Aalto-yliopisto, Matematiikan ja Systeemianalyysin laitos **Apiola/Kuortti**

Mat-1.C Matemaattiset ohjelmistot

Harjoitus 2 (-3) 21-28.3.2012

DokuT – Kirjallinen työ, m-tiedosto/mw-worksheet lähetetään Petrille ma 26.3. klo 14.00 mennessä. `petri.leskinen@aalto.fi`
Maple ws:stä mielellään myös pdf.

Doku-tehtäviä on 3, joista tulisi valita 2.(Jos haluat tehdä enemmän, ilmoita ensi viikon harjoitusten rastilistalla, mutta älä lähetä kahta enempää Petrille.) Toivottavaa olisi, että ainakin joku osuus olisi Maplella. (Tätäkin silmälläpitäen eka Doku (teht. 3) on varsin helppo.)

Arvostelusta: Minimivaatimus: (2 "Dokutyötä + 2 HT-tehtävää)/harjoitus")
Annetaan arvosanat positiivisessa hengessä.
Läsnäoloa edellytetään, ollaan joustavia, kunhan ilmoitatte poissaolonne ja jonkin syyn.

Ylivoimaisen esteen tapauksessa voidaan neuvotella erikoisjärjestelystä kaikissa kysymyksissä.

Kurssin päätös Ma 26.3. käydään läpi ja kommentoidaan Dokutehtäviä.
Muita tässä olevia tehtäviä saa merkitä, joitakin ratkaisuja käydään läpi. Loppujen tekoa jatketaan muutamilla lisätehtävillä täydennettynä (erit. diffyhtälöitä).

Ke 28.3. käytetään alkuosa tehtävien tekemiseen, n. tunnin kuluttua saa merkata listaan, mitä on tehnyt, loppuaika käytetään ratkaisujen läpikäyntiin. Tällöin oppilaat saavat esitellä myös omia ratkaisujaan.

Kurssi loppuu tähän, Doku-tehtäviä ei enää jaeta.

---

1. (Maple, Matlab)

Maple on nyt ensisijainen, Matlab:n suhteen tee erityisesti b)-kohta.

Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = 1 + \frac{sin(x)}{1 + x^2}.$$

a) Maple: Määrittele f lausekkeeksi, laske f:n arvo pisteessä $x = -2.0$ ja piirrä kuvaaja välillä $[-5, 5]$.
Matlab:
Tee vastaava asia Matlabilla, kirjoita skripti. Huomaa, että Matlabissa täytyy ensin antaa x:lle numeerinen (vektori)arvo.

b) Tee samat asiat, mutta nyt määrittelemällä f funktioksi.

Vihje:

a)

```
   Maple                                  Matlab:

> f:=1-...                               >> x=...
> subs...                                >> f=...
> plot                                   >> plot
```

b)

```
    Maple                                 Matlab

> f:=x->1-...                           >> f:=@(x) 1-...
```

2. Laske sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrät $y^2 = x$ ja $x - y = 3$.

Vihje: Mieti, kumpi on helpompaa: integrointi x- vai y-suunnassa.

DokuT **3.** Maple
Määritä ellipsin $9x^2+16y^2 = 144$ sisään piirretyn (akselien suuntaisen) suorakulmion maksimaalinen pinta-ala. Piirrä ellipsi ja suorakulmio.

4. a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

5. Hermiten interpolaatio: Interpolaatioehdoissa esiintyy myös derivaattoja.

Määritä 4. asteen polynomi p, joka toteuttaa ehdot:

$$p(0) = p'(0) = 1, p(1) = p'(1) = p''(1) = 2.$$

Tarkista tulos sopivasti `subs`-komennoilla ja piirrä kuva/kuvia polynomista ja derivaatoista.

Huom: 5 ehtoa ja 5 tuntematonta kerrointa $\Longrightarrow$ järkevän tuntuinen tehtävä. Yleisesti "järkevälläkään" Hermiten interpolaatiotehtävällä ei aina ole yksikäsitteistä ratkaisua (kuten ei neliömatriisin määräämällä lineaarisella yhtälöryhmälläkään – siitähän on kyse). Pelkkiä funktion arvoja koskevalla interpolaatiotehtävällä aina on (koska "Vandermonden neliömatriisi" on aina ei-singulaarinen).
Tässä opetellaan erityisesti Maplen kätevää ratkaisutekniikkaa.

Vihje: Kirjoita polynomi lausekkeeksi tyyliin:

`p:=a*x^4+b*x^3 + .... ,`
missä $a, b, \ldots, e$ ovat määrättävät kertoimet.

Derivaatta: `diff`
Arvojen (x=0,x=1) sijoittaminen p:n lausekkeeseen: `subs`
Yhtälön ratkaiseminen: `solve`

Kaikista saat tietoa näin `?diff`, ...

6. Matlab ja Maple (tee molemmilla).

$$f(x,y) = \sin(3\,y - x^2 + 1) + cos(2\,y^2 - 2\,x).$$

Piirrä pintakuva ja korkeuskäyräpiirros.

Ota alueeksi vaikka `[-2 2 -1 1]` .

Vihje: Tutustu samalla `Matlabin` `meshgrid`:n toimintaan.
Korkeusarvomatriisi Z tehdään kahden muuttujan funktiolle tähän tapaan:

```
>> x=linspace(a,b,m); y=linspace(c,d,n); % m ja n luokkaa 30.
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> Z=f(X,Y);
```

(Kokeile periaatetta pienillä, hiukan erikokoisilla matriiseilla X,Y.)
Tässä funktion f on toimittava pisteittäisin operaatioin. Jos vaikka $f(x,y) = x^2 - y^2$, kirjoitettaisiin:

```
Z=X.^2 - Y.^2;
```

Pintoihin `mesh(x,y,Z), surf(x,y,Z), ...` Kokeile myös `colorbar` yms.

Matlabilla korkeuskäyriin `contour` , voit myös kokeilla `ezcontour`-funktiota. Mahdollisuus on kokeilla myös korkeuskäyrien valitsemistapoja, `clabel`.

Älä diskretoi liian hienoksi. Linspacessa 100 on ihan liikaa, n. luokkaa 30 olkoon lähtökohta.

Maple: Helpompaa, mutta tulos ei aivan niin loistava kuin Matlabissa. (Osin tosin varsin hienoa tämäkin, ja “context sensitive”).

```
> with(plots):
> plot3d(f(x,y),x=a..b,y=c..d);
> contour(f(x,y),x=a..b,y=c..d); # Tarkista!
```

DokuT **7.** Muodosta interpolaatiopolynomi pisteistölle, joka saadaan laskemalla funktion $\cos(1+x^2)$ arvot tasavälisessä x-pisteistössä, jossa on 7 pistettä välillä $[0,3]$.Piirrä samaan kuvaan funktio, datapisteet ja interpolaatiopolynomi.

Arvioi (Lagrangen) interpolaatiokaavan virhetermin avulla interpolaatiovirheen yläraja yo. välillä ja vertaa todelliseen.

Lause Olkoot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ erilliset pisteet ja f $(n+1)$ kertaa jatkuvasti derivoituva funktio x_k-pisteet sisältävällä välillä. Jos p_n on (1-käs) dataan $(x_k, f(x_k))$ liittyvä interpolaatiopolynomi, niin

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Vihje: Tässä on mahdollista harrastaa Maplen ja Matlabin yhteistyötä. Virhekaavan derivaatta muodostetaan tietysti Maplella ja lauseke sievennetään. Itse asiassa piirtämällä ja poimimalla kuvasta maksimipisteen koordinaatit, saadaan riittävän hyvä arvio. Tulotermin voisi hoitaa tehokkaimmin Matlabissa ottamalla tiheän diskretoinnin ja käyttämällä max-funktiota. Maplessalin on max-funktio, lakenta on Matlabissa tehokkaampaa.
Miten tulotermi lasketaan Matlabissa? Vaikka tähän tapaan:
1. `x=linspace(....,N)`
2. Tedään matriisi X, jossa x-vektoreita allekkain n+1 kpl.
3. Tehdään matriisi X0, jossa rivit

```
x0 x0 ... x0   N kpl.
x1 x1 ... x1   N kpl.
 ...
xn xn ... xn   N kpl.
```

Nämä syntyvät vaikka `meshgrid`-komennolla tai ulkotuloilemalla ykköspystyvektorilla.
4. Vähennetään matriisit ja `prod())`. Sitten vain `abs` ja `max` kehiin.

Tosi Matlabmaista! (Ei moitita, vaikka tekisit for-loopin, vain 8 kertaa käydään, mutta hyvä ymmärtää Matlabin hienoa matriisiajattelua, muistiahan ei nykyisin tarvitse säästellä.)

8. Newtonin menetelmän askel voidaan määritellä vähäeleisesti Maplelle. Määritellään iterointifunktio:

```
> N := x -> evalf(x - f(x)/D(f)(x));
```

Iterointi tapahtuu joko for-silmukalla tai iterointioperaattorilla `N@@k`. (For silmukka lienee tehokkaampi, kun halutaan muodostaa koko iterointijono.) Ratkaise seuraavat yhtälöt Newtonin menetelmällä. Sopivat alkuarvot vaikkapa kuvan avulla.

a) $x\cos x = \sin x + 1, \quad 0 < x < 2\pi$

b) $x^2 + \sin x = 8$

9. [Maple tai Matlab]

Tarkastellaan väestökasvumallia

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1),$$

jossa otetaan huomioon biologisen lisääntymisen ohella myös maahanmuutto, jonka oletetaan tapahtuvan vakionopeudella v yksilöä vuodessa (netto). Oletetaan, että tietty populaatio on alunperin 10^6 yksilöä, 435000 yksilöä muuttaa "maahan"1. vuoden aikana ja populaatiossa on 1564000 yksilöä vuoden lopulla. Määritä luku λ Käytä tätä λ:n arvoa ennustamaan populaation koko toisen vuoden lopussa, kun oletetaan maahanmuuttovauhdin säilyvän vakiona.

Vihje: Maple: `fsolve`, Matlab: `fzero`

10. Maple ja Matlab

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve
Matlab: ode45

DokuT **11.** Kirjoita funktio, jonka otsikko ja "help-kommentit" voisivat olla:

```
function [kertoimet,condnr]=vandinterp(xdata,ydata)
% Funktio laskee interpolaatiopolynomin kertoimet Vandermonden
% systeemin ratkaisulla ja palauttaa my\"os cond-luvun.
%  Esim:
%  xdata=0:5; ydata=xdata.*sin(xdata);
%  [c,cnr]=vandinterp(xdata,ydata);
```

Laske vaikkapa kommenttiesimerkin tapaus ja vertaa polyfit-funktion antamiin kertoimiin. Piirrä data ja interpolaatiopolynomi. Käytä arvojen laskentaan polyval-funktiota.

Vihje: Olkoon $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ etsitty polynomi.
Määrätään tuntemattomat kertoimet interpolaatioehtojen $p(x_k) = y_k, k = x_0, \ldots x_n$ avulla saatavasta lineaarisesta yhtälösysteemistä ratkaisemalla.
Kirjoita yhtälöryhmä tässä yleisessä muodossa ja tee ensin Matlab-skripti tyyliin

```
xd=...;
yd=...;
A=...;  % Yht.ryhman matriisi, help/doc vander
a=      % Ratkaisuna saatava kerroinvektori, help slash (a=A\...)d
x=linspace(alkup,loppup); % x-pisteet piirt. varten
y=polyval(...);           % Polynomin arvot x-pisteissa
...
plot(xd,yd,'o')
hold on
plot(x,y)
grid on
```

Tarkistus: Kulkeeko polynomi kaikkien datapisteiden kautta.
Kun skripti toimii, tee sen pohjalta pyydetty funktio. Sovella funktiotasi johonkin tämän tehtäväkokoelman interpolaatiotehtävään.

12. W.A Mozartin(1756-1791) sävellyksiä indeksoidaan Köchel-luvuilla, jotka ilmaisevat teosten sävellysjärjestyksen. Alla on eräitä Köchel-lukuja, ja vastaavien teosten sävellysvuosia.

Number	Year
1	1761
75	1771
155	1772
219	1775
271	1777
351	1780
425	1782
503	1786
575	1789
626	1791

Käyttäen tätä dataa, arvioi teoksen Sinfonia Concertanten sävellysvuosi, kun tiedetään, että sen Köchel-numero on 364.

Vihje: Piirrä ensin datapisteet tasoon, ja päätä millaista menetelmää kannattaa käyttää. Epäilemättä sopivan asteista PNS-polynomia. Suorita joitakin sovituksia, ja tarkista sitten tulos vaikka Wikipediasta.

13. Maple tai Matlab
Tutkitaan nk. Rungen ilmiötä. Laske funktion $g(x) = 1/(1+x^2)$ arvoja tasaisin välein väliltä $[-5, 5]$, ja tee näihin pisteisiin perustuva polynominen interpolaatio. Piirrä sekä $g(x)$ että $P(x)$ samaan kuvaan. Mitä huomaat, kun valittujen datapisteiden määrää tihennetään?

Kokeile interpolointia silloin, kun datapisteitä ei valita tasavälisesti, vaan ne valitaan Chebyshev-pisteiden

$$x_j = 5\cos(\frac{j\pi}{N}), j = 0 \dots N$$

mukaan.

Vihje: Polynominen interpolaatio kannattaa tehdä MATLAB-funktiolla `polyfit`. Funktio g kannattaa määritellä funktiokahvan avulla: `g = @(x)1./(1+x.^2)`. Tasavälisiä pisteistä saa funktiolla `linspace`

Sopii aivan yhtä hyvin Maplelle.

DokuT **14.** DokuT

Yhdysvaltojen perustuslaki vaatii, että maassa suoritetaan joka kymmenes vuosi väestönlaskenta. Ohessa on väestönlaskennan tuloksia sadoissa miljoonissa asukkaissa viime vuosisadalta.

1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
76	92	106	122	132	150	179	203	226	248

Tee polynominen interpolointi datalle, ja ennusta väestön määrä vuonna 2010. Kuinka ennusteesi suhtautuu laskennan todelliseen tulokseen: 308,745,538 laskettua asukasta?

Sovita myös eriasteisia PNS-polynomeja, vrt. Matlab Censusgui, lue Molerista

Vihje:

15. Maple ja Matlab Laske integraali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{13 - 12\cos 2x}\, dx$$

a) symbolisesti, b) numeerisesti. Piirrä integroitavan funktion kuvaaja. Mikä itse asiassa on integraalin arvo?

Vihje: Maple
Symbolinen integrointi tapahtuu funktiolla `int`, numeerinen funktiolla `int(...,type=numeric)` tai `evalf(Int(...))`. Jälkimmäisessä sovelletaan suoraan jotakin numeerisen integroinnin menetelmää, jonka valintaan myös käyttäjä voi vaikuttaa.

Matlab:
Integrandi määritellään funktioksi (helpoimmin funktiokahvaksi). Sitten quad-alkuiset Matlab-funkltiot.

16. Määritä funktion $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 1]$.

Vihje: Piirrä myös kuvio.

17. Maple tai Matlab Etsi yhtälön $x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320 = 0$ välillä $[5.5, 6.5]$ oleva juuri. Muuta x^7:n kerroin luvuksi -36.001 ja katso, mikä vaikutus sillä on juureen.

Vihje: Maple: `fsolve`
Matlab: `roots`

18. Tarkastellaan yhtälösysteemejä:

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32 \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23 \\ 7x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33 \\ 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

a) Ratkaise molemmat systeemit.

b) Muuttamalla vähän yhtälön dataa (oikeaa puolta ja/tai kerroinmatriisia), voidaan tutkia systeemin herkkyyttä pienille virheille (datassa ja pyöristyksessä).

Ratkaise 1. systeemi oikean puolen vektoreilla
`[32.1, 22.9, 32.9,31.1]'` ja `[32.01, 22.99,32.99,31.01]'`
ja 2. systeemi vektoreilla
`[9.1 -5.1, 7.9, 3.1]'` ja `[9.01, -5.01, 7.99, 3.01]'` .

Mitä nämä pienet häiriöt vaikuttavat ratkaisuihin?

c) Muuta kerroinmatriiseja lisäämällä matriisien kuhunkin alkioon pieni satunnaisluku
`0.1*rand` . Ratkaise systeemit alkuperäisillä oikeilla puolilla. Mitä nämä muutokset vaikuttavat ratkaisuihin.

d) Lineaarisen yhtälösysteemin herkkyyttä pienille virheille sanotaan *häiriöalttiudeksi* (*"ill-conditioned "*). Laske kummankin matriirin häiriöalttius.

Suhteellisen virheen suurtenemisypäyhtälö:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq \kappa \frac{||\Delta b||}{||b||}$$

Pahimmillaan ratkaisun suhteellinen virhe voi olla luokkaa $\kappa\times$ (datan suhteellinen virhe) ($\kappa = cond(A)$)