Lien ryhmät ja monistot (Mat-1.3531) Harj. 3.

Peltonen / Dahl 10.2.2006

1. Olkoon $f = f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ $(a_1+ib_1, \dots, a_n+ib_n) \mapsto (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$
ja $h = f_{2n} \circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{4n}$ kun $g_n : (z_1+w_1j, \dots, z_n+w_nj) \mapsto (z_1, w_1, \dots, z_n, w_n)$
Osoita, että pätee: a) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle f(\bar{x}), f(\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle f(\bar{x}), f(i\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}}$,
$|\bar{x}|_{\mathbb{C}} = |f(\bar{x})|_{\mathbb{R}}$ $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}^n$ ja

b) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_{\mathbb{H}} = \langle h(\bar{x}), h(\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle h(\bar{x}), h(i\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}} + j \langle h(\bar{x}), h(j\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}} + k \langle h(\bar{x}), h(k\bar{y}) \rangle_{\mathbb{R}}$
$|\bar{x}|_{\mathbb{H}} = |h(\bar{x})|_{\mathbb{R}}$ $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{H}^n$.

2. a) Osoita, että $\forall\ A \in O(2) \setminus SO(2)$, $R_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on peilaus jonkin suoran suhteen. Kuinka tämä suora määräytyy alkion
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ kulmasta θ?

b) Olkoon $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ ja $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$.
Osoita, että $AB \neq BA$ $\forall\ A \in O(2) \setminus SO(2)$.

c) Kuvaile alkioiden $A, B \in O(2)$ tulo kulmien avulla.

3. Olkoon $f : O(n) \to SO(n) \times \{-1, +1\}$ ehdon $f(A) = (\det(A) \cdot A, \det A)$ määräämä kuvaus. a) Osoita, että parittomilla n f on isomorfismi.
b) Olkoon n pariton ja $\bar{X} \subset \mathbb{R}^n$ symmetrinen origon suhteen (l. $p \in \bar{X} \Leftrightarrow -p \in \bar{X}$). Olkoon $Symm(\bar{X}) \subset O(n)$. Osoita, että $Symm(\bar{X}) \cong Symm^+(\bar{X}) \times \{-1, 1\}$
c) Osoita, että $O(2)$ ei ole isomorfinen $SO(2) \times \{+1, -1\}$:n kanssa.
(Vihje: tarkastele kertaluvun 2 alkioita $A \in O(2)$ $A^2 = I_2$)

4. a) Osoita, että affiini ryhmä
$Aff_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in GL_n(\mathbb{K}),\ v \in \mathbb{K}^n \right\}$ on $GL_{n+1}(\mathbb{R})$:n aliryhmä. Samastetaan $F \in Aff_n(\mathbb{K})$ funktion $f : f(\bar{X}) = R_A \bar{X} + V$, $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ kanssa (kuten isometriaryhmän tapauksessa luennolla).
b) Osoita, että f kuvaa $\mathbb{K}^n$:n suorat $\mathbb{K}^n$:n suoriksi
(suora $\mathbb{K}^n$:ssä on joukko $\{v_0 + w \mid w \in W\}$, missä $v_0 \in \mathbb{K}^n$ ja $W \subset \mathbb{K}^n$ 1-ulotteinen $\mathbb{K}$-aliavaruus)
c) Onko $Aff_1(\mathbb{R})$ vaihdannainen? Selitä algebrallisesti ja visuaalisesti

5) a) Osoita, että $Aff_n(\mathbb{K}) \subset GL_{n+1}(\mathbb{K})$ on matriisiryhmä.
Osoita, että $Aff_n(\mathbb{K})$ ei ole suljettu $M_{n+1}(\mathbb{K})$:ssa.
b) Osoita, että $Isom(\mathbb{R}^n)$ on matriisiryhmä. Onko se kompakti?