MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik
Exempel, del I

G. Gripenberg

Aalto-universitetet

2 oktober 2013

Mängder, implikationer

Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 3, 4\}$ *och* $C = \{x : x \text{ är ett heltal } \geq 2\}$. *Vilka av följande påståenden är sanna?*

(a) $x \in A \cap C \to x \in B$ *för alla* x?

(b) $A \subset B \to C \subset A$?

(c) *Det finns ett* $y \in C$ *så att* $y \in B \to y \notin A \cup B$?

(d) $y \notin B \to y \notin A$ *för alla* $y \in C$?

Lösning: (a) Eftersom $A \cap C = \{2, 3, 4\}$ *så gäller* $2 \in A \cap C$ *men eftersom* $2 \notin B$ *så gäller inte detta påstående (som är ett sätt att säga* $A \cap C \subset B$*).*
(b) Eftersom $2 \in A$ *men* $2 \notin B$ *så gäller inte* $A \subset B$ *och därför är* $A \subset B \to C \subset A$ *sant.*
(c) Detta påstående är också sant eftersom tex. $2 \in C$, *men* $2 \notin B$ *vilket betyder att* $2 \in B$ *inte är sant och därför gäller* $2 \in B \to 2 \notin A \cup B$.
(d) Detta är inte sant för tex. $2 \in C$ *och* $2 \notin B$ *men* $2 \in A$ *så att* $2 \notin A$ *är inte sant.*

Slutledningsregler och bevis

Antag att p *och* q *är två satser. Vi skall nu bevisa att* q *är sant om vi antar att* p & $!p$ *är sant, vilket alltså visar att om man antar en motsägelse kan man bevisa vad som helst. Det finns många slutledningsregler men här skall vi bara använda följande:*

(a) $\begin{array}{l} x \mid y \\ \underline{!x \quad} \\ \therefore y \end{array}$

(b) $\begin{array}{l} \underline{x \,\&\, y} \\ x \end{array}$

(c) $\begin{array}{l} \underline{x \quad} \\ x \mid y \end{array}$

Det som gör att tex. (a) är en slutledningsregel är att satsen

$$(x \mid y) \,\&\, !y \to x$$

är en tautologi, dvs. sann för alla sanningsvärden för x *och* y *(vilket kan kontrolleras åtminstone så att man går genom alla möjligheter).*

Slutledningsregler och bevis, forts.

Beviset ser nu ut på följande sätt:

(1) p & $!p$: *Antagande*

(2) p: *(b) tillämpat på (1) med* $x = p$ *och* $y = !p$

(3) $p \mid q$: *(c) tillämpat på (2) med* $x = p$ *och* $y = q$

(4) $!p$: *(b) tillämpat på (1) med* $x = !p$ *och* $y = p$

(5) q: *(a) tillämpat på (3) och (4) med* $x = p$ *och* $y = q$.

Observera att vi i punkt (4) också använde det faktum att x & $y = y$ & x.*)*

Induktion

Visa med hjälp av induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 1.$$

Lösning: Påståendet $P(n)$ *är alltså* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ *och* $n_0 = 1$. *Då är påståendet* $P(1)$ *samma som att* $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ *vilket är sant. Antag nu att* $P(k)$ *är sant och* $k \geq 1$. *Eftersom* $P(k)$ *är sant gäller* $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ *vilket innebär att*

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)((k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2},$$

vilket i sin tur innebär att $P(k+1)$ *är sant. Enligt induktionsprincipen följer nu påståendet. (Ofta, men kanske inte här, lönar det sig att formulera det man skall visa som att ett uttryck skall vara* 0*.)*

Hur många delmängder av en mängd med n finns det?

Det finns många sätt att besvara denna fråga och ett sätt är följande: Observera (eller anta) först att antalet delmängder bara beror på hur många element det finns i mängden (Detta är en följd av att om vi har en bijektion mellan två mängder så blir den också en bijektion mellan mängden av delmängder).
Låt $S(m)$ *vara antalet delmängder av en mängd* A *med* m *element. Låt* y *vara ett element som inte hör till mängden* A. *Då är varje delmängd* B *av mängden* $A \cup \{y\}$ *antingen sådan att* $y \in B$ *eller* $y \notin B$ *(men förstås inte båda). I det första fallet är* $B = C \cup \{y\}$ *och i det senare fallet* $B = C$ *där* C *är en delmängd av* A. *eftersom vi kan välja* C *på* $S(m)$ *olika sätt finns det* $2 \cdot S(m)$ *sätt att välja en delmängd* B *av* $A \cup \{y\}$ *så vi kan dra slutsatsen att* $S(m+1) = 2 \cdot S(m)$. *Eftersom* $S(0) = 1$ *(den tomma mängden är den enda delmängden av den tomma mängden) så kan vi dra (med induktion om vi vill ha ett bevis) slutsatsen att* $S(m) = 2^m$.
Andra sätt att räkna detta kan nog vara enklare!

Hur många funktioner från X till Y finns det då $|X| = m$ och $|Y| = n$?

För varje element x *i* X *finns det* n *olika möjligheter att välja* $f(x)$ *och därför blir antalet funktioner* n^m.
Ett annat sätt att uttrycka samma sak är att konstatera att funktionen kan skrivas some en lista $[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)]$. *Mängden av alla dessa listor är* $\underbrace{Y \times Y \times \ldots \times Y}_{m} = Y^m$ *vilket dels ger antalet funktioner enligt produktregeln och dels motiverar betckningen* Y^X *för mängden av funktioner från* X *till* Y.
Observera också att en delmängd B *av en mängd* A *kan uttryckas med en funktion* $f; A \to \{0,1\}$ *så att* $B = \{\, x \in A : f(x) = 1 \,\}$. *Detta ger ett enkelt sätt att visa att antalet delmängder av* A *är* $2^{|A|}$.

Ett ordningsproblem

18 *personer har delats in i tre lika stora grupper. Alla av dessa skall nu i tur och ordning utföra ett uppdrag (tex. lösa en uppgift i diskret matematik) och villkoret är att vid varje tidpunkt skall skillnaderna mellan antalen personer i varje grupp som redan utfört uppdraget till sina absolutbelopp vara högst* 1. *På hur många sätt kan ordningsföljden då väljas (när gruppindelning är given)?*
Ett annat sätt att formulera problemet är att man bildar 6 *grupper, som alla innehåller exakt en medlem från var och en av de ursprungliga grupperna, och sedan sätter man dessa mindre grupper och medlemmarna i dem i ordningsföljd. Eller så att medlemmarna i de ursprunliga grupperna sätts i ordningsföljd och personerna med samma ordningsnummer bildar en grupp som sedan i sin tur ordnas.*
Medlemmarna i de tre ursprungliga grupperna kan ordnas på $6! \cdot 6! \cdot 6!$ *olika sätt och med hjälp av dessa ordningar utses medlemmar till de mindre grupperna som i sin tur kan ordnas var och en på* 31 *olika sätt så att det sammanlagd antalet alternativ blir*

$$6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot (3!)^6 = 17414258688000.$$

Ett exempel i kombinatorik

(a) *Fyra kort ur en normal kortlek med 52 kort placeras i en rad. På hur många sätt kan detta göras om alla kort i raden skall ha samma färg?*

(b) *Fyra kort ur en normal kortlek med 52 kort placeras i en rad. På hur många sätt kan detta göras om raden skall innehålla exakt en knekt?*

(a) Färgen kan väljas på 4 *olika sätt och sedan skall man göra ett ordnat val av* 4 *kort bland* 13 *och detta kan göras på* $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$ *olika sätt så antalet alternativ blir sammanlagt*

$$4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 68640.$$

(b) Det finns 4 *olika knektar att välja på och den kan placeras på* 4 *olika ställen, så sammanlagt ger detta* 16 *olika alternativ. Sedan skall man göra ett ordnat val av de* 3 *återstående* 48 *korten och detta kan göras på* $48 \cdot 47 \cdot 46$ *olka sätt så det sammanlagda antalet alternativ blir*

$$4 \cdot 4 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 1660416.$$

På hur många sätt kan man placera m identiska bollar i n identiska lådor?

Låt $A(m,n)$ *vara detta antal. Eftersom vi kan placera* $m \geq 0$ *bollar i* 1 *låda på bara ett sätt så har vi* $A(m,1) = 1$ *då* $m \geq 0$*. Om* $m = 0$ *förblir alla lådot tomma och det ger bara ett alternativ, dvs.* $A(0,n) = 1$ *för alla* $n \geq 1$*.*

Antag nu att $m \geq 1$ *och* $n \geq 2$*. Låt* k *vara antalet bollar i den låda (eller de lådor) som innehåller minst bollar. Olika värden på* k *ger upphov till olika fördelningar på bollarna i lådorna. Fördelningen av bollarna i lådorna kan nu göras så att vi först sätter* k *bollar i varje låda och sedan sätter de återstående* $m - n \cdot k$ *bollarna i de* $n-1$ *lådor som kan innehålla flera än* k *bollar. Detta kan göras på* $A(m - n \cdot k, n-1)$ *olika sätt. Eftersom vi måste ha* $m - n \cdot k \geq 0$*, dvs.* $k \leq \frac{m}{n}$*, så får vi*

$$A(m,n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} A(m - n \cdot k, n-1).$$