Harjoitus 8 Lien algebrat ja monistot K2006

(8.1.) $Sp(1) = \{ u \in \mathbb{H} \mid |u| = 1 \}$

$sp(1) = \text{span}\{ i, j, k \}$

Määritellään kuvauksia

$$d: Sp(1) \longrightarrow Sp(1) \times Sp(1) \quad = \text{"diagonaalikuvaus"}$$
$$a \longmapsto (a, a)$$

$$F: Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow SO(4) = SO(4)\text{:n peitekuvaus.}$$
$$(g_1, g_2) \longmapsto \{ \underset{\cong \mathbb{H}}{v \in \mathbb{R}^4} \longmapsto g_1 v \bar{g}_2 \} \quad (s\,8.26)$$

Huom: $g \in Sp(1): \bar{g} = g^{-1}$

Näytetään, että F on hyvin määritelty:

Jos $g_1, g_2 \in Sp(1)$, $X \in \mathbb{R}^4$ niin

$$\langle X \cdot F_{(g_1, g_2)}, X \cdot \underbrace{F_{(g_1, g_2)}}_{\text{Kuvauksen } F(g_1, g_2) \text{ esitys matriisina}} \rangle$$

$$= \langle g_1 X \bar{g}_2, \overline{g_1 X \bar{g}_2} \rangle$$

$$= \langle g_1 \cdot \underbrace{X \cdot \underbrace{\bar{g}_2 \cdot g_2}_{=1} \cdot \bar{X}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \bar{g}_1 \rangle = \langle X, X \rangle \quad \text{eli } F_{g_1 g_2} \in O(4)$$

$Sp(1)$ polkuyht $\Rightarrow$ $Sp(1) \times Sp(1)$ polkuyhtenäinen

F jva $\Rightarrow$ $F(Sp(1) \times Sp(1))$ polkuyht.

$I \in F(Sp(1) \times Sp(1)) \Rightarrow F(Sp(1) \times Sp(1)) \subseteq SO(4)$. $\square$

Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} Sp(1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "Ad"'] & Sp(1) \times Sp(1) \arrow[d, "F"] \\ SO(3) \arrow[r, "L"] & SO(4) \end{tikzcd}$$

Aseta: $$L: SO(3) \longrightarrow SO(4)$$
$$A \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

Näytetään, että kaavio kommutoi.

Olkoon $S: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$ lin. isomorfismi
$$S(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 + X_2 i + X_3 j + X_4 k$$

Jos $a \in Sp(1)$ niin $F \circ d(a) = v \overset{\in \mathbb{R}^4}{\longmapsto} a v a^{-1} \in SO(4)$

$\underset{\text{tarkasti}}{=} v \longmapsto S^{-1}(a \cdot S(v) \cdot a^{-1})$

Olkoon $F_a \in SO(4)$ matriisi joka esittää kuvausta $F \circ d(a)$, eli
$$X \cdot F_a = S^{-1}(a \cdot S(X) \cdot a^{-1}) \qquad X \in \mathbb{R}^4$$

Jos $a \in Sp(1)$ niin $Ad_a : \underset{}{\overset{= \operatorname{span}\{i,j,k\}}{sp(1)}} \longrightarrow sp(1)$
$$v \longmapsto a v a^{-1}$$

Olkoon $A_a \in SO(3)$ matriisi joka esittää kuvausta Ad_a, eli:
$$\xi \cdot A_a \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = Ad_a\Big(\underbrace{\xi \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{span}\{i,j,k\}}\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

Olkoon $X = (\alpha, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$

$$S(X \cdot L(A_a)) = S\left((\alpha, \xi)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & A_a \end{array}\right)\right)$$
$$= S(\alpha, \xi \cdot A_a)$$
$$= \alpha + \xi \cdot A_a \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \alpha + Ad_a\Big(\overbrace{\xi \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}}^{S(0,\xi)}\Big)$$

$\boxed{\text{tehtävän ydin } a \cdot \alpha a^{-1} = \alpha!}$

$$= a(\alpha + S(0, \xi)) a^{-1} = a \cdot S(X) \cdot a^{-1} = S(X \cdot F_a).$$

$$L(A_a) = F_a$$

$\square$

(8.2) Tarkastellaan kuvausta (kts. s 8.26)

$$F: Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow SO(4)$$
$$(g,h) \longmapsto \{ v \longmapsto g v h^{-1} \} \; v \in \mathbb{R}^4$$

Huom: $F(g,h)$ on 4×4 matriisi s.e

$$X \cdot F(g,h) = S^{-1}\left(g \cdot S(X) \cdot h^{-1}\right), \; X \in \mathbb{R}^4$$

tässä $S: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{H}$ on lin. isom. kuten T 8.1.

F on homomorfismi: Olk. $g,h,a,b \in Sp(1)$

$$F((g,h),(a,b)) = F(ga, hb)$$
$$= \{ X \longmapsto \underbrace{S^{-1}(g \underbrace{a \cdot S(X) \cdot b^{-1}}_{= S(X \cdot F(a,b))} h^{-1})}_{= X \cdot F(a,b) \cdot F(g,h)} \} \; X \in \mathbb{R}^4$$

$$= \{ X \longmapsto \underbrace{X \cdot F(a,b) \cdot F(g,h)}_{R_{F(g,h)} \circ R_{F(a,b)}(X)} \} = F(g,h) \cdot F(a,b)$$

$A \in M_n(\mathbb{R}) = R_A$

Lemma:
Olkoon G,H matriisiryhmiä, $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ vastaavat Lien algebrat. Tällöin $G\times H$:n Lien algebra on $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$.

Tod. $\boxed{\subseteq}$ Olkoon $v \in T_I(G\times H)$. $v = \alpha'(0)$ jollain
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2): (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G\times H$
$\alpha(0) = (I_G, I_H)$.

Sitten $\alpha_1'(0) \in \mathfrak{g}$, $\alpha_2'(0) \in \mathfrak{h}$

$\Rightarrow v = \alpha'(0) = (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$.

$\boxed{\supseteq}$ $v \in \mathfrak{g}$, $w \in \mathfrak{h}$ $\quad v = \alpha'(0) \quad \alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to G, \; \alpha(0) = I_G$
$w = \beta'(0) \quad \beta: (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow H, \; \beta(0) = I_H$

$\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to G\times H$, $\gamma = (\alpha,\beta) \rightsquigarrow (v,w) = \gamma'(0) \in T_I(G\times H)$ $\square$

F on sileä (kts. T. 6.1)

L8.1.4: $df_{(I,I)} : sp(1) \times sp(1) \longrightarrow so(4)$ Lien alg. homomorfismi

Asetetaan:

$$e_i = (df)(i,0) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right)$$ (kts. seuraava sivu)

$$e_j = (df)(j,0) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right)$$

$$e_k = (df)(k,0) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

$$f_i = df(0,i) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad f_j = df(0,j) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right)$$

$$f_k = df(0,k) = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right)$$

$H_1 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3\} \qquad H_2 = \text{span}\{f_1, f_2, f_3\} \subset so(4)$

Selvä: $\dim H_1 = \dim H_2 = 3$

Lisäksi $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (suora lasku...)

$\Rightarrow \underline{so(4) = H_1 \oplus H_2}$

df algebrahomomorfismi $\Rightarrow$ $[f_i, f_j] = 2 f_k$, etc..
$[e_i, e_j] = 2 e_k$, etc...
$\Rightarrow [H_i, H_i] \subseteq H_i \quad i = 1,2$
$[e_i, f_j] = 0$
$\Rightarrow [H_1, H_2] = 0$

eli: Jos $A \in H_1$, $B \in so(4)$ niin $B = B_1 + B_2$, $B_i \in H_i$

$$[A, B] = \underbrace{[A, \underbrace{B_1}_{\in H_1}]}_{\in H_1} + \underbrace{[A, \underbrace{B_2}_{\in H_2}]}_{=0} \in H_1$$

Vastaavasti kun $A \in H_2$ $\rightsquigarrow$ H_1, H_2 ideaaleja.

```
In[66]:= M[a_, b_, c_, x_, y_, z_] :=
          {
           {0, -a - x, -b - y, -c - z},
           {a + x, 0, -c + z, b - y},
           {b + y, c - z, 0, -a + x},
           {c + z, -b + y, a - x, 0}
          }
```

```
In[65]:= M[a, b, c, x, y, z] // MatrixForm
```

Out[65]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -a-x & -b-y & -c-z \\ a+x & 0 & -c+z & b-y \\ b+y & c-z & 0 & -a+x \\ c+z & -b+y & a-x & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[5]:= E1 = M[1, 0, 0, 0, 0, 0];
        E2 = M[0, 1, 0, 0, 0, 0];
        E3 = M[0, 0, 1, 0, 0, 0];
        E4 = M[0, 0, 0, 1, 0, 0];
        E5 = M[0, 0, 0, 0, 1, 0];
        E6 = M[0, 0, 0, 0, 0, 1];
```

```
In[35]:= E1 // MatrixForm
         E2 // MatrixForm
         E3 // MatrixForm
```

Out[35]//MatrixForm=

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[36]//MatrixForm=

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[37]//MatrixForm=

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[47]:= Norm[E1. E2 - E2. E1 - 2 E3]
         Norm[E1. E3 - E3. E1 + 2 E2]
         Norm[E2. E3 - E3. E2 - 2 E1]
```

Out[47]= 0

Out[48]= 0

Out[49]= 0

```
In[50]:= E4 // MatrixForm
         E5 // MatrixForm
         E6 // MatrixForm
```

Out[50]//MatrixForm=

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[51]//MatrixForm=

$$E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[52]//MatrixForm=

$$E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[62]:= Norm[E4. E5 - E5. E4 + 2 E6]
         Norm[E4. E6 - E6. E4 - 2 E5]
         Norm[E5. E6 - E6. E5 + 2 E4]
```

Out[62]= 0

Out[63]= 0

Out[64]= 0

<u>1-käsitteisyys:</u>

Olkoon $\mathfrak{so}(4) = H_1 \oplus H_2 = \tilde{H}_1 \oplus \tilde{H}_2$

$e_i \in \mathfrak{so}(4) \Rightarrow e_i \in \tilde{H}_1$ (tarvittaessa vaihda $\tilde{H}_1 \sim \tilde{H}_2$)

$\tilde{H}_1$ ideaali $\Rightarrow \underbrace{[e_i, e_j]}_{= \pm 2 e_k} \in \tilde{H}_1$, $\underbrace{[e_i, e_k]}_{= \pm 2 e_j} \in \tilde{H}_1$

$\dim \tilde{H}_1 \Rightarrow 3 \Rightarrow \tilde{H}_1 = \operatorname{span}\{e_i, e_j, e_k\} = H_1$ $\square$

Vastaavasti $H_2 = \tilde{H}_2$.

(8.3) Olkoon olemassa sileä isomorfismi

$$\Psi: Sp(1) \times SO(3) \longrightarrow SO(4)$$

Lause 8.6 $\Rightarrow$ löytyy Lien algebraisomorfismi

$$d\Psi: \mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{so}(4)$$

Huom: Jos $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ ovat Lien algebroja niin Lien hakatulo $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$:issa on

$$[(a,b),(x,y)] = (a,b)\cdot(x,y) - (x,y)(a,b)$$
$$= ([a,x],[b,y])$$

$\Rightarrow \{0\} \times \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sp}(1) \times \{0\}$ ovat ideaaleja $\mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{so}(3)$:ssa.

Lemma Lien algebraisomorfismi kuvaa ideaalit ideaaleiksi.

Tod. Olk. $\Phi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ isomorfismi ja $\mathfrak{f}$ ideaali $\mathfrak{g}$:issä.

Jos $X \in \Phi(\mathfrak{f})$, $Y \in \mathfrak{h}$, niin

$$[X,Y] = [\Phi\Phi^{-1}(X), \Phi\Phi^{-1}(Y)]$$
$$= \Phi \underbrace{[\underbrace{\Phi^{-1}(X)}_{\in \mathfrak{f}}, \underbrace{\Phi^{-1}(Y)}_{\in \mathfrak{g}}]}_{\in \mathfrak{f} \text{ sillä } \mathfrak{f} \text{ ideaali}} \in \Phi(\mathfrak{f}) \qquad \square$$

$\underbrace{d\Psi(\{0\} \times \mathfrak{so}(3))}_{=V_1}$, $\underbrace{d\Psi(\mathfrak{sp}(1) \times \{0\})}_{=V_2}$ ideaaleja $\mathfrak{so}(4)$:ssa

Lisäksi: $\mathfrak{so}(4) = V_1 \oplus V_2$

Tod. (summa on suora)

1° Olkoon $a \in \mathfrak{so}(4)$, $a \in V_1 \cap V_2$

$a = d\Psi(x,y)$ ($d\Psi$ bijektio)

$a \in V_1 \cap V_2$ ja $d\Psi$ injektio $\Rightarrow$ $x = y = 0$

$\Rightarrow$ $a = 0$ ($d\Psi$ lineaarinen)

2° Olkoon $a \in \mathfrak{so}(4)$. $d\Psi$ lineaarinen:

$$a = d\Psi(x,y) = d\Psi((x,0)+(0,y))$$

$$= \underbrace{d\Psi(x,0)}_{\in V_2} + \underbrace{d\Psi(0,y)}_{\in V_1} \qquad \square$$

$\dim V_1 = \dim V_2 = 3$ ja tehtävä 8.2

Oletetaan, että $V_1 = d\Psi(\{0\} \times \mathfrak{so}(3))$ (tapaus $V_2 = d\Psi(0 \times \mathfrak{so}(3))$ on täysin analoginen)

$$V_1 = d\Psi(0 \times \mathfrak{so}(3)) = \operatorname{span}\{E_1, E_2, E_3\} \quad \text{(kts. ed. tehtävää)}$$
$$= \operatorname{span}\{dF(i,0), dF(j,0), dF(k,0)\}$$
$$= dF \operatorname{span}\{(i,0),(j,0),(k,0)\} = dF(\mathfrak{sp}(1) \times \{0\})$$

<u>Lien vastaavuuslause:</u> Olkoon $H \subset SO(4)$ aliryhmä joka virittyy alkioista

$$\Lambda = \{\exp X \mid X \in V_1\}$$

Tällöin

$$\Lambda = \{e^{d\Psi(0,A)} \mid A \in \mathfrak{so}(3)\}$$
$$= \Psi\{e^{(0,A)} \mid A \in \mathfrak{so}(3)\}$$
$$= \Psi(\{1\} \times SO(3)) \quad \text{(exp surjektio L9.4.2)}$$

eli Λ on ryhmä $\Rightarrow \Lambda = H$. Toisaalta

$$\Lambda = \{e^{dF(A,0)} \mid A \in \mathfrak{sp}(1)\}$$
$$= F\{e^{(A,0)} \mid A \in \mathfrak{sp}(1)\}$$
$$= F(Sp(1) \times \{1\})$$

$\operatorname{Ker} F = \{\pm(I, I)\} \Rightarrow F$ isomorfismi $Sp \times \{1\} \longrightarrow H$

eli

$$S^3 \simeq Sp(1) \simeq Sp(1) \times \{1\} \simeq H \underset{\uparrow \Psi}{\simeq} \{1\} \times SO(3) \simeq SO(3)$$

$$S^3 \not\simeq SO(3) \quad \square$$

8.4 Diffeomorfismi

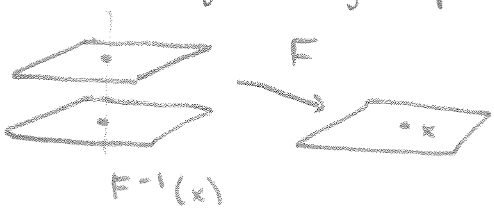
$$SO(4) \longrightarrow Sp(1) \times SO(3)$$

Tiedetään: 1° $F : Sp(1) \times Sp(1) \longrightarrow SO(4)$

- F on sileä surjektiivinen 2-1 kuvaus:

  $\forall A \in SO(4)$ $\quad F^{-1}(A) = \pm(x,y)$, $x,y \in Sp(1)$

- F on lokaali diffeo



2° $Ad : Sp(1) \longrightarrow SO(3)$

- Ad on sileä surjektiivinen 2-1 kuvaus.
- Ad on lokaali diffeo. $\quad \operatorname{Ker} Ad = \pm 1$

$$\begin{tikzcd}
Sp(1) \times Sp(1) \arrow[rr, "(I, Ad)"] \arrow[d, "F"'] & & Sp(1) \times SO(3) \\
SO(4) \arrow[urr, "\Phi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Määritellään $\Phi : SO(4) \longrightarrow Sp(1) \times SO(3)$ ehdosta

$$\Phi(F(a,b)) = (ab, Ad_b), \quad a,b \in Sp(1)$$

Φ surjektio: Olkoon $(u, R) \in Sp(1) \times SO(3)$.

$\operatorname{Ker} Ad = \pm 1$: $\exists\, v \in Sp(1)$ s.e. $Ad_{\pm v} = R$

Nyt $F(u, v) \in SO(4)$ ja

$$\Phi(F(uv^{-1}, v)) = (uv^{-1}v, Ad_v) = (u, R)$$

$\underline{\Phi \text{ injektio}}$ $A, B \in SO(4)$

F on surjektio: $\exists$ (x,y), $(a,b) \in Sp(1) \times Sp(1)$

s.e. $A = F((x,y))$ ja $B = F((a,b))$

Jos $\Phi(A) = \Phi(B)$ niin

$$\Phi(F(x,y)) = \Phi(F(a,b))$$

$$\Rightarrow (xy, Ad_y) = (ab, Ad_b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = ab \\ Ad_y = Ad_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm b \\ xy = ab \end{cases} \Rightarrow ab = xy = \pm x b \Rightarrow a = \pm x$$

$\Rightarrow$

$$A = F(x,y) = F(\pm(a,b)) = F(a,b) = B.$$

F ja Ad lokaaleja diffeomorfismeja

$\Rightarrow$ Φ lokaali diffeo

$\Rightarrow$ Φ diffeomorfismi

Φ bijektio $\square$

(8.5) Ol. G on $O(n)$, $U(n)$, tai $Sp(n)$:n suljettu aliryhmä

$\mathfrak{g}$ vastaava Lie algebra

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ alialgebra

$\mathfrak{h}^\perp = \{ A \in \mathfrak{g} \mid \langle X, A \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h} \}$

Huom. $\langle X, Y \rangle = \operatorname{trace}(X \cdot Y^*)$, $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$

$X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{h}^\perp \Rightarrow \langle X, Y \rangle = 0$

a) $X \in \mathfrak{h}$, $A \in \mathfrak{h}^\perp$ niin $[X, A] \in \mathfrak{h}^\perp$.

Jos $B \in \mathfrak{h}$ niin

$$\langle [X, A], B \rangle = - \langle \underbrace{[\overset{\in \mathfrak{h}}{X}, \overset{\in \mathfrak{h}}{B}]}_{\in \mathfrak{h}}, A \rangle \underset{A \in \mathfrak{h}^\perp}{=} 0$$

$\Rightarrow [X, A] \in \mathfrak{h}^\perp$

b) Olkoon $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{g}$:n ideaali. (eli $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ kun $X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$)

V. $\mathfrak{h}^\perp$ on $\mathfrak{g}$:n ideaali $\underbrace{(\text{eli } [X, Y] \in \mathfrak{h}^\perp \text{ kun } X \in \mathfrak{h}^\perp, Y \in \mathfrak{g})}_{= \text{(a)-kohta.}}$ $\square$