Aalto-yliopisto, Matematiikan ja Systeemianalyysin laitos **Apiola/Kuortti**

Mat-1.C Matemaattiset ohjelmistot

Harjoitus 2 18-21.3.2013

- Kaikki 2-tehtävät palautetaan ke 27.3.2013 klo 24.00 mennessä Petrille osoitteeseen: *petri.leskinen@aalto.fi*.
  Laita liitteeksi m-tiedostot ja Maple-ws:t (.mw), poista jälkimmäisistä mielellään tulostukset Edit-valikon “Remove output”-valinnalla.
- Merkitse selvästi, mitkä ovat varsinaisia DOKU-tehtäviä. Hyvä, jos teet mailiviestiin luettelon liitteinä lähettämiesi tehtävien numeroista, ja merkitset siihen D:t.
- Ma 25.3. opettajat paikalla (niin kauan kuin oppilaita riittää), läsnäoloa ei tarkisteta (syy: välikokeet).

Maple-työt tehdään työarkille, lataa Mapleen `pohja.mw`.
Käy läpi kokeiluja ohjatusti tehden:
`maplepohjanew.mw, mapleperusteita.mw`

Hyödyllisiä vihjeitä:

- Kursoria ei tarvitse siirtää rivin loppuun ennen Enter-käskyä!
- Nuolinäppäimillä voi siirtyä yläindeksistä pois; samoin murtolausekkeissa.
- Pikanäppäimiä:
  Ctrl + Delete poistaa käsky- tai tulosrivin
  Ctrl + t siirtyy tekstitilaan
  F5 siirtyy tekstitilassa kaavankirjoitustilaan ja takaisin
  Ctrl + k tekee uuden käskyrivin kursorin yläpuolelle
  Ctrl + j tekee uuden käskyrivin kursorin alapuolelle
  Ctrl + l (l = label) liittää viittauksen aikaisemman tuloksen numeroon

Lisää Maple-ohjeita lopussa.

---

1. mplDi0001.tex Maple
Määritä funktion $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ nollakohdat ja lokaali max/min. Piirrä funktion ja derivaatan kuvaajat.

Vihje: `solve,evalf,diff,plot`. Yksinkertaisinta ehkä käsitellä lausekkeena, mutta saat kokeilla myös funktiotapaa.

2. mplDi010.tex (Harj. 1:n Matlab-tehtävä nyt Maplella)
Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Käytä symboliohjelmissa perinteistä "diffistekniikkaa" kuvan kanssa, Matlab:ssa raakaa "numeronmurskausta" tyyliin: `linspace, plot, zoom`, uusi `linspace` kapeammalla välillä, `find`, ...

Vihje: arcsin on Mathematicassa `ArcSin`, Maplessa `arcsin` ja Matlabissa `asin`.
Symbolilaskentaohjelma saattaa johtaa oikeaan tulokseen puutteellisin perustein, jos tarkkoja ollaan.

3. mplDi011.tex

Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$. Kuva, tottakai!

Vihje: Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

4. mplDi017.tex

a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

5. mplDi005.tex

Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

Suorita b)-kohta sekä Maplella että Matlab:lla (Toki voit kokeilla Matlab:lla myös a)-kohtaa tyyliin `syms x` ja sitten Maple-komento `int`.)

Vihje:

Mathematica:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `Integrate`, numeerinen funktiolla
`NIntegrate`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa. Ks. dokumentaatiota, erityisesti Implementation Notes.

Maple:
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Numeerisessa sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.
Esim: `evalf(Int(f, x = 0 .. 2, digits = 20, method = _Dexp))`

Matlab:
Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi “function handle”). Sitten quad-alkuiset Matlab-funktiot.

Viitteet:

`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/m-files.html` (Matlab:n funktiokahva, function handle)

6. mplDi0011.tex
Kuulantyönnön tulos riippuu kuulan alkunopeudesta v, lähtökorkeudesta h ja työnnön suuntakulmasta x seuraavan lausekkeen mukaisesti:

$$f := x \to \frac{v\cos(x)\left(v\sin(x)+\sqrt{v^2\sin(x)^2+2hg}\right)}{g},$$

missä $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Käytetään SI-järjestelmän yksiköitä ja oletetaan, että $h = 2$, $v = 14$ ja $g = 9.81$. Määritä työnnön optimaalinen suuntakulma ja maksimitulos.

Kannattanee edetä seuraavien vaiheiden mukaan:

- Määrittele f funktiona; älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa, niin voit tarkistaa, että lauseke on oikein.
- Sijoita lukuarvot h, v, g.
- Piirrä funktion f kuvaaja välillä $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ ja tarkista, että se näyttää järkevältä. (Yleinen virhe: kertomerkkejä puuttuu!)
- Ratkaise maksimi kokeilemalla molempia tapoja: suoraan `maximize` TAI muodosta yhtälö $f'(x) = 0$, ratkaise numeerisesti `fsolve`-käskyllä, laske maksimi.
- Muuta saatu kulma asteiksi ja mieti, onko tulos järkevä.

7. mplD0009.tex
Putoavan kappaleen nopeus $v = v(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $mv'(t) = mg - kv(t)^2$, jos positiivinen suunta on **alaspäin** ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön kertoimella $k > 0$.
a) Ratkaise differentiaaliyhtälö alkuehdolla $v(0) = 0$.
b) Mikä on rajanopeus $\lim_{t\to\infty} v(t)$?
Vihje: Ohjelma ei osaa laskea raja-arvoa, koska se ei tiedä vakioiden etumerkkiä. Lisää käsky `assume(m>0 and k>0 and g>0)` ja kokeile uudelleen sen jälkeen.

8. mplDi0006.tex

a. Olkoon $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä $(2,-1)$. Piirrä pinta ja tangenttitaso ja pyörittele ja zoomaa.

b. Sama pinnalle $z = \arctan \frac{y}{x}$ pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.

9. mplDi0002.tex
Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$.

Olkoon $f(x,y) = |xy|$.
(a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x,y) = k, k = 1, 2, 3$.
(b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x,y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla (`scaling=constrained`), pitäisi kuvasta näkyä, miten gradienttivektorin ja korkeuskäyrän suunnat suhtautuvat toisiinsa.

Vihje:

Aloita työarkki näin:

```
> restart:
> with(plots): with(plottools):
> nuoli:=(alkup, loppup,vari)->arrow(alkup,loppup,0.01,0.05,0.02,color=vari);
> korkeuskayra:=k->implicitplot(abs(x*y)=k,x=-2..2,y=-2..2);
> #  Maariteltiin grafiikka-arvoinen funktio, usein tosi katevaa!
> kkparvi:=display(seq(korkeuskayra(k),k=1..3);
>
```

Kts. lisää: mplDi0002Apu.mw

10. mplDi0004.tex
Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon

$$h(x,y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300.$$

Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen.

a. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1, 2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?
Tämä on käsinlaskutehtävä, mutta tee Maplella. Havainnollista Maplepiirroksin:
Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa.

b. Muodosta funktion $h(x,y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Vihje: Gradienttikentän voi laskea (tietysti käsin) tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

11. DOKU mplV0001.tex
Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x, y)|x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.) (Käytä Maplea sydämesi kyyllydestä, vaikka käsinlaskullakin selviäisit.)

12. mplDi0005.tex
Määritä lieriöiden

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$

leikkauskäyrän pisteen $(1, -1, 1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

Edellinen voisi näyttää tältä:

```
plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
```

Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

```
display(kuva1,kuva2);
```

Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x, y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

13. DOKU mplV0009.tex
Määritä funktion

$$f(x, y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$$

suurin ja pienin arvo joukossa $[1, 2] \times [1, 2]$.

Maplen lisäksi kannattaa kokeilla Matlab:lla `meshgrid, max/min, find ...`-tekniikkaa. Toki ihan optimointiin räätälöityjä funktioitakin kummallakin ohjelmalla. Mutta ensisijaisesti ihan perustekniikoita, please!.

Vihje: Vaatimattomasta ulkoasustaan huolimatta voi olla hiukan työläs.

14.

DOKU Maple,Matlab (H2T10)

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve, Matlab: ode45

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

15. DOKU

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \rho y \\ \frac{dy}{dt} = \sigma x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

numeerisesti välillä $[0, 20]$, kun $\sigma = 10$, $\rho = 28$ ja $\beta = 8/3$. Piirrä ratkaisukäyrät samaan kuvaan, ja piirrä käyrät $x(t)$ ja $z(t)$ parametrisesti. Tämän jälkeen piirrä 3-ulotteinen parametrisoitu käyrä kaikista koordinaateista.

Onko ratkaisu rajoitettu? Suppeneeko se kohti jotain arvoa?

Kokeile muuttaa alkuarvoja, sekä parametrien arvoja. Vallitsevan teorian mukaan systeemi on *kaoottinen dynaaminen systeemi*, jonka käyttäytyminen voi muuttua merkitsevästi jo pienistä muutoksista lähtötilanteessa; itse asiassa termi perhosvaikutus keksittiin kuvaamaan juuri tämän systeemin käytöstä.

Vihje: Kolmiulotteinen parametrisoitu käyrä (tai pistejoukko) piirretään MATLABissa funktiolla `plot3`.

16. mplV000.tex

Ohjeita

Kerätään ohjeita näiden tehtävien aihepiiriin liittyen. "Tehtävä"-linkistä saat LaTeX-koodin, josta sopivan osan voit haluamallasi tavalla muokaten liittää tehtäväpaperiisi.

Neliömuotojen definiittisyys

Määr: Neliömuoto $q(x) = x^T Ax$ (A on symmetrinen matriisi) on

1. positiivisesti definiitti, jos $q(x) > 0 \ \forall x \neq 0$,
2. negatiivisesti definiitti, jos $q(x) < 0 \ \forall x \neq 0$,
3. positiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,

4. negatiivisesti semidefiniitti, jos $q(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ ja $\exists y \neq 0$, jolla $q(y) = 0$,
5. indefiniitti, jos $\exists x, y$ siten, että $q(x) > 0$ ja $q(y) < 0$.

Samoja definiittisyyskäsitteitä käytetään myös *symmetrisestä matriisista A*.

Suunnattu derivaatta ja gradientti

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\mathbf{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

Pinnan normaali ja tangenttitaso

Jos pinnan yhtälö esitetään muodossa $F(x, y, z) = 0$, saadaan edellisen perusteella pinnan tangenttitason yhtälö pisteessä p_0 näin:

$\nabla F(p_0)\dot{(}p - p_0) = 0$

Jos pinta on annettu muodossa $z = f(x, y)$, saadaan siten normaalin suunta funktion $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ gradienttina.

Tästä seuraa, että pisteeseen p_0 asetetun tangenttitason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 = f_1(p_0)(x - x_0) + f_2(p_0)(y - y_0).$$

($f_1$ja f_2 tarkoittavat osittaisderivaattoja.)

Kahden pinnan leikkauskäyrän tangentti

Leikkauskäyrän tangentti on kohtisuorassa molempien pintojen normaalia vastaan (eikö vain!). Siten leikkauskäyrän tangentin suuntainen vektori saadaan pinnan normaalivektorien ristitulona $\mathbf{t} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

Kriittiset pisteet, ääriarvot

Kriittinen piste (KRP) p: $\nabla f(p) = 0$.
Kriittisen pisteen laatu selviää (jos selviää) Hessen matriisin $H_f(p)$ definiittisyydestä.
Symmetrisen matriisin definiittisyyskäytös selvitetään ominaisarvojen avulla. Jos matriisi on $2 \rtimes 2$, voidaan käyttää determinanttia (kts. tehtävä mplV006a). Isommillekin matriiseille on determinanttiehtoja, mutta ne on hankala muistaa ja käyttää, jääkööt muistoksi “determinanttien kulta-ajoilta”.

Hessen matriisi saadaan jälleen yksinkertaisimmin tähän tapaan:

```
> with(linalg)
> H:=Matrix(hessian(f,[x,y]));
> H00:=subs(x=0,y=0,H)  % Arvo pisteessä (0,0)
```

(Tietysti on helppo kirjoittaa ihan oma "hessi".)

Vektorikenttä ja gradientti

```
with(linalg): with(plots):
fieldplot(grad(f(x,y),[x,y]),x=a..b, y=c..d,arrows=slim,color=x);
# a:lla, b:lla jne. oltava tietysti numeeriset arvot.
```

Uusissa Maplen versioissa on kirjastopakkaus `VectorCalculus` ja siellä funktio `Gradient` lukuisine valitsimineen. Kts. helppi. Vanhan `linalg`-kirjaston kunnon `grad` on perustarpeisiin ehkä yksinkertaisin ja helppokäyttöisin.

Oma pikku funktio on usein selkein, se voidaan määritellä ongelmakohtaisesti esim. toimimaan vain 2d-tilanteessa. Tällainen gradienttifunktio voitaisin kaikessa yksinkertaisuudessaan määritellä näin: `gradi2:=(f,x,y)->[diff(f,x),diff(f,y)]`

Pintapiirroksen "valaiseminen" esim. avaruuskäyrillä

Usein pintapiirrosta voidaan täsmentää ja tarkentaa ja ymmärtää paremmin, kun piirretään sopivia avaruuskäyriä pinnalle `spacecurve`:lla.

Alla on esimerkki, jossa piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä sekä käyrän projektio xy-tasossa. Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä. Tätä voi modifioida tarpeen mukaan.

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
> x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
> pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,thickness=3,
color=blue,axes=BOX)
> x:='x':y:='y':  # On hyv\"a muistaa vapauttaa.
> pinta:=plot3d(...):   # Muista t\"ass\"a tavassa lopettaa kaksoispisteeseen.
> display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour);
> display(pystyleikkaus);  # Katsotaan pelkk\"a\"a leikkausk\"ayr\"a\"a.
```