Lien ryhmät ja monistot　　　　Harjoitus 7.

**7.1** $G$ polkuyhtenäinen, $\mathfrak{g}$ vastaava Lien algebra.
$U$ = Id alkion ystö.

<u>Väite:</u>

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ g_1 \cdots g_k \mid g_i \in U \text{ tai } g_i^{-1} \in U \} \quad (*)$$

<u>Tod</u> Olkoon $B_r$ = $r$-säteinen $0$-keskinen avoin kuula $M_n(\mathbb{K})$:ssa.

<u>Lause 7.1.5:</u> $\exists r > 0$ s.e.

$$\exp : \underbrace{B_r \cap \mathfrak{g}}_{=: E \subset_o \mathfrak{g}} \longrightarrow \underbrace{\exp(B_r) \cap \mathfrak{g}}_{=: V \subset_o G} \quad \text{homeomorfismi.}$$

<u>Merk.</u> Jos $g \in G$, niin $V_g = g\,V$


<u>Huom:</u> $g \in G \Rightarrow g \in V_g \subset_o G$

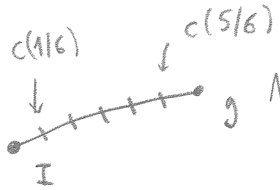
Jos $h \in V_g$ niin $h = g\,e^{\overbrace{A}^{\in V}}$, $A \in E$

Olkoon $g \in G$. Näytetään, että $g \in$ yhtälön $(*)$:n oikeaan puoleen.
$G$ polkuyhtenäinen: $\exists\; c : [0,1] \longrightarrow G$ $\quad c(0) = I,\; c(1) = g.$

Olkoon $N \geq 1$. Määritellään joukkoja $V_0, \ldots, V_{N-1}$:

$$V_k = V_{c(\frac{k}{N})} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$= c\left(\tfrac{k}{N}\right) V$$




$N = 6$

Väite: $\exists N \geq 1$ s.e.

$$c\,(k/N) \in U_{k-1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, N$$

Vastaoletus: $\forall N \geq 1 \quad \exists k \in \{1, \dots, N\}$ s.e.

$$c\left(\tfrac{k}{N}\right) \notin c\left(\tfrac{k-1}{N}\right) U$$

$$\left(c\left(\tfrac{k-1}{N}\right)\right)^{-1} \cdot c\left(\tfrac{k}{N}\right) \in U^{G}$$

Kirjoitetaan $k = k(N)$.

Koska $\frac{k(N)}{N} \in [0,1]$ sillä on suppeneva osajono

$$s \mapsto \frac{k(N_s)}{N_s}, \qquad N_1 < N_2 < N_3 < \cdots \qquad s = 1, 2, \cdots$$

Eli
$$c\left(\frac{k_{N_s} - 1}{N_s}\right)^{-1} \cdot c\left(\frac{k_{N_s}}{N_s}\right) \in \underset{\uparrow \text{ suljettu}}{U^{G}} \qquad \forall s = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to \infty} c\left(\frac{k_{N_s}}{N_s} - \frac{1}{N_s}\right)^{-1} \cdot c\left(\frac{k_{N_s}}{N_s}\right) \in U^{G}$$

$$\underset{c \text{ jvn}}{\Rightarrow} c(\alpha - 0)^{-1} \cdot c(\alpha) = I \in U^{G} \quad ⚡ \quad I \in U.$$

$$\alpha = \lim_{s \to \infty} \frac{k_{N_s}}{N_s} \in [0,1]$$

---

Olkoon $N \geq 1$ kuten yllä. Tällöin $k = N$ antaa

$$g = c\,(N/N) = \underbrace{c\left(\frac{N-1}{N}\right) e^{E_N}}_{\in U_{N-1}}, \quad E_N \in E$$

$$= c\left(\frac{N-2}{N}\right) e^{E_{N-1}} e^{E_N}, \quad E_{N-1} \in E$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{c\left(\frac{N-N}{N}\right)}_{= I} \underbrace{e^{E_1}}_{\in U} \cdot \dots \cdot \underbrace{e^{E_N}}_{\in U}, \quad E_i \in E$$


$\square$

L8.5.1

(7.2) Väite: $G$ polkuyhtenäinen

$H \subset G$ —"— aliryhmä

$\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ vastaavat Lien algebrat

$H$ on $G$ normaali aliryhmä $:\Leftrightarrow \left(h \in H,\ g \in G \Rightarrow ghg^{-1} \in H\right)$

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ on $\mathfrak{g}$:n ideaali

$\left([X,Y] \in \mathfrak{h} \quad \forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}\right)$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\mathfrak{h}$ on $\mathfrak{g}$:n ideaali

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^B} A}_{e^B A e^{-B}} \in \mathfrak{h} \quad \forall A \in \mathfrak{h},\ B \in \mathfrak{g}$$ (Luennot s. 8.18)

Olkoon $a \in H$, $b \in G$. V: $bab^{-1} \in H$

$$\overset{T7.1}{\Rightarrow} \quad a = e^{A_1} \cdot \ldots \cdot e^{A_k} \qquad A_i \in B_r \cap \mathfrak{h}$$

$$b = e^{B_1} \cdot \ldots \cdot e^{B_{\tilde{k}}} \qquad B_i \in \tilde{B}_{\tilde{r}} \cap \mathfrak{g}$$

$$bab^{-1} = b e^{A_1} b^{-1} \cdot \ldots \cdot b e^{A_k} b^{-1}$$

$$\overset{L6.3.7}{=} e^{bA_1b^{-1}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{e^{bA_kb^{-1}}}^{\in H}$$

$$= e^{\mathrm{Ad}_b A_1} \cdot \ldots \cdot e^{\mathrm{Ad}_b A_k} \in H$$

Sillä $\mathrm{Ad}_b A_r \in \mathfrak{h} \quad \forall r = 1, \ldots, k$

$$\mathrm{Ad}_b A_r = b A_r b^{-1}$$

$$= e^{B_1} \cdot \ldots \cdot e^{B_{\tilde{k}}} A_r e^{-B_{\tilde{k}}} \cdot \ldots \cdot e^{-B_1}$$

$$= \mathrm{Ad}_{e^{B_1}} \mathrm{Ad}_{e^{B_2}} \underbrace{\cdots \cdot \underbrace{\mathrm{Ad}_{e^{B_{\tilde{k}}}}(A_r)}_{\in \mathfrak{h}}}_{\in \mathfrak{h}} \in \mathfrak{h} \qquad \square$$

$$\mathrm{Ad}_{e^{B_i}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$$

(7.3) $$\mathrm{Ad} : U(2) \longrightarrow (u(2) \longrightarrow u(2))$$
$$g \longmapsto \mathrm{Ad}_g = \{ X \longmapsto gXg^{-1} \}$$

$$U(2) = \{ A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^\# = I \}$$
$$u(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A + A^\# = 0 \}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & A+i\gamma \\ -A+i\gamma & i\beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, A \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim u(2) = 4$. Valitaan ON kanta $E_1, \dots, E_4$ $u(2)$:lle.
Olkoon $A_g \in GL_4(\mathbb{R})$ kuvauksen $\mathrm{Ad}_g : u(2) \to u(2)$ esitys tässä kannassa kun $g \in U(2)$.

Seuraus 8.4.3 $\Rightarrow$ $A_g \in O(4)$

$$\Rightarrow \mathrm{Ad} : U(2) \longrightarrow O(4)$$
$$g \longmapsto A_g$$

Aiemmin
$$\varepsilon_2 : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$$
$$a_{ij} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, a_{ij} & \mathrm{Im}\, a_{ij} \\ -\mathrm{Im}\, a_{ij} & \mathrm{Re}\, a_{ij} \end{pmatrix}$$

Jos $X = \sum_i \xi_i E_i$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ niin
$$\mathrm{Ad}_g(X) = \sum_{i=1}^4 \xi_i \underbrace{\mathrm{Ad}_g(E_i)}_{= \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} E_j}$$
$$= \sum_{i,j=1}^4 \xi_i \alpha_{ij} E_j$$
$$= \underbrace{\underbrace{X^T}_{1\times 4} \cdot \underbrace{A_g}_{4\times 4}}_{2\times 2\ \mathbb{C}\ \text{matriisi}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_4 \end{pmatrix}}_{\substack{4\times 1\ \text{matriisi} \\ 2\times 2\ \text{lohkoista}}}$$

Voiko olla $\varepsilon_2|_{U_2} = \mathrm{Ad}$ ?

$g \in U_2$, $X \in u(2)$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_2(g) = A_g$;

$$\Rightarrow \left\| X^T \varepsilon_2(g) \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_4 \end{pmatrix} \right\| = \| \mathrm{Ad}_g(X) \| = \|X\|$$

Valitaan $g = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left\| X + s\,(0,0,\underbrace{X_3, X_4}_{\text{ol.} \neq 0}) \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_4 \end{pmatrix} \right\| = \underbrace{\|X\|}_{\text{ei riipu s:stä}}\ \text{↯}$$

$\square$

(7.4) $G, H$ polkuyht., $H \subset G$ aliryhmä

$\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ Lien algebrat,

V: $H$ on keskeinen $\iff$ $[X, Y] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$.

$H$ on $G$:ssä <u>keskeinen</u>: $\quad gh = hg \quad \forall g \in G, h \in H$

$\boxed{\Rightarrow}$ $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$

$$\underbrace{e^{tX}}_{\in G} \underbrace{e^{sY}}_{\in H} = e^{sY} e^{tX} \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow [X, Y] = 0$ Lause 8.1.2.

$\boxed{\Leftarrow}$ Olkoon $g \in G, h \in H$.

7.1 $\quad g = e^{A_1} \cdot \ldots \cdot e^{A_k} \qquad A_i \in \mathfrak{g}$

$\quad h = e^{B_1} \cdot \ldots \cdot e^{B_l} \qquad B_i \in \mathfrak{h}$.

$$gh = e^{A_1} \cdot \ldots \cdot e^{A_k} \cdot e^{B_1} \cdot \ldots \cdot e^{B_l}$$

$$\vdots$$

$$= e^{B_1} \ldots e^{B_l} e^{A_1} \ldots e^{A_k}$$

$$= hg \qquad \square$$

$[A_i, B_j] = 0 \; \forall i, j$

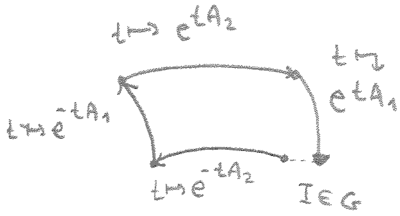
$\Rightarrow e^{A_i} e^{B_j} = e^{B_j} e^{A_i}$

7.5 $G$ matriisiryhmä

$\mathfrak{g}$ vastaava Lien algebra

$A_1, A_2 \in \mathfrak{g}$

$$\gamma(t) = e^{tA_1} e^{tA_2} e^{-tA_1} e^{-tA_2}$$




$$\gamma(0) = I$$

$$\gamma'(t) = A_1 e^{tA_1} e^{tA_2} e^{-tA_1} \cdot e^{-tA_2} + \cdots$$

$$= A_1 \gamma(t) - \gamma(t) A_2$$
$$+ e^{tA_1} e^{tA_2} (A_2 - A_1) e^{-tA_1} e^{-tA_2}$$

$$\gamma'(0) = 0$$

$$\gamma''(0) = 0 - 0 + (A_1 + A_2)(A_2 - A_1) + (A_2 - A_1)(-A_1 - A_2)$$
$$= 2(A_1 A_2 - A_2 A_1)$$
$$\underset{L\ 8.1.1}{=} 2[A_1, A_2]$$

Huom. Käyrä $t \mapsto \gamma(t)$ kertoo miten $A_1, A_2$ eivät kommutoi.

Jos $[A_1, A_2] = 0$, niin $\gamma(t) \equiv I$