Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik Gripenberg
Övning 5
Vecka 41, 9.10–15.10.2013
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 20, 21

**I1.** Funktionen $\alpha : \{0, 1, \ldots, 14\} \to \{0, 1, 2 \ldots, 14\}$ som definierats med $\alpha(x) = \mathrm{mod}\,(4 \cdot x, 15)$ är en bijektion (eftersom $\mathrm{sgd}\,(4, 15) = 1$). Bestäm denhär funktionens banor (dvs. mängderna $\{\, \alpha^j(x) : j \geq 0 \,\}$ då $x \in \{0, 1, \ldots, 14\}$ och $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$) och skriv $\alpha$ som en produkt av cykler (dvs. uttryck i stil med $(a\ b\ c)$ där $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = c$ och $\alpha(c) = a$).

*Lösning:* Vi kan beskriva funktionen med en $2 \times 15$-matris så att

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix},$$

vilket skall läsas så att tex. $\alpha(3) = 12$.

För att bestämma banorna tar vi ett element $x$ som inte redan hör till någon bana och räknar ut $\alpha(x)$, $\alpha^2(x)$ osv. tills vi kommer tillbaka till $x$. Detta ger följande banor när vi startar med $0$:

$$\{0\}, \quad \{1, 4\}, \quad \{2, 8\}, \quad \{3, 12\}, \quad \{5\}, \quad \{6, 9\}, \quad \{7, 13\}, \quad \{10\}, \quad \{11, 14\}.$$

Varje bana av $\alpha$ motsvaras av en cykel och om vi lämnar bort cyklarna med längden $1$ kan vi uttrycka $\alpha$ med cykelnotation som

$$\alpha = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 14\end{pmatrix}.$$

---

**I2.** Den symmetriska gruppen $S_3$ består av alla permutationer av mängden $\{1, 2, 3\}$.

(a) Visa att $H = \{(1), (2\ 3)\}$ (där cykelnotation använts) är en delgrupp av $S_3$, dvs. att produkterna av elementen i $H$ hör till $H$.

(b) Bestäm de vänstra sidoklasserna $aH$, $a \in S_3$, till $H$.

(c) Bestäm de högra sidoklasserna $Ha$, $a \in S_3$, till $H$ (och du ser att dessa inte är de samma som i (b)).

(d) Bestäm med hjälp av resultaten i punkt (b) element $a$, $b$, $c$ och $d \in S_3$ så att $aH = bH$ och $cH = dH$ men $acH \neq bdH$ (vilket betyder att man inte kan definiera en operation $\diamond$ på de vänstra sidoklasserna med $(xH) \diamond (yH) = xyH$.)

*Lösning:* (a) Identitetselementet i $S_3$ är $(1)$ (som också kan skrivas som $(2)$ eller $(3)$). Nu är $(1)(1) = (1)$, $(1)(2\ 3) = (2\ 3)$, $(2\ 3)(1) = (2\ 3)$ och $(2\ 3)(2\ 3) = (1)$ så att $H$ är en delgrupp.

(b)

$$\begin{aligned} &(1)H = (2\ 3)H = H, \\ &(1\ 2)H = (1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}, \\ &(1\ 3)H = (1\ 3\ 2)H = \{(1\ 3), (1\ 3\ 2)\}. \end{aligned}$$

(c)

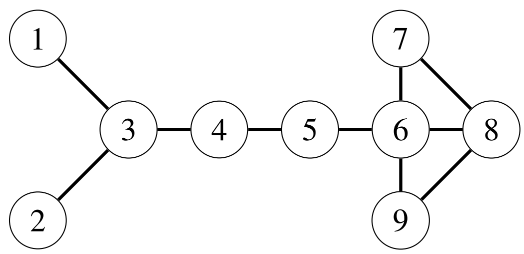
$$H(1) = H(2\ 3) = H,$$
$$H(1\ 2) = H(1\ 3\ 2) = \{(1\ 2), (1\ 3\ 2)\},$$
$$H(1\ 3) = H(1\ 2\ 3) = \{(1\ 3), (1\ 2\ 3)\}.$$

Således ser vi att i dethär fallet är de vänstra och högra sidoklasserna olika.

(d) Eftersom $(1\ 2)(1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ och $(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2) = (1)$ så kan vi välja $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $c = (1\ 3)$ och $d = (1\ 2\ 3)$ och slutsatsen följer från punkt (b).

---

**I3.** Bestäm gruppen $G$ som består av alla permutationer $f$ av noderna i grafen $X$




så att att finns det en båge mellan $f(a)$ och $f(b)$ om det finns en båge mellan $a$ och $b$.

Bestäm också cykelindexet $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta_{g,X}$ där $\zeta_{g,X}(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{j_1}\cdot t_2^{j_2}\cdot\ldots\cdot t_n^{j_n}$ där $j_k$ är antalet banor med längden $k$ när den cykliska gruppen genererad av $g$ verkar på $X$.
*Ledning: Använd det faktum att i fall som detta måste en nod $a$ avbildas på en nod $f(a)$ som har lika många grannar som $a$.*

*Lösning:* Eftersom nod 6 har 4 grannar och är den enda noden med så många grannar måste $f(6) = 6$ för varje $f \in G$. Detta innebär att alla grannar till 6 måste avbildas på grannar till 6, isynnerhet kan nod 8 som har tre grannar endast avbildas på nod 8. Detta betyder i sin ur att att 3 bara kan avbildas på 3 eftersom det är den enda lediga noden med 3 grannar. Eftersom 4 är en granne till 3 och till en granne till en granne till 6 och 3 och 6 förblir på sina platser måste $f(4) = 4$ och också $f(5) = 5$ enligt samma slags resonemang.

Vi kan alltså konstatera att för varje $f \in G$ gäller $f(j) = j$ då $j \in \{3,4,5,6,8\}$. Däremot kan $f(1) = 2$ och $f(2) = 1$ och/eller $f(7) = f(9)$ och $f(9) = f(7)$. I cykelnotation, där cyklar med längden 1 lämnats bort är

$$G = \{(1),\ (1\ 2),\ (7\ 9),\ (1\ 2)(7\ 9)\}.$$

När vi räknar banornas antal får vi följande resultat:

$(1)$: 9 banor med 1 element.
$(1\ 2)$: 1 bana med 2 element, 7 banor med 1 element.
$(7\ 9)$: 1 bana med 2 element, 7 banor med 1 element.
$(1\ 2)(7\ 9)$: 2 banor med 2 element och 5 banor med 1 element.

Cykelindexet blir därför

$$\zeta_{G,X}(t_1,t_2) = \frac{1}{4}\Big(t_1^9 + 2t_1^2t_2^7 + t_1^5t_2^2\Big).$$

---

**I4.** Låt $X$ be a vara ett bräde med $3 \times 2$ kvadrater, sidorna parallella med koordinataxlarna och mittpunkten i origo. Som symmetriavbildningar har rotationer runt mittpunkten med vinkeln $0$ eller $\pi$ och reflektioner i $x$-axeln och $y$-axeln. Om vi numrerar kvadraterna med $1, 2, 3, 4, 5, 6$ i positiv rikning så motsvarar dessa avbildningar permutationerna $(1)$, $(1\ \ 4)(2\ \ 5)(3\ \ 6)$, $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$ och $(1\ 3)(4\ 6)$. Dehär permutationerna bildar en grupp $G$ (men detta behöver du inte kontrollera). Bestäm cykelindexet $\zeta_{G,X}$ och använd det för att bestämma på hur många sätt brädets kvadrater kan "färgas" med 3 "färger".

Svar: 216

*Lösning:* Det finns $4$ element i gruppen och vi måste bestämma anatalet banor med olika längder för varje element i gruppen.

Eftersom varje element är givet med cykelnotation så får vi följande resultat:

$$\begin{aligned} (1):&\quad \text{6 banor med 1 element.}\\ (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6):&\quad \text{3 banor med 2 element.}\\ (1\ 6)(2\ 5)(3\ 4):&\quad \text{3 banor med 2 element.}\\ (1\ 3)(4\ 6):&\quad \text{2 banor med 2 element och 2 banor med 1 element.}\end{aligned}$$

Cykelindexet blir därför

$$\zeta_{G,X}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = \frac{1}{4}\left(t_1^6 + t_2^3 + t_2^3 + t_1^2 t_2^2\right).$$

Om vi använder $3$ färger så får vi

$$\zeta_{G,X}(3, 3, 3, 3, 3, 3) = \frac{1}{4}\left(3^6 + 2 \cdot 3^3 + 3^4\right) = 216$$

olika färgningar.

---

**I5.** Hur många olika sorts halsband kan man göra av $4$ vita och $3$ svarta pärlor. När du bestämmer vilka halsband som är lika och vilka som är olika så skall du beakta både rotationer och reflektioner, dvs., symmetrigruppen är den dihedrala gruppen. Kom ihåg att cykelindexet för den dihedrala gruppen $D_n$ av rotationer och reflektioner av ett regelbundet polygon med $n$ hörn är

$$\zeta_{D_n,\mathbb{N}_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{2n}\sum_{d\,|\,n}\varphi(d)t_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{4}t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1}, & \text{ifall } n \text{ är jämn,}\\ \frac{1}{2}t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ifall } n \text{ är udda,}\end{cases}$$

där $\varphi(d)$ är antalet heltal $j$ mellan $0$ och $d-1$ så att $[j]_d$ har en invers i $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dvs. sgd $(j, d) = 1$.

Svar: 4

*Lösning:* Om vi har $4$ vita och $3$ svarta pärlor så har vi sammanlagt $7$ pärlor och halsband som hör till samma bana under verkan av dihedrala gruppen $D_7$ kan anses vara lika. Nu är $7$ ett primtal så att de enda positiva heltal som delar det är $1$ and $7$. Nu är också $\varphi(1) = 1$ och $\varphi(7) = 6$. Därför är cykelindexet av denhär gruppens verkan på en 7-hörning

$$\frac{1}{14}\left(t_1^7 + 6 \cdot t_7\right) + \frac{1}{2}t_1 t_2^3.$$

Nu får vi den genererande funktionen för färgningen med vita och svarta pärlor genom att ersätta $t_j$ med $v^j + s^j$. Vi får följande uttryck:

$$\frac{1}{14}\left((v+s)^7 + 6(v^7 + s^7)\right) + \frac{1}{2}(v+s)(v^2+s^2)^3.$$

I dethär uttrycket skall vi bestämma koefficienten för $v^4 s^3$ och den visar sig vara

$$\frac{1}{14}\binom{7}{4} + \frac{1}{2}\binom{3}{2} = 4.$$