[**?**, Luku 10],

interpolaatio.tex 6.7.04

1 Interpolaatio

Olkoon annettu taulukko

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Taulukko 1:

Voidaan ajatella, että kyse on annetun funktion taulukoiduista arvoista annetuissa pisteissä $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Toisaalta taulukko voi edustaa johonkin havaintoaineistoon tai kokeeseen liittyviä mittaustuloksia, kuten lämpötilaa mitattuna vaikkapa tunnin välein, luokan oppilaiden pituuksia, kun oppilaat numeroidaan aakkosjärjestyksessä, jne.

Jos tiedetään, tai on aihetta olettaa, että luvut edustavat jonkin ”sileän”[1] funktion arvoja hyvällä tarkkuudella laskettuna/mitattuna, voi olla järkevää asettaa tehtäväksi määrittää johonkin sopivaan funktioluokkaan kuuluva funktio, jonka kuvaaja kulkee tarkalleen kaikkien annettujen pisteiden kautta. Tällöin puhutaan *interpolaatiosta.*

Toisaalta, jos mittaukset ovat epätarkkoja, tai kaikkien pisteiden kautta kulkemisen vaatimus on muuten tilanteeseen sopimaton, voidaan etsiä aineistoon liittyvää pääsuuntaa, ”trendiä”ns. pienimmän neliösumman approksimaatiolla. Tällöin puhutaan usein käyrän sovittamisesta aineistoon.

Tyypillisesti aineistoa on paljon, ja sovitus tehdän alhaista astetta olevalla polynomilla, joskin muitakin funktioluokkia käytetään. Varsin usein otetaan ensimmäisen asteen polynomi, jolloin puhutaan pienimmän neliösumman suorasta.

Tässä kohdassa käsittelemme nimenomaan interpolaatiota, ja edellä mainituksi funktioluokaksi otamme polynomifunktiot. Toisin kuin pienimmän neliösumman sovituksessa, polynomi-interpolaatiossa annettujen pisteiden lukumäärän kasvaessa polynomin asteluku yleensä kasvaa, kuten kohta näemme.

1.1 Koulumatematiikan kertausta polynomeista

Aloitetaan koulusta tutulla lauseella.

Lause 1. *Jos polynomilla $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ on nollakohta x_0, niin $p(x)$ on jaollinen $(x - x_0)$:lla.*

Todistus. Muodostetaan erotus

$$p(x) - p(x_0) = a_1(x - x_0) + a_2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_n(x^n - x_0^n).$$

Jokaisessa termissä $(x^k - x_0^k)$ on $(x - x_0)$ tekijänä johtuen kaavasta

[1] Sileydellä tarkoitamme ao. sovelluksen kannalta riittävän monen derivaatan olemassaoloa.

$$x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \ldots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}).$$

□

Saamme heti yksinkertaisen, mutta tärkeän tosiasian.

Seuraus 2. *Jos kaksi korkeintaan astetta n olevaa polynomia yhtyy $(n+1)$:ssä eri pisteessä, niin ne yhtyvät kaikkialla (ts. ovat identtiset).*

Huomautus 1. *Ajattele yksinkertaisinta tapausta $n = 1$. Geometrisesti on kyse siitä, että tason kaksi pistettä määrää yksikäsitteisesti suoran. Tapaus $n = 2$ tarkoittaa, että 3 pistettä määrää yksikäsitteisesti paraabelin. (Tämä ei enää ole itsestään selvää, joskin uskottavaa.)*

Todistus. Olkoot p ja q korkeintaan astetta n olevia polynomeja, jotka saavat samat arvot pisteissä $x_0, \ldots, x_n$. Tällöin erotuspolynomi $r(x) = p(x) - q(x)$ on niinikään korkeintaan astetta n. Olkoon tuo asteluku $d \leq n$. Erotuspolynomilla r on oletuksen mukaan $d{+}1$ (jopa $n{+}1$) erillistä nollakohtaa $x_0, \ldots, x_d$. Kun lausetta sovelletaan peräkkäin d kertaa, seuraa erotuspolynomille esitys

$$r(x) = c(x - x_0). \ldots .(x - x_{d-1}),$$

missä c on jokin vakio. Koska myös $r(x_d) = 0$ ja kaikki tekijät $x_d - x_i, i = 0 \ldots d-1$ ovat nollasta erillisiä, on tulon nollasäännön mukaan oltava $c = 0$, eli erotuspolynomi $r(x) = p(x) - q(x)$ on identtisesti 0. □

Huomautus 2. *Kannattaa panna merkille, että tämä tärkeä johtopäätös seuraa puhtaasti koulussa opetettavasta perusalgebrasta, eikä siis ole mitenkään riippuvainen syvällisestä algebran peruslauseesta. Tällä tarkoitetaan lausetta, jonka mukaan jokaisella astetta $n \geq 1$ olevalla polynomilla on kompleksitasossa ainakin yksi nollakohta.*

1.2 Approksimointi interpolaatiopolynomilla

Palataan alussa esitettyyn taulukkoon 1. Polynomi-interpolaatiotehtävä tarkoittaa seuraavaa:

Interpolaatiotehtävä.

Annettu x- ja y-pisteet (taulukko 1).
Määrättävä mahdollisimman alhaista astetta oleva polynomi p siten, että
$p(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n.$

Jos y_k-arvot ovat annetun funktion f arvoja pisteissä x_k, niin interpolaatiopolynomi siis yhtyy funktion f arvoihin x_k-pisteissä, ts. $p(x_k) = f(x_k), k = 0, \ldots, n$.

Ensimmäinen ratkaisuyritys – rakennetaan yhtälöryhmä

Lasketaanpa esimerkki.

Esimerkki 1. *Jospa meillä on $x-$pisteet $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 3$ ja vastaavat $y-$arvot $y_0 = 1, y_1 = -2, y_2 = 5$. Etsimme toisen asteen polynomia $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, joka toteuttaa ehdot $p(x_k) = y_k, k = 0, 1, 2$.*

Tosin sanoen tehtävänä on asettaa paraabeli pisteiden $(-2,1), (-1,-2), (3,5)$ kautta.

Suoraviivaisinta on muodostaa yhtälöryhmä, jossa annetut x_k- ja y_k- pisteet ovat tunnettuja vakioita ja polynomin kertoimet ratkaistavia tuntemattomia. Esimerkissämme saamme polynomin kertoimien a_0, a_1, a_2 määräämiseksi yhtälöryhmän:

$$\begin{cases} a_0 + a_1(-2) + a_2(-2)^2 = 1 \\ a_0 + a_1(-1)x + a_2(-1)^2 = -2 \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 = 5 \end{cases}$$

Tehtävä palautuu siten lineariseen yhtälösysteemiin $A\vec{c} = \vec{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \text{ ja } b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

"Laiskan miehen (naisen)" tapa on käyttää MATLAB:ia:

```
>> A=[1 -2 4;1 -1 1;1 3 9]

A =
     1    -2     4
     1    -1     1
     1     3     9

>> b=[1;-2;5]

b =
     1
    -2
     5

>> c=A\b

c =
   -3.1000
   -0.1500
    0.9500
```

Koska MATLAB antaa ratkaisun ilman varoitteluja, on hyvä syy uskoa, että systeemillä on yksikäsitteinen ratkaisu.

Katsotaan vielä kuvaa:

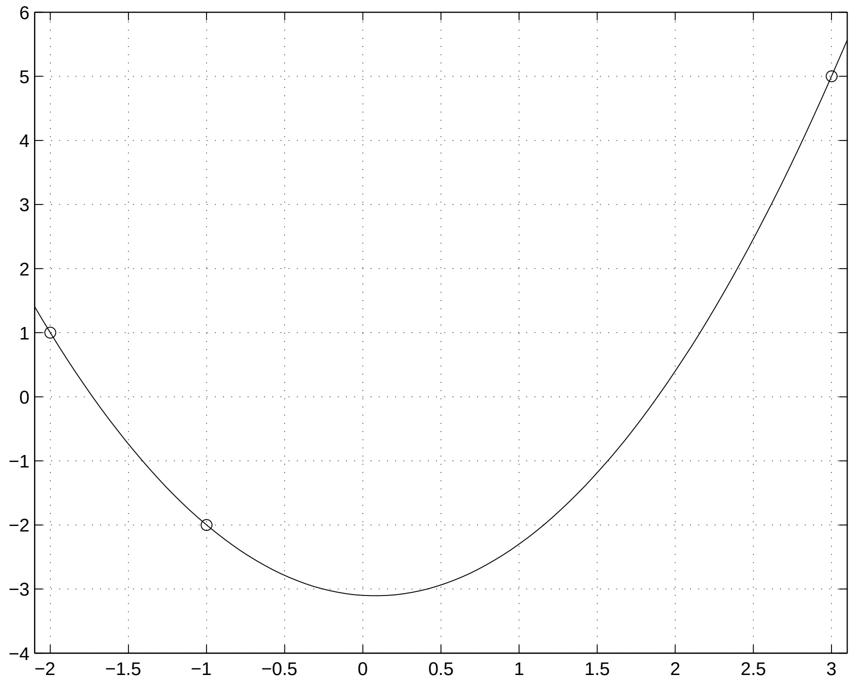
Piirretään x- ja y-pisteet

```
>> xdata=[-2 -1 3];  % Annettujen pisteiden x-koordinaatit
>> ydata=[1 -2 5];   % Annettujen pisteiden y-koordinaatit
>> plot(xdata,ydata,'o')
>> hold on           % Seuraavat kuvat nykyisten p\"a\"alle.
```

Lisätään samaan kuvaan saamamme polynomin kuvaaja

```
>> x=linspace(-2.1,3.1,100); % V\"alin [-2.1,3.1] jako 100:aan osaan
```

```
>> p=c(1)+c(2)*x+c(3)*x.^2;  % Miksi .^, lue www-oppaista.
                             % polyval on suositeltavampi komento, mutta
                             % yll\"a oleva lienee helpompi ymm\"art\"a\"a.
>> plot(x,p)                 % Polynomin pisteet (100:n resoluutiolla)
>> xlim([-2.1 3.1])          % Asetellaan koordinaatistoa paremmaksi
>> grid on                   % koordinaattiviivat
```



Kuva 1: Interpolointi 2. asteen polynomilla

Yleisessä tapauksessa voimme aina muodostaa samalla tavoin yhtälöryhmän. Jos etsimme polynomia $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, saamme yhtälöryhmän matriisiksi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Tehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu, mikäli matriisin determinantti $\neq 0$.

Tätä muotoa olevaa matriisia kutsutaan *Vandermonden matriisiksi.* Voidaan osoittaa, että sen determinantti on aina nollasta poikkeava, kun pisteet $x_0, \ldots, x_n$ ovat eri pisteet.

Huomautus 3. *Tätä tietoa emme tarvitse, itse asiassa saamme sen sivutuloksena toisella menetelmällä johtamastamme ratkaisusta.*

Huomautus 4. *Vandermonden matriisi on ei-singulaarinen (det $\neq 0$), mutta n:n kasvaessa sen ns.* häiriöalttius *kasvaa voimakkaasti.* [2]

[2] Lyhyesti sanottuna häiriöalttius tarkoittaa, että pienet virheet datassa ja laskujen pyöristyksissä saattavat aiheuttaa suuria virheitä tuloksissa. Tähän aiheeseen palataan,

1.3 Lagrangen interpolaatiomenetelmä

Interpolaatiotehtävälle on kaksi nerokkaan yksinkertaista ratkaisutapaa, joihin kumpaankin liittyy kuuluisan matemaatikon nimi: *Lagrange* ja *Newton.*

Esitämme ratkaisun edellisen mukaan.

Olkoon siis annettuna erilliset $x-$pisteet $x_0, \ldots, x_n$ ja vastaavat $y-$pisteet (joiden ei tarvitse olla erillisiä), eli annettuna on taulukko 1.

Tehtävänä on löytää korkeintaan astetta n oleva polynomi p, joka "interpoloi annettua dataa", ts. toteuttaa ehdot

$$p(x_k) = y_k, k = 0 \ldots n.$$

Lineaarinen interpolaatio

Jotta idea tulisi esiin mahdollisimman pelkistetysti, lähdetään yksinkertaisimmasta tilanteesta, jossa pisteitä on kaksi ja kyseessä on siten lineaarinen interpolaatio.

Analyyttisen geometrian tiedoilla osaamme muodostaa suoran kahden annetun pisteen (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta. Voimme kirjoittaa interpolaatiopolynomin muotoon:

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Jotta saataisiin yleistyskelpoinen muoto, kirjoitetaan kaava painotettuna keskiarvona $y-$ arvoista keräämällä $y-$termien kertoimet tekijöiksi:

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Merkitään kaavassa esiintyviä ensimmäisen asteen polynomeja $L_0(x)$ ja $L_1(x)$, jolloin siis

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x).$$

Polynomeilla L_0 ja L_1 on ominaisuudet $L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0$ ja $L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$. Niitä kutsutaan 1. asteen *Lagrangen kertojapolynomeiksi.*

Esimerkki 2. *Olkoon annettu logaritmitaulukkoarvot* $\ln 9.0 = 2.1972$ *ja* $\ln 9.5 = 2.2513$. *Laske lineaarista interpolaatiota käyttäen likiarvo* $\ln 9.2$*:lle.*

Ratkaisu. Lasketaan Lagrangen polynomit, kun $x_0 = 9.0, x_1 = 9.5$. (Huomaa, että Lagrangen polynomit määräytyvät pelkästään x_0- ja x_1-arvoista.)

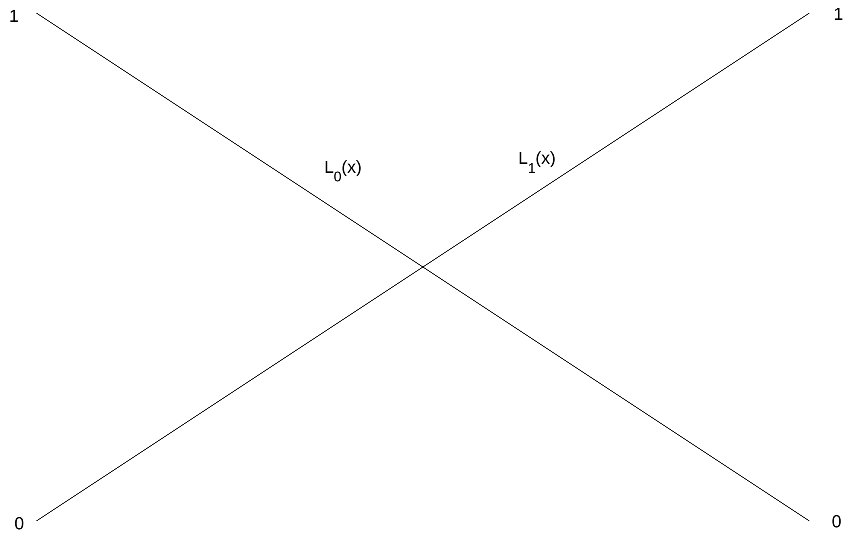
$L_0(x) = \frac{x-9.5}{9.0-9.5}$, $L_1(x) = \frac{x-9.0}{9.5-9.0}$.

Kun sijoitetaan $x = 9.2$, saadaan $L_0(9.2) = 0.6$, $L_1(9.2) = 0.4$.

Siis $p(9.2) = y_0 0.6 + y_1 0.4 = 2.19720.6 + 2.25130.4 = 2.2188$.

Miten suuri virhe tehdään? Logaritmin arvo 5:n numeron tarkkuudella on 2.2192, joten virhe on 2.2192 - 2.2188 = 0.0004. (Saamme 4 oikeaa numeroa.) □

Kvadraattinen interpolaatio



Kuva 2: 1. asteen Lagrangen polynomit L_0 ja L_1

Miten voisimme edellä olevaa menettelyä yleistää. Kun siirrymme lineaarisesta kvadraattiseen tapaukseen, tulee samalla selvästi näkyviin, miten yleinen tilanne hoidetaan.

Nyt on siis annettu 3 pistettä x_0, x_1, x_2 ja vastaavat y_0, y_1, y_2.

Jos osaisimme muodostaa toisen asteen polynomit L_0, L_1, L_2 siten, että

- $L_0(x_0) = 1, \quad L_0(x_1) = 0, \quad L_0(x_2) = 0,$
- $L_1(x_0) = 0, \quad L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) = 0,$
- $L_2(x_0) = 0, \quad L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1,$

voisimme kirjoittaa interpolaatiopolynomin heti:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x).$$

Tällöinhän p on korkeintaan astetta 2 oleva polynomi, ja sijoittamalla x :lle vuorollaan arvot x_0, x_1, x_2 nähdään, että $p(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2.$

Miten sitten tuollaiset L_k- polynomit löydetään? Katsotaan vaikka L_0 :aa. Polynomin pitää saada arvo 0 pisteissä x_1 ja x_2. Sellainen polynomi on $c(x - x_1)(x - x_2)$, missä c on mielivaltainen vakio. Määrätään vakio c siten, että ehto $L_0(x_0) = 1$ toteutuu, ts. $c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$, josta saadaan kerroin $c = 1/((x_0 - x_1)(x_0 - x_2))$, joten

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Aivan samoin saadaan

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Jos merkitään $l_0(x) = (x - x_1)(x - x_2), l_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)$, $l_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, niin

$L_k(x) = \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}, k = 0, 1, 2.$

Sanallisesti sanottuna: $L_k(x)$:n osoittajassa on tekijät $(x - x_j), j \neq k$, ja nimittäjä saadaan osoittajasta korvaamalla x arvolla x_k.

Esimerkki 3. *KRE exa 2 s. 850–851. Jatketaan edellistä esimerkkiä siten, että otetaan yksi annettu lisäpiste.*

ratk. □

Kuten luonnollista on, tarkkuus paranee, kun annettuja pisteitä lisätään, approksimoitavan funktion kannalta ajatellen on luonnollista, että kun käytettävissämme on yksi lisäparametri, jolla suora voidaan "taivuttaa" paraabeliksi, niin tarkkuutta saadaan parannetuksi.

Yleinen tapaus

Annettu pisteet $x_0, \ldots, x_n$ ja vastinpisteet $y_0, \ldots, y_n$. Etsitään siis korkeintaan astetta n olevaa polynomia p, jolle $p(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n.$

Edellinen yleistyy nyt ilmeisellä tavalla.

1. Muodostetaan n-asteiset Lagrangen kertojapolynomit, joilla on ominaisuus: $L_k(x_j) = \delta_{i,j}$. Ne saadaan kaavalla

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

2. Interpolaatiopolynomi voidaan kirjoittaa muotoon:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x).$$

Kts, vihko s. 5, ahkä parempi esittää niin ...

Esimerkki 4.

1.4 Interpolaatiovirhe

Edellisissä esimerkeissä saimme ensituntuman virheeseen. Todellisessa tilanteessa oikea arvo ei ole käytettävissä tai sen laskeminen on liian työkästä. Siksi on mitä suotavinta. voida arvioida virhettä lausekkeella, joka riippuu vain annetuista taulukkopisteistä ja interpoloitavan funktion yleisistä ominaisuuksista. Jos kyseessä on riittävän sileä funktio, saadaan tällainen, varin kaunis lauseke johdetuksi

Olkoon taas kerran annettu pisteet $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_n$ ja olkoon f funktio, jolle $f(x_k) = y_k, k = 0, \ldots, n$.

Jos f on astetta n oleva polynomi, niin interpolaatiopolynomi yhtyy siihen,joten virhe on 0. Taylorin lause on opettanut meidät ajattelemaan, että polynomiapproksimoinnissa virhekertoimena on funktion $(n+1)$. derivaatta $f^{(n+1)}$ sopivassa pisteessä laskettuna. Tämä on sopusoinnussa edellä sanotun havainnon kanssa, koska n:nnen asteen polynomin $(n + 1)$. derivaatta $= 0$.

Emme ryhdy johtamaan tarkemmin virheen kaavaa, vaikkei se ole yhtään vaikeampaa kuin Taylorin lauseen virhekaavan johto. Itse asiassa se menee vastaavalla tekniikalla, soveltamalla *Rollen lausetta n* kertaa. (Muistele peruskurssi 1:n asioita). Kaava on helppo muistaa, ja vaadimme sen muistettavaksi (ei siis anneta koepaperissa).

Lause 3. ***Polynomi-interpolaation virhe*** *Olkoon f $n+1$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio tarkasteluvälillä, jolle annetut pisteet $x_0, \ldots, x_n$ ja laskentapiste x kuulukoot. Olkoon p_n vastaava interpolaatiopolynomi. Tällöin virheelle $\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ pätee:*

$$\epsilon_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!},$$

missä t on jokin piste välillä, johon kaikki x_k- pisteet ja x kuuluvat.

Huom! Piste t on tuntematon ja se riippuu yleensä x : stä. Virhearvion soveltamiseksi on yleensä ensin etsittävä yläraja $f^{(n+1)}$:lle ko. välillä. Käytännössä tämä on usein kätevintä tehdä symboliohjelmalla (Maple, Mathematica). Ylärajaa on turha arvioida kovin tarkkaan, kuvaajasta katsomalla saatu tarkkuus on aivan riittävä.

Muita periaatteita, kts. KRE ss. 851–852