7.2.1. <u>Lause</u> n-ulotteinen matriisiryhmä on n-monisto.

<u>Tod</u>: Ol. $G \subset GL_m(\mathbb{K})$ n-ulotteinen matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra. Val. $r > 0$ kuten L. 7.1.1. jolloin $V = \exp(B_r \cap \mathfrak{g})$ on I:n ymp. G:ssä ja rajoittumakuvaus $\exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to V$ on parametrisointi pisteessä I.

Huom. Eksplisiittisesti identifikaatio $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ valitsemalla $\mathfrak{g}$:lle kanta.

Ol. $g \in G$ m.v. määrit. $L_g : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ asettamalla $L_g(A) := g \cdot A$. Huom. $L_g|_G : G \to G$ diffeo

$L_g(V)$ g:n ymp. G:ssä ja $L_g \circ \exp : B_r \cap \mathfrak{g} \to L_g(V)$ parametrisointi g:n ympärissä. $\square$.

Aikaisemmin: Osajoukon $X \subset \mathbb{R}^m$ tangenttiavaruus pist. $p \in X$:

$$T_p X := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \text{ differentioituva ja } \gamma(0) = p\}$$

7.2.2. <u>Lause</u> Jos $X \subset \mathbb{R}^m$ n-monisto, niin $\forall p \in X$ $T_p X$ on $\mathbb{R}^m$:n n-ulotteinen v.a.a.

<u>Tod</u>: Määritellään ensin $T_p X$ toisin (ja os. yhtäp. edelliseen)

Olk. $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset X$ parametrisointi pisteessä p.

Ol. $0 \in U$ ja $\varphi(0) = p$. Asetet.

$$T_p X := d\varphi_0(\mathbb{R}^n).$$

Määritelmä mielekäs, sillä $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Selvästi $T_p\underline{X}$ n-ul. v.a.a. bijektiivisen lin. kuvauksen kuvajoukkona $\mathbb{R}^n$:stä.

Nyt $T_p\underline{X}$ sama kuin aiemmin määritelty, sillä

differentioituvat polut pisteen p kautta = φ:n välittämien

U:n differentioituvien pisteen 0 kautta tulevien polkujen kuva

$\gamma = \varphi \circ \alpha$, α differentioituva $(-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ $\alpha(0) = 0$.
$\gamma'(0) = d\varphi_0(\alpha'(0))$.

Huom. antaa erityisesti: $T_p\underline{X}$ hyvin määritelty eli riippumaton parametrisoinnista. □.

Määritelmä Ol. $f : \underline{X}_1 \to \underline{X}_2$ sileä funktio monistojen $\underline{X}_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ ja $\underline{X}_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ välillä. Jos $p \in \underline{X}_1$ ja $v \in T_p\underline{X}_1$, niin kuvauksen f derivaatta pisteessä p vektorin v suuntaan on

$$df_p(v) := (f \circ \gamma)'(0) \in T_{f(p)}\underline{X}_2,$$

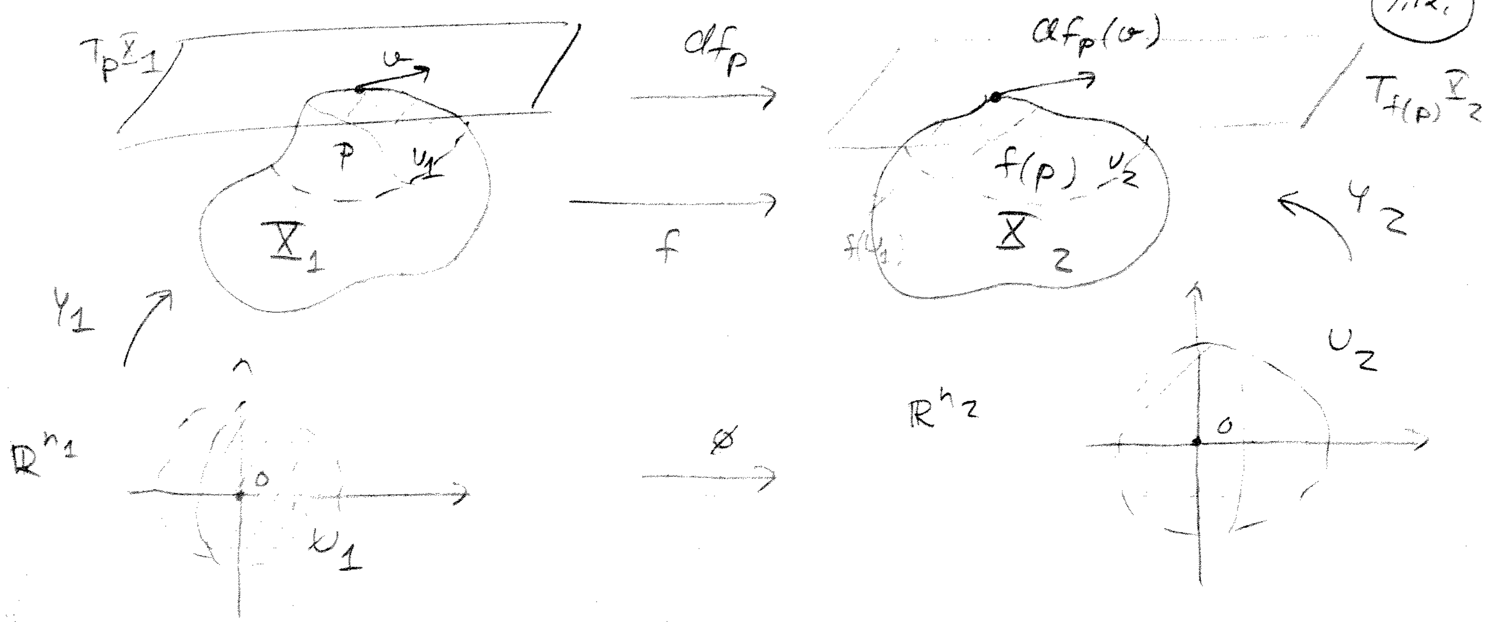
missä γ differentioituva polku $\underline{X}_1$:ssä s.e. $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$.

2.2.3. Lause Kuvaus $df_p : v \mapsto df_p(v) : T_p\underline{X}_1 \to T_{f(p)}\underline{X}_2$ hyvin määritelty lineaarinen kuvaus.

Tod: Os: df_p riippumaton polun γ valinnasta.

Ol. $\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1} \to V_1 \subset \underline{X}_1$ parametrisointi pist. p siten että
$\varphi_1(0) = p$ ja $\varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2} \to V_2 \subset \underline{X}_2$ —"— $f(p)$ "
$\varphi_2(0) = f(p)$

7.12.



f sileä $\Rightarrow$ $\phi := \psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 : \tilde{U}_1 \subset U_1 \to U_2$ on sileä

$\left(\tilde{U}_1 := \psi_1^{-1}\left(f^{-1}\left(f(\psi_1(U_1)) \cap \psi_2(U_2)\right)\right) \right)$

Aset. $df_p := d(\psi_2)_0 \circ d\phi_0 \circ \left(d(\psi_1)_0\right)^{-1} : T_p\overline{X}_1 \to T_{f(p)}\overline{X}_2$

Selvästi df_p lineaarinen on kuvausten yhdisteenä.

Huom. Tämä määritelmä yhtyy edelliseen kiinteillä parametrisoinnen ψ_1, ψ_2 valinnalla.

$\Rightarrow$ riittää df_p riippumaton polun γ valinnasta $\square$.

Saatiin myös: Todistuksessa esitetty df_p:n määritelmä riippumaton parametrisoinnin ψ_1, ψ_2 valinnasta.

Sopimus: Matriisiryhmät G_1, G_2 ekvivalentit jos $\exists$ ryhmäisomorfismi $f: G_1 \to G_2$, joka myös diffeomorfismi ts. G_1, G_2 samanaikaisesti ryhmä ja monisto samoja. Sanotaan: G_1, G_2 sileästi isomorfiset.

7.13.

<u>Huom</u> 1° Voidaan kuten Lie:n osoittaa, matriisiryhmien välinen jatkuva homomorfismi on sileä, joten tällöin jatkuvasti isomorfinen = sileästi isomorfinen.

2° Matriisiryhmien välinen isomorfismi voi olla epäjatkuva.

8. Lien hakasulo

Edellä: v.a $\mathfrak{g}$ approksimoi ryhmää G muutoksina.
Lien hakasulo " G:n ryhmäsummaa.

Ol. G matriisiryhmä ja $\mathfrak{g}$ sen Lien algebra.

$\forall g \in G$ konjugaatio $C_g : G \to G$.

$$C_g(a) := gag^{-1}$$

on sileä isomorfismi. Sen derivaattakuvaus

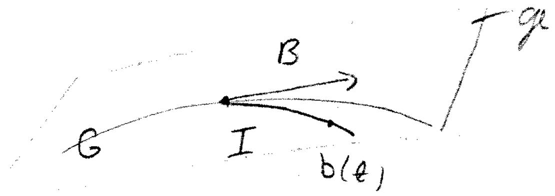
$$d(C_g)_I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$ v.a. isomorfismi adjungoitu kuvaus

$$Ad_g := d(C_g)_I .$$

Ad_g:in esitys: Olk. $B \in \mathfrak{g}$ $B = b'(0)$, b differentioituva polku G:ssä s.e. $b(0) = I$. Tulon derivoimissäännöstä $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Ad_g(B) = d(C_g)_I(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (C_g \circ b(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g\, b(t) g^{-1}) = gBg^{-1}$$



$$\Rightarrow \boxed{Ad_g(B) = gBg^{-1}}$$

Jos $\forall A \in G$ pätee: $Ag = gA$, niin $Ad_g = id_{\mathfrak{g}}$.

Ad_g mittaa g:n kommutoinnia G:n alkioiden kanssa, jotka lähellä 1-alkiota I. Erityisesti $Ad_g(B)$ mittaa g:n kommutointia G:n alkioiden kanssa, jotka B:n suunnassa lähellä 1-alkiota I.

(8.2.)

Määritelmä Vektoreiden A, B <u>Lien hakatulo</u> gillä on

$$[A,B] := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\alpha(t)} B, \quad \text{missä}$$

$\alpha : t \mapsto \alpha(t) \in G$ on differentioituva polku s.e. $\alpha(0) = I$

ja $\alpha'(0) = A$.

<u>Huom</u> $[A,B] \in \mathfrak{g}$ (Polun $t \mapsto \gamma(t) := Ad_{\alpha(t)} B \in \mathfrak{g}$ alkuunpeus)

$[A,B]$ mittaa A:n suunnassa I:n lähellä olevien G:n alkioiden kommutointia B:n suunnassa I:n lähellä olevien G:n alkioiden kanssa. $[A,B]$ riippumaton polun α valinnasta!

8.1.1. <u>Lause</u> $\forall A, B \in \mathfrak{g}$ pätee $[A,B] = AB - BA$.

<u>Tod</u>: Ol. a, b G:n differentioituvia polkuja s.e. $a(0) = I = b(0)$ ja $a'(0) = A$, $b'(0) = B$. Tulon derivoimissääntö:

$$[A,B] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{a(t)} B = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} a(t) B a(t)^{-1}$$

$$= a'(0) B a(0)^{-1} + a(0) B \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} a(t)^{-1}}_{= -a'(0)} = AB - BA. \square.$$

<u>Huom</u> $[A,B] = 0 \iff AB = BA$

Lien algebran alkioiden kommutointi heijastuu A:n ja B:n suunnassa olevien G:n alkioiden kommutointia

8.1.2. **Lause** Ol. $A, B \in \mathfrak{g}$.

(1) Jos $[A,B]=0$, niin $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$

(2) Jos $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$ $\forall\, t,s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, niin $[A,B]=0$.

Tod: (1): $AB = BA \Rightarrow e^{tA}e^{sB} = e^{tA+sB} = e^{sB}e^{tA}$.

(2): olk. $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$:

$$Ad_{(e^{tA})}B = e^{tA}Be^{-tA} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (e^{tA}e^{sB}e^{-tA})$$

$$\stackrel{ol}{=} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{sB} = B.$$

$a(t) = e^{tA}$ $\quad a(0) = I$ $\quad a'(0) = A$

$$[A,B] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{a(t)}B = 0$$

8.1.3. **Lause** $\forall\, A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in \mathfrak{g}$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ pätee:

(1) $[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, B] = \lambda_1 [A_1, B] + \lambda_2 [A_2, B]$.

(2) $[A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2] = \lambda_1 [A, B_1] + \lambda_2 [A, B_2]$.

(3) $[A,B] = -[B,A]$.

(4) Jacobin identiteetti $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0$.

Tod: Lause 8.1

Huom Koska G:n ryhmätoiminto määrää Lien hakasulkeen g:ssä, niin on odotettavissa, että sileästi isomorfisilla ryhmillä olisi "isomorfiset" Lien algebrat. Määritellään tämä täsmällisesti.

<u>Määritelmä</u> Ol. g_1, g_2 Lien algebroja. Lineaarinen kuvaus $f: g_1 \to g_2$ on <u>Lien algebrahomomorfismi</u> jos $\forall A, B \in g_1$ pätee $f([A,B]) = [fA, fB]$. Jos f on bijektio, niin f on <u>Lien algebraisomorfismi</u>.

Tärkeimmät Lien algebrahomomorfismit määräytyvät sileistä ryhmähomomorfismeista.

8.1.4. <u>Lause</u> Ol. G_1, G_2 matriisiryhmiä, joiden Lien algebrat ovat g_1 ja g_2. Ol. $f: G_1 \to G_2$ sileä homomorfismi. Tällöin $df_I: g_1 \to g_2$ on Lien algebrahomomorfismi.

<u>Tod:</u> Ol. $A, B \in g_1$ ja a, b differentioituvia polkuja s.e.

$a(0) = I = b(0)$, $a'(0) = A$, $b'(0) = B$.

Os. ensin: $\forall a \in G_1$ pätee:

$$(8.5) \qquad df_I(Ad_a(B)) = Ad_{f(a)}(df_I(B)).$$

Merk. $\alpha(t) = a b(t) a^{-1}$ $\quad \alpha(0) = I$ ja $\alpha'(0) = B$

$$df_I(Ad_a(B)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a b(t) a^{-1})$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a) f(b(t)) f(a)^{-1} = Ad_{f(a)} df_I(B) \quad \Rightarrow (8.5)$$

Sovelletaan identiteettiä (8.5) kun $a = a(t)$

$$df_I([A,B]) = df_I\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{a(t)} B\right) \overset{(*)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df_I(Ad_{a(t)} B)$$
$$\overset{(8.5)}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{f(a(t))}(df_I(B)) = [df_I(A), df_I(B)].$$

$$f(a(0)) = f(I) = I$$
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a(t)) = df_I(A)$$

(*) OK, sillä jos $\sigma(t) = Ad_{a(t)}B$ pitkin $\mathfrak{g}_1$:llä, niin

$$df_I(\sigma'(0)) \underset{\uparrow}{=} d(df_I)_{\sigma(0)}(\sigma'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df_I(\sigma(t)) \qquad \square.$$

$$df_I \text{ lin : } d(df_I)_{\sigma(0)} = df_I \qquad \sigma(0) = B$$

8.6. Seuraus Sileästi isomorfisilla matriisiryhmillä on isomorfiset Lien algebrat.

Tod: Ol. $f : G_1 \to G_2$ sileä isomorfismi matriisiryhmien G_1, G_2 välillä. Tällöin $df_I : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ Lien algebrahomomorfismi

Ketjusääntö: f bijektio $\Rightarrow$ df_I bijektio

$\Rightarrow$ df_I Lien algebraisomorfismi $\square$.

Monilla tutuilla 3-ul. matriisiryhmillä on isomorfiset Lien algebrat:

$$so(3) = \text{span}\left\{ \underset{(A_1)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(A_2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{(A_3)}{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$su(2) = \text{span}\left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$sp(1) = \text{span}\left\{ \tfrac{1}{2}(i), \tfrac{1}{2}(j), \tfrac{1}{2}(k) \right\}$$

annetuissa kannoissa $\{A_1, A_2, A_3\}$ pätee

$$[A_1, A_2] = A_3, \quad [A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2$$

eli näissä kannoissa Lien algebroilla $so(3)$, $su(2)$, $sp(1)$ sama Lien hakasulkeen struktuuri: lin kuvaukset

$f_1 : so(3) \to su(2)$, $f_2 : so(3) \to sp(1)$, $f_3 : su(2) \to sp(1)$

joille vastaavat kanta-alkiot A_i kuvautuvat toisikseen ovat Lien algebraisomorfismeja.

<u>Huom</u>. Jos näiden kantojen kautta identifioidaan Lien algebrat $\mathbb{R}^3$:n kanssa, niin $[\,,\,]$ = ristitulo $\times$ $\mathbb{R}^3$:ssa!

$su(2) \cong sp(1)$ ei yllättävää, sillä $SU(2) \cong Sp(1)$ sileästi isomorfinen samastuksen ψ_1 kautta.

Kuitenkin: $SO(3)$ ei isomorfinen eikä homeomorfinen $Sp(1)$:n kanssa.

Samoin: $SO(n)$, $O(n)$ eivät isomorfiset, mutta niiden Lien algebrat identtiset.

Voidaan osoittaa: polkuyhtenäiset yhdesti yhtenäiset matriisiryhmät isomorfisia $\Leftrightarrow$ Lien algebrat isomorfisia.

8.2. Adjungoitu operointi

Ol. $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ d-ulotteinen matriisiryhmä, jolla Lien algebra $\mathfrak{g}$. $\forall g \in G$ $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ v.a. isomorfismi. Valitsemalla v.a:lle $\mathfrak{g}$ kanta $\mathcal{B}$ tämä isomorfismi esitetään operointina $L_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \triangleq \mathfrak{g}$ jollakin $A \in GL_d(\mathbb{R})$. Ts. $\mathfrak{g}$:n kannan valinnan jälkeen voidaan tulkita $g \mapsto Ad_g$ on funktio $G \to GL_d(\mathbb{R})$.

8.2.1. Lemma $Ad : G \to GL_d(\mathbb{R})$, $g \mapsto Ad_g$ on sileä homomorfismi.

Tod: $\forall g_1, g_2 \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ pätee:

$$Ad_{g_1 g_2}(X) = g_1 g_2 X (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 X g_2^{-1} g_1^{-1}$$

$$= Ad_{g_1}(Ad_{g_2}(X)) \Rightarrow Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} \circ Ad_{g_2}$$

Kahden lin. kuvauksen yhdistettä vastaa niitä (valitussa kannassa) esittävien matriisien tuloa.

$\Rightarrow$ Ad homomorfismi

Sileys: HT. $\square$

Homomorfismi Ad on G:n adjungoitu operointi $\mathfrak{g}$:llä.

Yl. matriisiryhmän G operointi euklidisessa avaruudessa

$\mathbb{R}^m$ tarkoittaa homomorfismia $G \to GL_m(\mathbb{R})$. Se liittää jokaiseen G:n alkioon $\mathbb{R}^m$:n lineaarisen kuvauksen ja siten määrää kuinka G:n alkiot 'operoivat' $\mathbb{R}^m$:n vektoreihin.

Esim. edellä: $SO(n)$ operoi $\mathbb{R}^n$:llä ($G = SO(n)$ ja homomorfismi $G \to GL_n(\mathbb{R})$ on id_G) ja luonnollisesti myös $so(n) \cong \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$:lla" $Ad : SO(n) \to GL_d(\mathbb{R})$, $d = \frac{n(n-1)}{2}$.

$Ad(G) \subset GL_d(\mathbb{R})$ sisältää vain Lien algebraisomorfismeja:

8.2.2 <u>Lemma</u> $\forall g \in G$ ja $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ pätee:

$$[Ad_g(X), Ad_g(Y)] = Ad_g[X, Y].$$

<u>Tod</u>: Seuraa lauseesta 8.1.4, sillä $Ad_g = d(C_g)_I$.

Toinen tapa: $[Ad_g(X), Ad_g(Y)] = [gXg^{-1}, gYg^{-1}]$

$$= gXg^{-1}gYg^{-1} - gYg^{-1}gXg^{-1} = g(XY - YX)g^{-1}$$

$$= g[X, Y]g^{-1} = Ad_g([X, Y]) \quad \square.$$

<u>Huom</u> $Ad : G \to GL_d(\mathbb{R})$ sileä $\Rightarrow$ Ad "välittää" G:n 1-parametriryhmät $GL_d(\mathbb{R})$:n 1-parametriryhmiksi.

Olk. $X \in \mathfrak{g}$. Merk $ad_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $Y \mapsto [X, Y]$

8.2.3. <u>Lause</u> $\forall X \in \mathfrak{g}$ pätee $Ad_{e^X} = e^{ad_X}$.

<u>Huom</u> yhtälön oikealla puolella e^{ad_X}; "kiinnässä" $\mathfrak{g}$:n kannassa $\mathcal{B}$ ad_X "esitettänissä" matriisina $\in GL_d(\mathbb{R})$