11. Kompaktien Lien ryhmien geometriaa

11.1. Killing-muoto

<u>Määritelmä</u> Lien algebran $\mathfrak{g}$ <u>Killing-muoto</u> on ehdosta $B(X,Y) = tr(ad X \circ ad Y)$, $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ määräytyvä funktio

<u>Huom.</u> Jos $\mathcal{B}$ $\mathfrak{g}$:n kanta ja lin. kuvaukset $ad_X, ad_Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ $\quad ad_X(Z) = [X,Z]$ esitetään matriisina valitussa kannassa. Yhdistettynä kuvauksena saadun matriisin jälki ei riipu valitusta kannasta, sillä $tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ji} = tr(BA)$, joten $tr(BAB^{-1}) = tr(A)$.

11.1.1. <u>Lause</u> Killing muodolle pätee

(a) B on $\mathfrak{g}$:n symmetrinen bilineaarinen kuvaus

(b) B on Ad-invariantti:

$$B(X,Y) = B(Ad_g X, Ad_g Y) \quad \forall g \in G,\ X,Y \in \mathfrak{g}.$$

(c) $\forall Z \in \mathfrak{g}$ ad_Z on vinosymmetrinen B:n suhteen: $B(ad_Z X, Y) = -B(X, ad_Z Y)$ eli

$$B([X,Z],Y) = B(X,[Z,Y])$$

Tod: (a) $X \mapsto ad_X$ lin. $\Rightarrow B$ bilin.
$tr(AB) = tr(BA) \Rightarrow B$ symm.

(b) $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ gin Lien algebraisomorfismi, niin pätee

$$(ad_{\sigma(X)} \circ \sigma)(Y) = \sigma \circ ad_X :$$

$$(ad_{\sigma(X)} \circ \sigma)(Y) = [\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y] = (\sigma \circ ad_X)(Y)$$

$$\Leftrightarrow \quad ad_{\sigma(X)} = \sigma \circ ad_X \circ \sigma^{-1}$$

Sij: $\sigma = Ad_g$ (L. 8.2.2)

$$B(Ad_g X, Ad_g Y) = tr(ad_{Ad_g X} \circ ad_{Ad_g Y})$$

$$= tr(Ad_g \circ ad_X \circ \underbrace{Ad_g^{-1} \circ Ad_g}_{= id_{\mathfrak{g}}} \circ ad_Y \circ Ad_g^{-1})$$

$$= tr(Ad_g \circ ad_X \circ ad_Y \circ Ad_g^{-1}) = tr(ad_X \circ ad_Y).$$

(c) Sovelletaan Jacobin identiteettiä kahdesti:

$$[Z, [X, [Y, W]]] = -[X, [[Y, W], Z]] - [[Y, W], [Z, X]]$$

$$= [X, [Z, [Y, W]]] + [[Z, X], [Y, W]]$$

$$= -[X, [Y, [W, Z]]] - [X, [W, [Z, Y]]] + [[Z, X], [Y, W]]$$

$$= [X, [Y, [Z, W]]] + [X, [[Z, Y], W]] + [[Z, X], [Y, W]]$$

Saadaan:

$$ad_Z \circ ad_X \circ ad_Y = ad_X \circ ad_Y \circ ad_Z + ad_X \circ \underbrace{ad_{[Z, Y]}}_{= ad_{ad_Z Y}}$$

$$+ \underbrace{ad_{[Z, X]}}_{= ad_{ad_Z X}} \circ ad_Y$$

$(\Leftarrow)$

$$[ad_Z, ad_X \circ ad_Y] = ad_X \circ ad_{ad_Z Y} + ad_{ad_Z X}\, ad_Y$$

Pätee $tr([A,B]) = 0 \Rightarrow$

$$B(X, ad_Z Y) = -B(ad_Z X, Y) \quad \square.$$

Tarkemmin: Lien ryhmän Killing-muoto on sen Lien algebran Killing-muoto.

Määritelmä Lien ryhmä on puoliyksinkertainen (semisimple) jos sen Killing-muoto on degeneroitumaton l.

$$B(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Huom Tämä on ns. Cartanin kriteerio puoliyksinkertaisuudelle. Algebrallisesti: Lien algebralla $\mathfrak{g}$ ei aitoja aliavaruuksia $\mathfrak{h}$, joilla pätisi $[X,Y]=0$ $\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}$:

11.1.2. Lause Jos G puoliyksinkertainen, niin

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,Y]=0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \{0\}$$

Tod: Ol. $X \in Z(\mathfrak{g})$, jolloin $[X,Y]=0$ $\forall Y \in \mathfrak{g}$.

Siis $ad_X \equiv 0 \Rightarrow B(X,X) = tr(ad_X \circ ad_X) = 0$

$\Rightarrow X = 0. \square.$

11.1.3. Seuraus Puoliyksinkertaisen Lien ryhmän keskus on diskreetti.

11.1.4. <u>Lause</u> Jos G on kompakti puoliyksinkertainen Lien ryhmä, niin sen Killing muoto on negatiivisti definiitti.

<u>Tod</u>: Aik. Jos G matriisiryhmä, joka $O_n(\mathbb{K})$:n aliryhmä, niin $\langle , \rangle_{\mathbb{R}}$ Ad_g-invariantti ja $Ad_g \in O(n)$, $n = \dim G$ kun g:llä orton. kanta (8.4.).

Yleisemmin pätee: Kompaktilla Lien ryhmällä G on Ad-invariantti sisätulo, jolloin $Ad_g \in O(n)$ g:in orton kannassa. Kuten L. 11.1.1 (c) (ja 8.4.4) todistuksessa $\Rightarrow$ ad_X vinosymmetrinen tämän sisätulon suhteen. Olk. $ad_X = (a_{ij})$ esitys g:n orton. kannassa. Pätee:

$$B(X,X) = tr(ad_X \circ ad_X) = \sum_{i,j} a_{ij} a_{ji} = -\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 0.$$

G puoliyksinkertainen $\Rightarrow$ B degeneroitumaton

$\Rightarrow B(X,X) < 0 \quad \forall X \neq 0$ □.

Myös käänteinen pätee:

11.1.5. <u>Lause</u> Jos G on yhtenäinen Lien ryhmä ja B negatiivisti definiitti g:llä, niin G on kompakti ja puoliyksinkertainen.

Tod: Ks esim Fegan: Intro to compact Lie groups tai Helgason: Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.

Esim 1° $G = SU(2)$, L. 9.3.2. ⟹ Riittää laskea Killing-muoto $SU(2)$:n maksimaalisen toruksen Lien algebran

$\tau(su(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ alkioilla.

$ad_{\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}}$ $su(2)$:n kannassa $\left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$
$=: \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$$ad_X = ad_{\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}} : su(2) \to su(2)$$
$$Y \longmapsto \left[\begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}, Y \right]$$

$$ad_X Y_1 = \begin{pmatrix} -\theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$ad_X Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & i\theta \\ i\theta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i\theta \\ -i\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i\theta \\ 2i\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_X Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\theta \\ 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$GL_3(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\theta \\ 0 & 2\theta & 0 \end{pmatrix}, \text{ sillä}$$

$$\begin{array}{ccc} su(2) & \xrightarrow{ad_X} & su(2) \\ f \uparrow & & \uparrow f \\ v \in \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^3 \end{array} \qquad f(E_j) = Y_j \quad j = 1,2,3$$

$$Av = f^{-1} ad_X (fv) \implies \begin{cases} A(E_1) = 0 \\ A(E_2) = 2\theta E_3 \\ A(E_3) = -2\theta E_2, \end{cases}$$

Ol. nyt $X = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} i\phi & 0 \\ 0 & i\phi \end{pmatrix}$, $X, Y \in su(2)$

Valitussa kannassa $\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3\}$ saadaan

$$B(\bar{X},\bar{Y}) = tr\,(ad_{\bar{X}} \circ ad_{\bar{Y}}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\theta \\ 0 & 2\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\phi \\ 0 & 2\phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\theta\phi & 0 \\ 0 & 0 & -4\theta\phi \end{pmatrix} = -8\theta\phi = \underline{4\,tr(\bar{X}\bar{Y})}, \text{ sillä}$$

$$\bar{X}\bar{Y} = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\phi & 0 \\ 0 & -i\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta\phi & 0 \\ 0 & -\theta\phi \end{pmatrix}.$$

2^0 $G = U(2)$. Kuten edellä riittää laskea Killing muoto

$U(2)$:n maksimaalisen toruksen Lien algebran

$$\tau(u(2)) = \left\{\begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 \\ 0 & i\theta_2 \end{pmatrix} \middle/ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\} \text{ alkioilla.}$$

Val. $u(2)$:n kannaksi $\{\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3, \bar{Y}_4\} :=$

$$\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 \\ 0 & i\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\bar{X}}\bar{Y}_1 = \begin{pmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$ad_{\bar{X}}\bar{Y}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$ad_{\bar{X}}\bar{Y}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\theta_1 \\ -i\theta_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i\theta_2 \\ -i\theta_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i(\theta_1-\theta_2) \\ i(\theta_1-\theta_2) & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{\bar{X}}\bar{Y}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\theta_2 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2-\theta_1 \\ \theta_1-\theta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jos $f(E_i) = \bar{Y}_i$ $\quad f : \mathbb{R}^4 \to u(2)$ lin. niin

$$ad_{\bar{X}}\text{:n esitysmatriisi } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_2-\theta_1 \\ 0 & 0 & \theta_1-\theta_2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ sillä}$$

$AE_1 = 0 = AE_2$,

$AE_3 = (\theta_1-\theta_2)E_4$, $AE_4 = (\theta_2-\theta_1)E_3$.

Olk. $X = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 \\ 0 & i\theta_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} i\phi_1 & 0 \\ 0 & i\phi_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(2)$ (11.7)

$$\Rightarrow B(X,Y) = \mathrm{tr}(ad_X \circ ad_Y) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta_2-\theta_1)(\phi_1-\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\theta_1-\theta_2)(\phi_2-\phi_1) \end{pmatrix}$$

$$= 2(\theta_2-\theta_1)(\phi_1-\phi_2) = 2(\theta_2\phi_1 - \theta_2\phi_2 - \theta_1\phi_1 + \theta_1\phi_2)$$

$$= -4(\theta_1\phi_1 + \theta_2\phi_2) + 2(\theta_1+\theta_2)(\phi_1+\phi_2) = 4\,\mathrm{tr}(XY) - 2\,\mathrm{tr}X\,\mathrm{tr}Y,$$

sillä $X \cdot Y = \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 \\ 0 & i\theta_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\phi_1 & 0 \\ 0 & i\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\theta_1\phi_1 & 0 \\ 0 & -\theta_2\phi_2 \end{pmatrix}$

Huom. $U(2)$ ei puoliyksinkertainen, sillä kun

$X = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, niin $B(X,X) = 0$.

3° $G = SO(3)$. $SO(3)$:n maksimaalisen toruksen Lien algebra

on $\mathfrak{t}(SO(3)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Valitaan

$so(3)$:n kanta $\{Y_1, Y_2, Y_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{t}$:

$$ad_X Y_1 = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$ad_X Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_X Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ad_X:n esitysmatr. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$, sillä

$AE_1 = 0$, $AE_2 = -aE_3$,

$AE_3 = aE_2$

11.8

a. $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 & \phi & 0 \\ -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T(su(3))$

$$\Rightarrow B(\bar{X}, \bar{Y}) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & -\phi & 0 \end{pmatrix} = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta\phi & 0 \\ 0 & 0 & -\theta\phi \end{pmatrix}$$

$$= -2\theta\phi = tr\, \bar{X}\bar{Y}, \quad \text{sillä}$$

$$\bar{X}\bar{Y} = \begin{pmatrix} -\phi\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\phi\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Huom. Esimerkit 1°, 2°, 3° yleistyvät:

$U(n)$: $B(\bar{X}, \bar{Y}) = 2n\, tr(\bar{X}\bar{Y}) - 2 tr(\bar{X}) tr(\bar{Y})$

$SU(n)$: $B(\bar{X}, \bar{Y}) = 2n\, tr(\bar{X}\bar{Y})$

$SO(n)$: $B(\bar{X}, \bar{Y}) = (n-2)\, tr(\bar{X}\bar{Y})$

$Sp(n)$: $B(\bar{X}, \bar{Y}) = 2(n+1)\, tr(\bar{X} + \bar{Y})$

11.2. Riemannin monistot

Määritelmä Riemannin metriikka monistolla M on sisätulojen $g_p = \langle , \rangle_p$, $p \in M$ kokoelma tangenttiavaruudessa T_pM s.e. $\forall$ sileillä M:n vektorikentillä $\overline{X}, \overline{Y}$ kuvaus

$$p \longmapsto \langle \overline{X}_p, \overline{Y}_p \rangle_p$$ on sileä p:n ympäristössä.

Merk. $\mathcal{X}(M)$ = M:n sileät vektorikentät

Määritelmä Moniston M (affiini) konnektio on kuvaus $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ s.e.

$$(\overline{X}, \overline{Y}) \longmapsto \nabla_{\overline{X}} \overline{Y}$$

$\forall\ \overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{X}(M)$ ja $f, g \in \mathcal{F}(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ sileä} \}$ pätee:

(1) $\nabla_{\overline{X}} (\overline{Y} + \overline{Z}) = \nabla_{\overline{X}} \overline{Y} + \nabla_{\overline{X}} \overline{Z}$

(2) $\nabla_{f\overline{X} + g\overline{Y}} \overline{Z} = f \nabla_{\overline{X}} \overline{Z} + g \nabla_{\overline{Y}} \overline{Z}$

(3) $\nabla_{\overline{X}} (f\overline{Y}) = f \nabla_{\overline{X}} \overline{Y} + df(\overline{X}) \overline{Y}$ (Leibniz)

Huom 1° "affiini" viittaa ehtoon (2)

2° Jos $\overline{X} \in \mathcal{X}(M)$ ja $f \in \mathcal{F}(M)$ tulkitaan vektorikentän operointi funktioon suunnattuna derivaattana vektorikentän suuntaan eli

merk $\overline{X}(f) := df(\overline{X})$.

Merk (M, g) Riemannin monisto

Konnektio vastaa kovarianttia (=suunnattua) derivointia monistolla: Jos X $\mathbb{R}^n$:n vektorikenttä ja $p \in \mathbb{R}^n$, niin X:n suunnattu derivaatta pisteessä p vektorin V suuntaan on

$$\nabla_V X = \lim_{t \to 0} \frac{X(p+tV) - X(p)}{t}$$

$$X(p+tV) \in T_{p+tV}\mathbb{R}^n \qquad X(p) \in T_p \mathbb{R}^n.$$

Konnektio määrää kuinka nämä eri pisteisiin liittyvät tangentit.

Voidaan todistaa:

11.2.1. <u>Lause</u> Olkoon M Riemannin monisto. Löytyy 1-käsitteinen konnektio (ns. <u>Levi-Civitan</u> tai <u>metrinen</u> tai <u>Riemannin</u> konnektio), jolle pätee

a) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

b) $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Jos $M = G$ Lien ryhmä, niin $[\,,\,]$ yhtyy G:llä määriteltyyn hakasulkuun, joka jatkettavissa vektorikentäksi G:llä.

Myös yleisen moniston tapauksessa

$$[X, Y] := XY - YX \quad \text{määrää vektorikentän.}$$

Mikä on $\bar{X}\cdot\bar{Y}$ kun $\bar{X},\bar{Y}\in\mathfrak{X}(M)$?

Edellä: $\bar{X}(f) = df(\bar{X})$ kun $f\in\mathcal{F}(M)$

ts. $\bar{X}(f) : M\to\mathbb{R}$, joten

$(\bar{Y}\bar{X})(f) = \bar{Y}(\bar{X}(f))$ mielekäs. Yleensä

$\bar{X}\cdot\bar{Y}$ ei ole vektorikenttä, koska sisältää toisen kertaluvun derivoinnista syntyviä termejä. Jos $\bar{X},\bar{Y}$ sileitä, niin lausekkeessa $[\bar{X},\bar{Y}]$ ko. termit kumoavat toisensa.

11.2.2. <u>Lause</u> Olkoot M Riemannin monisto, jolla Riemannin konnektio ∇ ja α M:n polku.

$\exists$ 1-käs operaatio, joka liittää polulla α määritellyn vektorikenttään V: $V(t)\in T_{\alpha(t)}M$ 1-käsitteisen vektorikentän $V'(t) = \frac{DV}{dt}$ s.e. pätee

(a) $\frac{D}{dt}(aV+bW) = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt}$ $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ $\forall\, f\in\mathcal{F}(I)$, missä I α:n määrittelyväli

(c) Jos V on vektorikentän $\bar{Y}\in\mathfrak{X}(M)$ indusoima, l. $V(t) = \bar{Y}(\alpha(t))$ niin

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}\bar{Y}$$

(d) $\frac{d}{dt}(\langle V, W\rangle) = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle$.

Vektorikenttä $V'(t)$ on V:n kovariantti derivaatta pitkin polkua α (tai: indusoitu kovariantti derivaatta).

Jos pätee $\frac{DV}{dt} = 0$ sanotaan V on yhdensuuntainen pitkin polkua α.

(d) $\Rightarrow$ V, W yhdensuuntaisia pitkin polkua $\Leftrightarrow$ $\langle V, W\rangle$ = vakio.

Määritelmä Riemannin moniston M polku $\gamma : I \to M$, jonka vektorikenttä γ' on yhdensuuntainen on geodeesi l. $\frac{D\gamma'}{dt} = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$

11.2.3. Lause Ol. $p_0 \in M$. $\exists$ avoin joukko $U \subset M$, $p_0 \in U$ ja $\varepsilon > 0$ s.e. $\forall p \in U$ $v \in T_pM$, joille $|v| < \varepsilon$ löytyy 1-käsitteinen geodeesi $\gamma_v : (-1,1) \to M$ s.e. $\gamma_v(0) = p$ ja $\gamma_v'(0) = v$.

Määritelmä Olk. $v \in T_pM$ ja ol. $\exists$ geodeesi $\gamma : [0,1] \to M$ s.e. $\gamma(0) = p$ ja $\gamma'(0) = v$.

L. 11.2.3 $\Rightarrow$ geodeesi 1-käsitteinen, joten voidaan asettaa

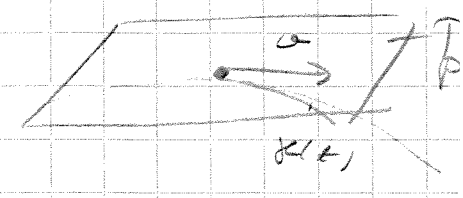
$$\exp_p v := \gamma(1) \in M.$$

Pisteestä $p \in M$ lähtevät geodeesit voidaan esittää

kuvan $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ avulla. Eksponenttikuvaus

siis kuvaa T_pM:n origon kautta kulkevat

suorat geodeeseiksi.



Määritelmä Olkoon M Riemannin monisto

ja ∇ sen Levi-Civitan konnektio. Riemannin

kaarevuustensori on funktio $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$,

joka määräytyy ehdosta

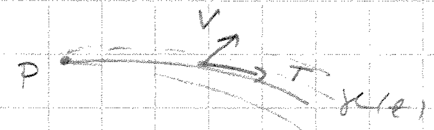
$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Voidaan osoittaa: R määräytyy Jacobin yhtälöstä

$$\nabla_T \nabla_T V + R(V,T)T = 0, \text{ missä}$$

$T = \gamma'(t)$, γ geodeesi ja $V \perp T$ variaatio-

kenttä.



Määritelmä Jos $P_p \subset T_pM$ on 2-ulotteinen

v.a.a. ja $x, y \in P_p$ lineaarisesti riippumattomia,

niin $K_p(x,y) = \dfrac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}$ on

(pisteistä x, y riippumaton) tason P_p leikkauskaarevuus

Jos M on 2-ulotteinen, niin K yhtyy tavalliseen Gaussin kaarevuuteen.

Voidaan osoittaa, että kaarevuustensori R_p annetussa pisteessä p määräytyy tasojen $P_p \subset T_pM$ leikkauskaarevuuksista.

<u>Määritelmä</u> <u>Riccin kaarevuus</u> $Ric(\bar{X},\bar{Y})$ on kuvauksen $Z \mapsto R(\bar{X}, Z)\bar{Y}$ jälki: Jos $\{E_1,\dots,E_n\}$ T_pM:n ortonormaali kanta, niin

$$Ric(\bar{X},\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(\bar{X},E_i)\bar{Y}, E_i \rangle .$$

Jos $\bar{X} = E_1$, niin saadaan

$$Ric(\bar{X},\bar{X}) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(\bar{X},E_i)\bar{X}, E_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} K(\bar{X},E_i)$$

<u>Skalaarikaarevuus</u> on funktio $S: M \to \mathbb{R}$

$$S(p) = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j)$$

11.3. Vasen invariantit ja bi-invariantit metriikat

Määritelmä

Lien ryhmän G Riemannin metriikka

$x \mapsto \langle\ ,\ \rangle_x$ on vaseninvariantti jos $\forall a, x \in G$

$\forall u, v \in T_x G$ pätee $\langle u, v\rangle_x = \langle (dL_a)_x u, (dL_a)_x v\rangle_{L_a(x)}$,

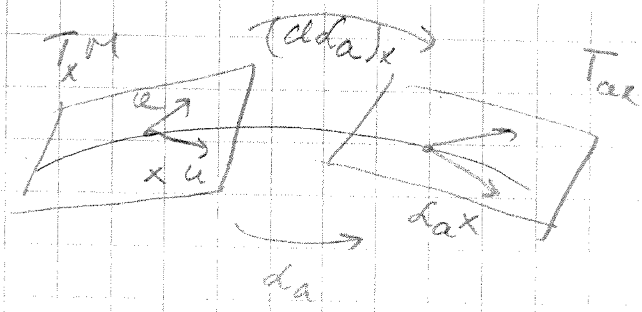
missä $L_a : G \to G$, $x \mapsto ax$ vasen translaatio.

Vastaavasti oikealta invariantti metriikka.

Huom. Koska $T_x G = x\mathfrak{g}$

$\Leftrightarrow$ $x^{-1} T_x G = \mathfrak{g}$ $\forall x \in G$,

niin vasen invarianssi $\Leftrightarrow$



$$\langle u, v\rangle_e = \langle (dL_a)_e u, (dL_a)_e v\rangle_a \quad \forall a \in G,\ u, v \in \mathfrak{g}$$

11.3.1. Lause Lien ryhmän G vaseninvariantit Riemannin metriikat ovat 1-1 vastaavuudessa Lien algebran sisätulojen kanssa.

Määritelmä G:n vektorikenttä $\bar{X}$ on vaseninvariantti, jos pätee $\bar{X} \circ L_a = dL_a(\bar{X})$ $\forall a \in G$ ts. $\bar{X}_{ag} = (dL_a)_g(\bar{X}_g)$ $\forall a, g \in G$

Huom 1° L_a sileä $\Rightarrow$ vaseninvariantti vk $\bar{X}$ on sileä

2° Vaseninvariantin vektorikentän arvo määräytyy sen arvosta G:n neutraalialkiolla e.

Aset. $\tilde{\mathfrak{g}} = \{ \bar{X} \in \mathcal{X}(G) \mid \bar{X}$ vaseninvariantti $\}$

Selvästi $\tilde{\mathfrak{g}}$ on vektoriavaruus: $(\bar{X}, \bar{Y}) \mapsto \bar{X} + \bar{Y}$, $a \in \mathbb{R}$

$(a, \bar{X}) \mapsto a\bar{X}$ vaseninvarianttoja vektorikenttiä.

$\tilde{\mathfrak{g}}$ suljettu kulauksen suhteen:

Aik. $[X, Y]_e = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\gamma(t)} Y$ $\gamma(0) = e$ $\gamma'(0) = X$

Jos $g \in G$, $\bar{X}, \bar{Y} \in \tilde{\mathfrak{g}}$

$$[\bar{X}_g, \bar{Y}_g]_g := (dL_g)_e \left[(dL_{g^{-1}})_g \bar{X}_g, (dL_{g^{-1}})_g \bar{Y}_g \right]_e$$

$$= (dL_g)_e [\bar{X}_e, \bar{Y}_e]_e$$

Saadaan: $g \mapsto [\bar{X}_g, \bar{Y}_g]_g$ vaseninvariantti vektorikenttä.

11.3.2. <u>Lause</u> $\mathfrak{g} \cong \tilde{\mathfrak{g}}$

<u>Tod</u>: Funktio $\bar{X} \mapsto \bar{X}_e$ on isomorfismi $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$.

Lineaarisuus selvä.

inj: $\bar{X}_e = 0 \Rightarrow \bar{X}_g = dL_g(\bar{X}_e) = 0 \quad \forall g \in G$.

surj: Olk. $v \in \mathfrak{g}$ ja asetetaan

$$\bar{X}^v : \bar{X}^v_g := (dL_g)_e(v) \quad \forall g \in G$$

$\bar{X}^v$ on vaseninvariantti ja $\bar{X}^v_e = v$. $\square$.

<u>Määritelmä</u> G:n vasen- ja oikeainvariantti

metriikka on <u>bi-invariantti metriikka</u>

Voidaan osoittaa:

11.3.3. Lause Kompaktilla Lien ryhmällä G on bi-invariantti metriikka.

Tod: Tarvitaan

1° Kompaktilla Lien ryhmällä on Haarin integraali: Merk. $C(G) = \{ f: G \to \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva} \}$

$\exists\ I: C(G) \to \mathbb{R}$ s.e. a) $I(1) = 1$

b) $I(f) \geq 0 \quad \forall\ f \geq 0$.

c) I on invariantti: $I(f) = I(f \circ L_g)$

$= I(R_g \circ f) \quad \forall\ g \in G$.

Merk. $I(f) = \int_G f(g)\,dg$ Haarin integraali

2° Kompaktin Lien ryhmän matriisiesitykselle $\varphi: G \to GL_n(\mathbb{R})$ löytyy $\mathbb{R}^n$:n G-invariantti sisätulo $\langle , \rangle$:

$\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall\ u, v \in \mathbb{R}^n \quad g \in G$.

$\langle u, v \rangle := \int_G \langle \varphi(g) u, \varphi(g) v \rangle\, dg$ $\square$.

Saadaan:

11.3.4. Lause Lien ryhmän G bi-invariantit metriikat ja $\mathfrak{g}$:n Ad-invariantit sisätulot

$\langle Ad_g X, Ad_g Y \rangle = \langle X, Y \rangle \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{g},\ g \in G$

ovat 1–1 vastaavuudessa. Lisäksi pätee

$$\langle Ad_g \bar{X}, Ad_g \bar{Y} \rangle = \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle \iff \langle \bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}] \rangle = \langle [\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z} \rangle .$$

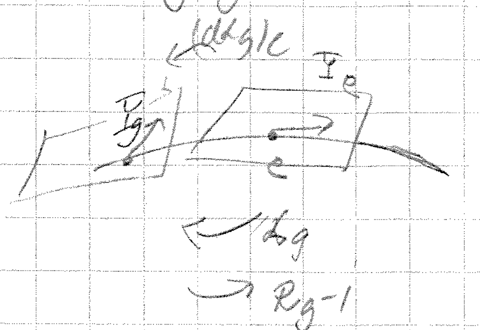
<u>Tod</u>: Ol. $\bar{Y} \in \mathfrak{g}$ (tulkitaan vaseninvarianttina vektorikenttänä)

$$Ad_g \bar{Y}_e = d(C_g)_e \bar{Y}_e \qquad C_g : x \mapsto gxg^{-1}$$

$C_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$

$$= d(R_{g^{-1}})_g \left(d(L_g)_e \bar{Y}_e \right)$$

$$\underset{\text{inv.}}{\overset{\bar{Y}\text{ vasen}}{=}} d(R_{g^{-1}})_g \bar{Y}_g \in \mathfrak{g}$$



Saatiin: $Ad_g \bar{Y}_e = (dR_{g^{-1}})_g (\bar{Y}_g)$

$$\langle \bar{X}_e, \bar{Y}_e \rangle_e \overset{\text{Ad-inv}}{=} \langle Ad_g \bar{X}_e, Ad_g \bar{Y}_e \rangle_e = \langle (dR_{g^{-1}})_g \bar{X}_g, (dR_{g^{-1}})_g \bar{Y}_g \rangle_e \overset{\text{bi-inv.}}{=} \langle \bar{X}_g, \bar{Y}_g \rangle_g$$

$$\langle [\bar{X}, \bar{Y}]_e, \bar{Z}_e \rangle_e = \left\langle \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\gamma(t)} \bar{Y}_e, \bar{Z}_e \right\rangle_e \qquad \gamma(0) = e,\ \gamma'(0) = X$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle Ad_{\gamma(t)} \bar{Y}_e, \bar{Z}_e \rangle_e \underset{\text{inv.}}{\overset{\text{Ad.}}{=}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \bar{Y}_e, \underbrace{Ad^{-1}_{\gamma(t)}}_{= Ad_{\gamma(-t)}} \bar{Z}_e \rangle_e$$

$$= \langle \bar{Y}_e, [-\bar{X}_e, \bar{Z}_e]_e \rangle_e = -\langle \bar{Y}_e, [\bar{X}_e, \bar{Z}_e]_e \rangle_e$$

$$= \langle \bar{Y}_e, [\bar{Z}_e, \bar{X}_e]_e \rangle_e .$$

"$\Leftarrow$" samoin. $\square$.

<u>Saatiin</u>: 11.2.1 $\Rightarrow$ Killing muoto Ad-invariantti.

Jos siis G puoliyksinkertainen ja kompakti, niin Killing-muoto määrää bi-invariantin metriikan.

11.3.5. <u>Lause</u> Ol. G Lien ryhmä, jolla bi-invariantti metriikka. Tällöin

a) Riemannin konnektio määräytyy ehdosta

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y] \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

b) G:n pisteestä e lähtevät geodeesit ovat G:n 1-parametriryhmät

Tod: b) Ol α 1-param. ryhmä, joka vastaa alkiota $X \in \mathfrak{g}$. Tällöin $\alpha(t) = \exp(tX)$

ja pätee $\nabla_{\alpha'}\alpha' = \nabla_X X - \frac{1}{2}[X,X] = 0$. □.

11.3.6. <u>Lause</u> Ol G Lien ryhmä, jolla bi-invariantti metriikka. $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ pätee

a) $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}\left[[X,Y], Z\right]$

b) $K(X,Y) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\langle [X,Y], [X,Y]\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}$

c) $Ric(X,Y) = \frac{1}{4}\sum_i \langle [X,E_i], [Y,E_i]\rangle$

kun $\{E_i\}$ $\mathfrak{g}$:n ortonormaali kanta

d) Jos G kompakti ja bi-invariantti metriikka Killing-muodosta, niin skalaarikaarevuus

$$S = \frac{1}{4}\dim G.$$

Tod! kts. esim. Arvanitoyeorgos.