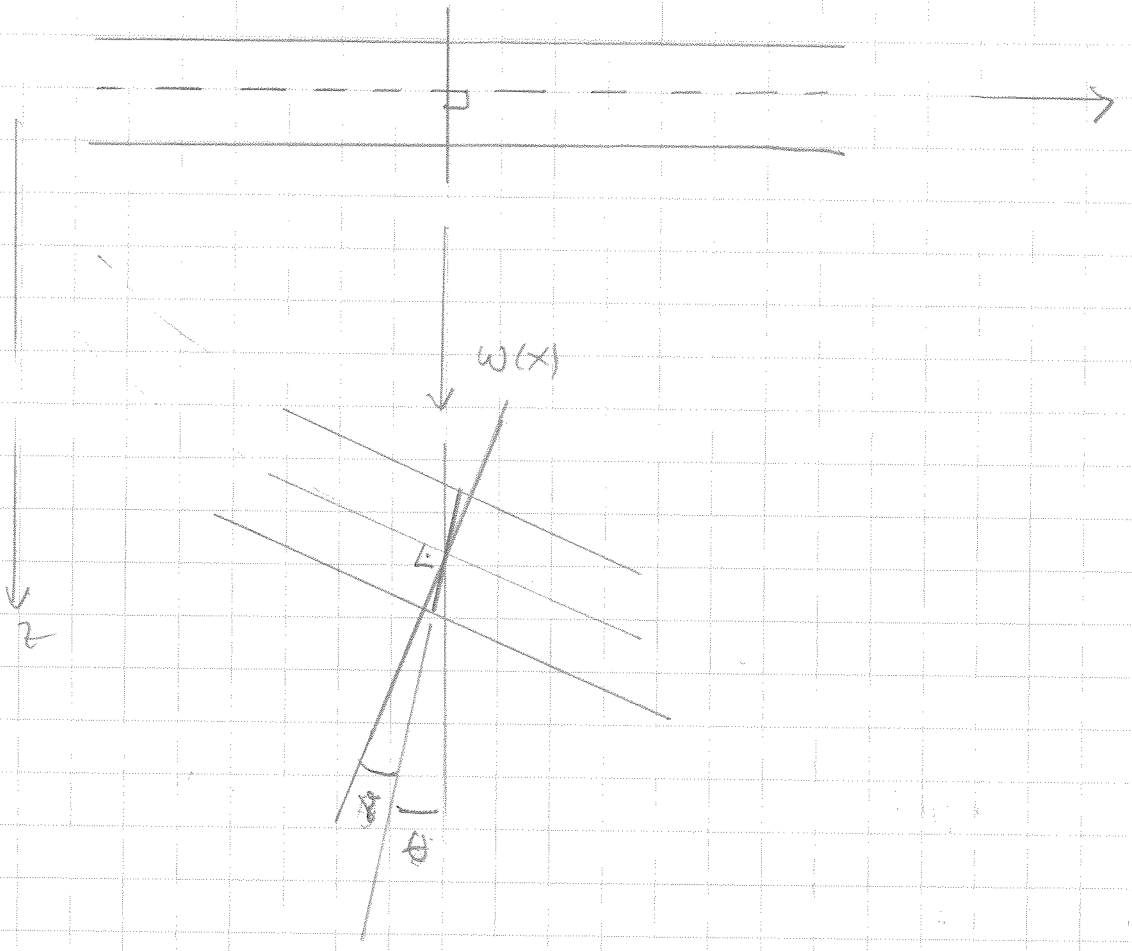
$$= (\text{——}''\text{——}) \quad b \left(\Big|_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{6} z^3 - \frac{h^3}{8} \right)$$

$$= b \left(\frac{2}{6} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{h^3}{8} \right) = - \frac{b h^3}{12}.$$

Siis leikkausvoima on

$$V = -[EI\; w''(x)]' \quad .$$

Timoshenko palkki



$w' = \theta + \gamma$ $\quad w = w(x), \theta = \theta(x), \gamma = \gamma(x)$

Liukuma γ on siis $w' - \theta$, missä θ on normaalin rotaatio.

Siirtymälle x_1-suunnassa pätee

$$u_1(x) = -\theta(x) z$$

$$\varepsilon_{11}(x) = -z\theta'(x) \quad , \tau_{11} = -Ez\theta'(x)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(w'(x) - \theta(x)), \quad = \varepsilon_{31}$$

$$\tau_{31} = \tau_{13} = 2G\varepsilon_{13} = (w'(x) - \theta(x))$$

Kimmoinen energia

$$2U = \int_0^L \int_A \tau_{11} \varepsilon_{11} \, dA \, dx + 2 \int_0^L \int_A \tau_{13} \varepsilon_{13} \, dA \, dx .$$

$$= \int_0^L \Big[\, b \int_{-a/2}^{a/2} E z^2 (\theta')^2 \, dz \, dA + GA \, (w' - \theta)^2 \Big] dx .$$

$$= \int_0^L EI (\theta')^2 \, dx + \int_0^L GA \, (w' - \theta)^2 \, dx$$

Siis

$$\Phi(w, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\theta')^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_0^L GA \, (w' - \theta)^2 \, dx$$

$$- \int_0^L q(x) \, w(x) \, dx .$$

Variaatiomuoto:

$$\int_0^L EI \theta' \varphi' \, dx - \int_0^L GA \, (w' - \theta) \varphi \, dx = 0 .$$

$$\int_0^L GA \, (w' - \theta) \, v' \, dx = \int_0^L q v \, dx .$$

$\forall \, (\varphi, v)$ jotka ovat kinemaattisesti luvallisia.

Euler–Lag. yhtälöt ja reuna-ehdot saadaan taas osittaisintegroimalla

$$\int_0^L \left[(EI\theta')' + GA(w'-\theta) \right] \varphi \, dx$$

$$+ \Big|_0^L (EI\theta')\varphi \quad = 0 .$$

$$- \int_0^L q v \, dx = 0$$

$$- \int_0^L (GA(w'-\theta))' v \, dx + \Big|_0^L GA(w'-\theta) v$$

Vahva muoto on siis

$$\left. \begin{aligned} (EI\theta')' + GA(w'-\theta) &= 0 \\ -GA(w'-\theta)' &= q \end{aligned} \right\} x \in (0,L)$$

Reunaehdot:

kinemaattiset	luonnolliset
$\theta(\cdot)$	$EI\theta'(\cdot)$
$w(\cdot)$	$GA(w'-\theta)(\cdot)$.

Niinkuin E–B palkille todetaan, että $EI\theta' = -M$.

Liukuvoima taas oli

$$\gamma = w' - \theta$$

josta saadaan, että leikkausjännitys on

$$G(w' - \theta)$$

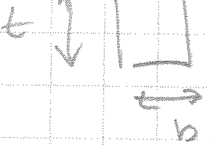
ja leikkausvoima

$$Q = GA(w' - \theta).$$

$\square$

Kuorman skaalaus, mallien riippuvuus toisistaan

Olkoon poikkipinta esim. suorakulmio



Tällöin $I = \frac{1}{12} b t^3$

ja $A = bt$.

Jotta Euler-Bernoulli palkille:

$$EI\, w^{(4)} = f$$

olisi rajaratkaisu kun $t \to 0$

täytyy skaalata kuorma f s.e.

se on verrannollinen t^3:een.

Kirjoitetaan $f = EI\, g$

jolloin saadaan tehtävä

$$w^{(4)}(x) = g(x) \quad , \quad 0 < x < L.$$

Olkoon reunaehdot esim.

$$w(0) = w'(0) = 0$$

$$w''(L) = w'''(L) = 0 .$$

Energia on

$$\Phi(w) = \frac{1}{2}\int_0^L (w'')^2\,dx - \int_0^L g w\,dx$$

$$w \in V = \{ v \mid v \in H^2(0,L)\ , v(0) = v'(0) = 0 \}.$$

Timoshenkon palkille sama skaalaus antaa energian

$$I(w,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^L (\theta')^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{GA}{EI}\int_0^L (w'-\theta)^2\,dx$$

$$- \int_0^L g w\,dx .$$

Merkitään $\frac{GA}{EI} = (\frac{1}{\varepsilon})^2$

jollain $\varepsilon \sim t$.

Timoshenkon mallin energianormia merkitään $|||\cdot|||$ -llä.

T-mallissakin luvalliset muuttujat ovat avaruudessa

$$T = \{ (v, \varphi) \in H^1(0,L) \times H^1(0,L) \mid$$

$$v(0) = 0 \qquad \varphi(0) = 0 \} .$$

Mallien Eulerin yhtälöt reuna-ehtoineen ovat

$$\begin{cases} w^{(4)}(x) = g(x) & 0 < x < L, \\ w(0) = w'(0) = 0 & \\ w''(L) = w'''(L) = 0 . & \end{cases}$$

ja Timoshenkolle :

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta) &= 0, \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta)' &= g, \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < L.$$

$$\left. \begin{aligned} w(0) = 0 , \quad & \theta(0) = 0 . \\ \theta'(L) &= 0 . \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta)(L) &= 0 . \end{aligned} \right\} \text{ Reunaehdot.}$$

Timoshenko mallin heikko muoto on

$$\int_0^L \theta' \varphi' \, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^L (w' - \theta)(v' - \varphi) \, dx$$

$$= \int_0^L g v \, dx$$

$$\forall (v, \varphi) \in T .$$

Merkitään E.-B. palkin ratkaisua w_0:lla ja

$$\Theta_0 = w_0',$$

Otamme vielä käyttöön apumuuttuj

Q_0 – leikkausvoima jolloin

E.B. malli on

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= w_0' \\ \Theta_0'' + Q_0 &= 0 \\ -Q_0' &= g \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < L,$$

Reunaehdot: $w_0(0) = 0$, $\Theta_0(0) = 0$.

$\Theta_0'(L) = 0$, $Q_0(L) = 0$.

Lasketaan ratkaisujen erotuksen energianormi:

$$|||w - w_0, \Theta - \Theta_0|||^2$$

$$= \int_0^L (\Theta' - \Theta_0')(\Theta' - \Theta_0')\,dx$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^L \underset{\uparrow}{(w' - \Theta)}\,((w' - w_0') - (\Theta - \Theta_0))\,dx$$

käytetty tietoa $w_0' - \Theta_0 = 0$.

Ensimmäisessä termissä integroidaan osittain:

$$\int_0^L (\theta' - \theta_0')(\theta' - \theta_0')\, dx$$

$$= -\int_0^L (\theta'' - \theta_0'')(\theta - \theta_0)\, dx + \Big|_0^L (\theta' - \theta_0')(\theta - \theta_0)$$

$$= -\int_0^L (\theta'' - \theta_0'')(\theta - \theta_0)\, dx ,$$

reunaehtojen ansiosta.

Differentiaaliyhtälöistä $-Q_0' = g$

ja $-\frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta)' = g$

saadaan

$$0 = -\int_0^L \left(Q_0' - \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta)' \right)(w - w_0)\, dx$$

$$= \int_0^L \left(Q_0 - \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta) \right)(w' - w_0')\, dx$$

$$- \Big|_0^L \left(Q_0 - \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta) \right)(w - w_0)$$

$$= \int_0^L \left(Q_0 - \frac{1}{\varepsilon^2}(w' - \theta) \right)(w' - w_0')\, dx ,$$

missä taas sijoitustermi $= 0$

reunaehtojen johdosta.

Yhdistämällä saamme siis

$$|||\, w-w_0,\ \theta-\theta_0 \,|||^2$$

$$= \int_0^L \left[-(\theta''-\theta_0'') - \frac{1}{\varepsilon^2}(w'-\theta) \right] (\theta-\theta_0)\, dx$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^L (w'-\theta)(w'-w_0')\, dx$$

$$= \int_0^L \theta_0'' (\theta-\theta_0)\, dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^L (w'-\theta)(w'-w_0')\, d$$

$$= -\int_0^L Q_0 (\theta-\theta_0)\, dx + \int_0^L Q_0 (w'-w_0')\, dx$$

$$= \int_0^L Q_0 \left((w'-w_0') - (\theta-\theta_0) \right) dx$$

$$\leq \| Q_0 \|_0 \cdot \| (w'-w_0') - (\theta-\theta_0) \|_0$$

$$\leq \varepsilon \| Q_0 \|_0 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \| (w'-w_0') - (\theta-\theta_0) \|_0$$

$$\leq \varepsilon \| Q_0 \|_0 \cdot |||\, w-w_0,\ \theta-\theta_0 \,|||,$$

missä $\|\cdot\|_0$ on $L^2(0,L)$ -normi,

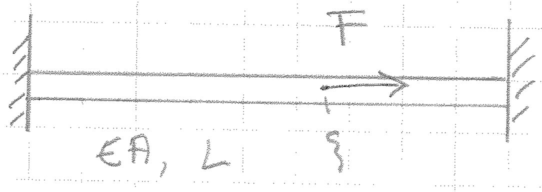
Koska $Q_0 = w_0'''$ saatiin siis

$$|||\, w-w_0,\ \theta-\theta_0 \,||| \leq \varepsilon \| w_0''' \|_0$$

▷.

3.2 Sauvojen ja palkkien ratkaiseminen Fourier-sarjoilla ja Greenin funktiolla

Sauvatehtävä pistekuormalla pisteessä ξ:



Energia on

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int_0^L EA(v'(x))^2\,dx - Fv(\xi)$$

$v \in H_0^1(0,L)$.

Variaatioformulaatio: Etsi $u \in H_0^1(0,L)$ s.e.

$$\int_0^L EA\,u'(x)v'(x)\,dx = Fv(\xi)$$

$$\forall v \in H_0^1(0,L).$$

Reuna-arvotehtävä yhteensopivuusehtoineen saadaan osittaisintegroimalla

$$\int_0^L EA\,u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^\xi EA\,u'(x)v'(x)\,dx$$

$$+ \int_\xi^L EA\,u'(x)v'(x)\,dx$$

$$= -\int_0^\xi (EAu')'v\,dx + \Big|_0^\xi EA\,u'(x)v(x)$$

$$- \int_{\xi}^{L} (EAu')' v \, dx + \Big|_{\xi}^{L} EAu'v$$

$$= - \int_{0}^{\xi} (EAu')' v \, dx - \int_{\xi}^{L} (EAu')' v \, dx$$

$$+ \left(EAu'(\xi-) - EAu'(\xi+) \right) v(\xi)$$

Saadaan siis tehtävä

$$\begin{cases} (EAu'(x))' + \overset{0}{\cancel{f(x)}} = 0, & 0 < x < \xi \ \& \ \xi < x < L, \\ u(0) = u(L) = 0, & \\ EAu'(\xi-) = EAu'(\xi+) + F. & \end{cases}$$

Ratkaisu on

$$u(x) = \begin{cases} \frac{FL}{EA} \left(\frac{x}{L} \right) \left(1 - \frac{\xi}{L} \right) & 0 < x < \xi \\ \frac{FL}{EA} \left(\frac{\xi}{L} \right) \left(1 - \frac{x}{L} \right) & \xi < x < L. \end{cases}$$

Tehtävän Greenin funktio $G(x, \xi)$ on tämä ratkaisu yksikkö-kuormalla $F = 1$.

Yleinen tehtävän:

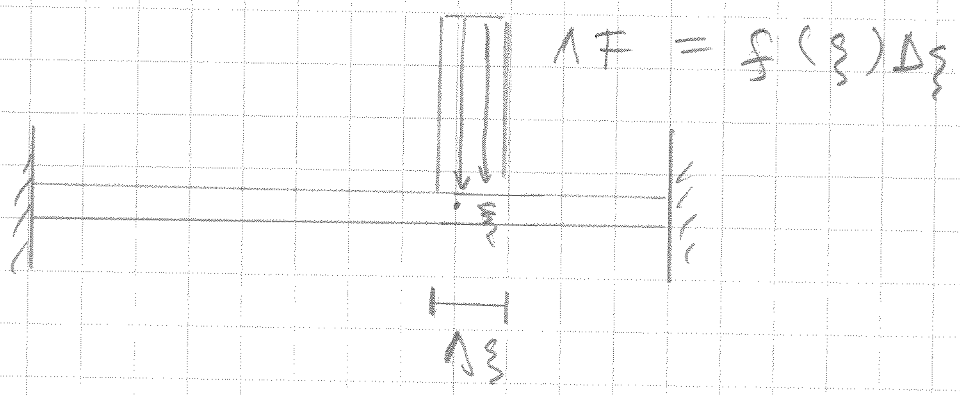
$$(EAu'(x))' + f(x) = 0 \quad 0 < x < L$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

ratkaisu esitellyn Greenin funktion avulla on

$$u(x) = \int_0^L G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi .$$

Tämän ymmärtää helpoiten differentiaalisella ajattelulla:



$$\Delta u = G(x,\xi)F = G(x,\xi)f(\xi)\Delta\xi$$

$\Rightarrow$

$$u(x) = \int_0^L G(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi ,$$

Sitovampi perustelu saadaan suoraan laskemalla.

Sauva Fourier-sarjoilla

Bilineaarimuoto

$$a(v,w) = \int_0^L EA\, v'(x)\, w'(x)\, dx$$

on symmetrinen ja positiivisesti definiitti josta seuraa, että on olemassa positiiviset ominaisarvot $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ ja vastaavat ominaisfunktiot w_n, $n = 1, 2, \dots$ jotka ovat täydellisiä $L^2(0,L)$:ssä.

Siis $\quad a(w_n, v) = \lambda_n (w_n, v) \quad \forall v \in H_0^1(0,L)$

eli

$$(EI\, w_n'(x))' = -\lambda_n w_n'(x) \qquad 0 < x < L$$

$$w_n(0) = w_n(L) = 0$$

Olkoon EI = vakio = 1 (skaalaamalla). Tällöin ominaisarvot ja ominaisfunktiot ovat

λ_n

$$\lambda_n' = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad w_n(x) = \sin n\pi\left(\frac{x}{L}\right).$$

$\frac{EI\pi^2}{L^2}$

Kun kuorma $f(x)$ esitetään ortogonaalijärjestelmän avulla:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\pi \frac{x}{L},$$

missä

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin n\pi \left(\frac{x}{L}\right) dx,$$

niin reuna-arvotehtävän ratkaisu on

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \sin n\pi \left(\frac{x}{L}\right)$$

$$= \frac{L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{n^2} \sin n\pi \left(\frac{x}{L}\right).$$

<u>Esimerkki 1.</u> Pistekuorma pisteessä $L/2$; $f(x) = \delta(x - L/2)$

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin n\pi \left(\frac{x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{L} \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \\ 1 & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

Siis (distribuutiomielessä)

$$f'(x) = \frac{2}{L}\left(\sin \pi\left(\frac{x}{L}\right) - \sin 3\pi\left(\frac{x}{L}\right) + \sin 5\pi\left(\frac{x}{L}\right) - \cdots \right)$$

ja ratkaisu

$$u(x) = \frac{2L}{\pi^2}\left(\sin \pi\left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{9}\sin 3\pi\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{25}\sin 5\pi\left(\frac{x}{L}\right) \cdots \right).$$

Siis ratkaisun

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < L/2, \\ \frac{1}{2}(L-x) & L/2 < x < L, \end{cases}$$

Fourier - sini - sarja.

<u>Esimerkki 2.</u> Tasainen kuorma $f(x) = 1$.

F - kertoimet

$$\frac{L}{2} f_n = \int_0^L \sin n\pi\left(\frac{x}{L}\right) dx$$

$$= -\frac{L}{n\pi} \Big/_0^L \cos n\pi\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) \Rightarrow$$

$$f_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n = \text{pariton}, \\ 0 & n = \text{parillinen}. \end{cases}$$

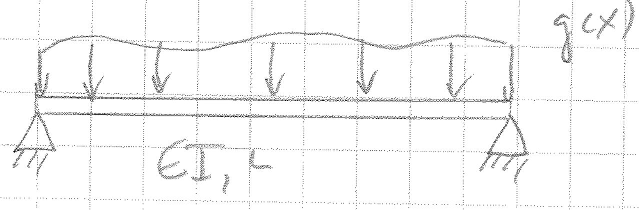
Ratkaisu on siis

$$u(x) = \frac{2L^2}{\pi^3}\left(\sin \pi \frac{x}{L} + \frac{1}{27} \sin 3\pi \frac{x}{L} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{125} \sin 5\pi \frac{x}{L} + \dots \right).$$

Palkki.

Greenin funktio harjoitustehtävänä.



Normalisoidaan: $EI = 1$ jolloin reuna-arvotehtävä on

$$w^{(4)}(x) = g(x) \qquad 0 < x < L$$

$$w(0) = w(L) = 0,$$

$$w'(0) = w'(L) = 0.$$

Ominaisfunktiot ovat

$$w_n(x) = \sin n\pi \frac{x}{L}$$

ja ominaisarvot

$$\lambda_n = \frac{n^4 \pi^4}{L^4}.$$

Pistekuormalle $g(x) = \delta(x - L/2)$

Saadaan ratkaisu

$$w(x) = \frac{2L^3}{\pi^4}\left(\sin \pi \frac{x}{L} - \frac{1}{81} \sin 3\pi \frac{x}{L}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{625} \sin 5\pi \frac{x}{L} - \frac{1}{7^4} \sin 7\pi \frac{x}{L} + \cdots \right)$$

Keskipisteessä saadaan

$$w(L/2) = \frac{2L^3}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{81} + \frac{1}{625} + \cdots\right)$$

$\frac{L^3}{\pi^4} \cdot 0.020531$ $\longrightarrow|$

$\cdot\ 0.020785$ $\longrightarrow|$

0.020818 $\longrightarrow|$

Tarkka arvo on $\frac{L^3}{\pi^4} \cdot 0.02083$.

Tasaiselle kuormalle $g(x) = 1$ saamme

$$w(x) = \frac{4L^4}{\pi^5}\left(\sin \pi \frac{x}{L} + \frac{1}{3^5} \sin 3\pi \frac{x}{L}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{7^5} \sin 7\pi\left(\frac{x}{L}\right) + \cdots \right).$$

Keskipisteessä

$$w(L/2) = \frac{4L^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{7^5} - \cdots\right)$$

$= L^4 \cdot 0.01307,\ 0.013017,\ 0.0130214$

Oikea arvo on

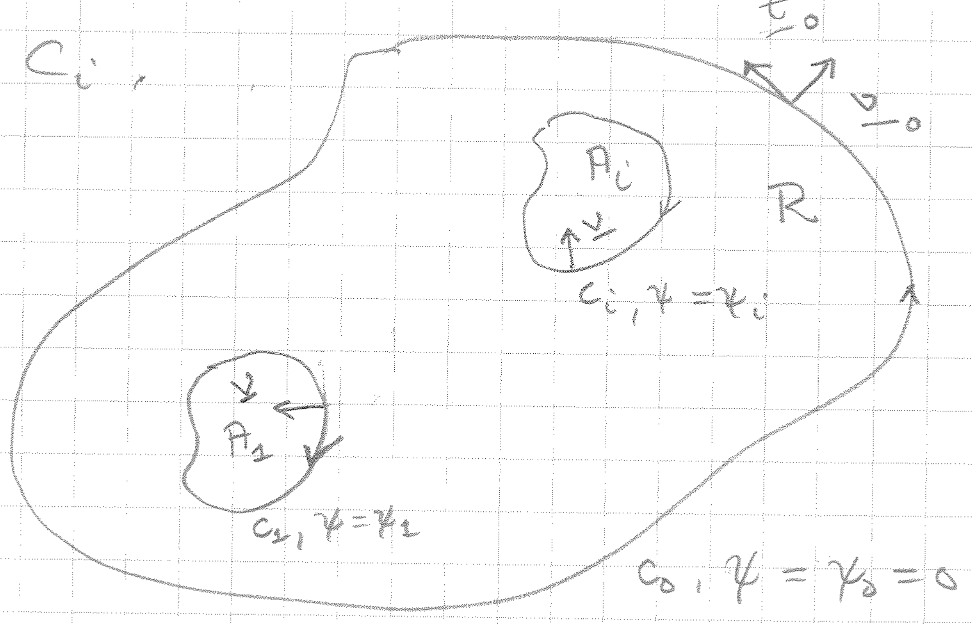
$$\frac{5L^4}{384} = L^4 \cdot 0.0130208.$$

Prandtl'in teoria kun poikkipinnassa on "reikiä".

(kts. esim. Sokolnikoff, The mathematical Theory of Elasticity, Landau & Lifshitz, Theory of Elasticity).

Kun alue ei ole yhdesti yhtenäinen niin ainoastaan yhdellä suljetulla reunan osalla ψ voidaan asettaa nollaksi. Muilla osilla $\psi|_{C_i} = \psi_i$, $i=1,2,\dots,n$, ovat tuntemattomia.

$$\partial R = \bigcup_{i=0}^{n} C_i ,$$



Differentiaaliyhtälö & reunaehdot

$$\Delta \psi = -2 \qquad R\text{:ssä}$$

$$\psi|_{C_i} = \psi_i \quad , \quad i = 0,1,\dots,n.$$

$$\psi_0 = 0 .$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} x' - \frac{\partial\psi}{\partial x} y'\right) dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (y x' - x y')\, dt.$$

$$= \oint_{C_i} \nabla\psi\cdot\underline{\nu}\, ds + \oint_{C_i} \vec{r}\cdot\underline{\nu}\, ds.$$

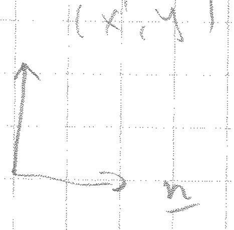
Tässä $\underline{\nu}$ on R:n ulkonormaali ja kierretään ∂R:n positiiviseen suuntaan. Tätä huomioonottaen saamme, käyttäen divergenssilausetta

$$\oint_{C_i} \vec{r}\cdot\underline{\nu}\, ds = -\int_{A_i} 2\, dA.$$

Siis ehto

$$\oint_{C_i} \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, ds = 2A_i \quad , i=1,2,\dots,n.$$

$\int \operatorname{div} \underline{u} = \int \underline{u}\cdot\underline{n}$



$t = (x', y')$

$n = (y', -x')$.

Momentille saadaan

$$\frac{M}{G\alpha} = -\int_R \left(y\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dA$$

$$= -\int_R \vec{r}\cdot\nabla\psi \; dA$$

$$= \int_R \nabla\cdot\vec{r}\;\psi \, dA - \int_{\partial R} \vec{r}\cdot\underline{\nu}\;\psi \, ds$$

$$= 2\int_R \psi \, dA - \sum_{i=1}^{n} \psi_i \oint_{C_i} \vec{r}\cdot\underline{\nu} \, ds$$

$$= 2\int_R \psi \, dA + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, 2A_i$$

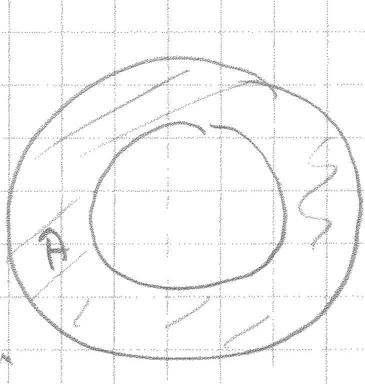
$$= 2\left[\int_R \psi \, dA + \sum_{i=1}^{n} \psi_i A_i\right]. \quad \square$$

<u>Esimerkki</u> Putki $R_1 \le r \le R_2$

"Warping" funktio ϕ

häviää taas

identtisesti. $\Rightarrow$



$M = G\alpha I_V$ missä

$$I_V = \int_A (x^2+y^2)\, dA = \frac{\pi}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right).$$

Prandtlin jännitysfunktion avulla.

$$\begin{cases} \Delta \psi = -2 \\ \psi_{|R_1} = \psi_1 \\ \psi_{|R_2} = 0. \end{cases}$$

Diff. yhtälö

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) = -2.$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) = -2r.$$

$$r\frac{d\psi}{dr} = -r^2 + C_1.$$

$$\frac{d\psi}{dr} = -r + \frac{C_1}{r}$$

Lisäehto : $\oint_{C_1} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds = 2A_1 \quad , i=1.$

$\Rightarrow$

$$-\int_{r=R_1} \frac{d\psi}{dr} ds = 2\pi R_1^2$$

$$-2\pi R_1\left(-R_1 + \frac{C_1}{R_1}\right) = 2\pi R_1^2$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Siis $\frac{d\psi}{dr} = -r$

ja $\psi(r) = -\frac{1}{2}r^2 + c_2$.

$\psi(R_2) = 0 \Rightarrow \psi(r) = \frac{1}{2}(R_2^2 - r^2)$.

$$\frac{M}{2G\alpha} = \int_A \frac{1}{2}(R_2^2 - r^2)\,dA + \pi\psi(R_1)R_1^2$$

$$= 2\pi\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}(R_2^2 - r^2)\,r\,dr + \frac{\pi}{2}(R_2^2 - R_1^2)R_1^2$$

$$= \quad . \quad . \quad = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

Siis

$$M = G\alpha\,\frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4).$$