

Todennäköisyyslaskenta

Ilkka Mellin

Teknillinen korkeakoulu, Matematiikan laboratorio

Esipuhe

Tämä moniste antaa perustiedot **todennäköisyyslaskennasta**. Monisteen tavoitteena on antaa riittävä pohja yliopistoissa annettavalle **tilastotieteen** opetukselle. Kirja sisältää kuitenkin niin paljon materiaalia, että se voinee toimia oheismateriaalina monenlaisilla todennäköisyyslaskennan kursseilla.

Moniste perustuu Teknillisessä korkeakoulussa pitämiini *sovelletun todennäköisyyslaskennan* kurssien luentoihin, mikä tietysti lyö leimansa monisteessa käsiteltävään materiaaliin.

Moniste jakautuu kolmeen osaan: Osassa 1 tarkastellaan *todennäköisyyden laskusääntöjä* ja esitellään *Kolmogorovin aksioomat* todennäköisyydelle. Osassa 2 käsitellään *satunnaisuuttuja* ja *niiden jakaumia*. Osassa 3 tarkastellaan tärkeimpiä *todennäköisyysjakaumia* ja niiden ominaisuuksia. Lisäksi kirjassa on kaksi liitettä: Liite 1 käsittelee (naiivia) *joukkooppia* ja liite 2 käsittelee *verkkoja* ja *todennäköisyyslaskentaa*.

Se, että käsillä oleva teos on perusopetuksen moniste näkyy siinä, että teoksessa ei käytetä mittateoreettista lähestymistapaa, vaikka teoksen ensimmäisessä osassa esitelläänkin *Kolmogorovin aksioomat*. Lisäksi kaikkein vaativimmat matemaattiset tulokset on jätetty perustelematta. Kuitenkin esimerkiksi sellaiset todennäköisyyslaskennan ja matemaattisen tilastotieteen kannalta keskeiset teoreettiset tulokset kuten *suurten lukujen laki* ja *keskeinen raja-arvolause* sekä *kaksiulotteisen normaalijakauman* ominaisuudet todistetaan.

Tavoitteenani on ollut ja on tuottaa verkkojakeluun sellaista todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppimateriaalia, mikä mahdollistaa itseopiskelun. Lukijasta saattaa tuntua, että monisteessa on tähän tavoitteeseen nähden kovin vähän esimerkkejä – monisteessa ei ole esimerkkejä kuin aivan keskeisimpien teorian kohtien havainnollistamiseksi. Perusteluna tälle ratkaisulle on se, että monisteen materiaalia täydentävät ja rikastavat verkossa julkaistut harjoitustehtäväkokoelmat ratkaisuosineen. Todennäköisyyslaskennan opettajien kannattaa huomata myös se, että käsillä olevaan materiaaliin liittyvät luentokalvot ovat saatavilla verkossa.

Käsillä olevaan monisteeseen liittyy kiinteästi opetusmoniste **Tilastolliset menetelmät** sekä kaava- ja taulukkokokoelmat **Todennäköisyyslaskenta: Kaavat, Tilastolliset menetelmät: Kaavat** sekä **Tilastolliset taulukot**, jotka kaikki ovat myös saatavilla verkossa.

Kesällä 2006

Ilkka Mellin

Todennäköisyyslaskenta

Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

1. Johdanto
2. Joukko-opin peruskäsitteet
3. Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet
4. Todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt
5. Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka
6. Todennäköisyyden aksioomat
7. Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavat
8. Verkot ja todennäköisyyslaskenta

Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

9. Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat
10. Kertymäfunktio
11. Jakaumien tunnusluvut
12. Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat
13. Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio
14. Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat
15. Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Todennäköisyysjakaumia

16. Diskreettejä jakaumia
17. Jatkuvia jakaumia
18. Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia
19. Moniulotteisia jakaumia

Liitteet

- L1. Joukko-oppi
- L2. Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit

Sisällys

Todennäköisyys ja sen laskusäännöt	1
1. JOHDANTO	7
1.1. DETERMINISTISYYS JA SATUNNAISUUS	8
DETERMINISTISYYS	8
SATUNNAISUUS	8
1.2. SATUNNAISKOKEET JA KOETOISTOT	9
1.3. SATUNNAISUUS JA TILASTOLLINEN STABILITEETTI	9
TILASTOTIEDE, TILASTOLLINEN STABILITEETTI JA REILUT PELIT	10
1.4. TILASTOLLINEN TUTKIMUS PELINÄ LUONTOA VASTAAN	11
1.5. TODENNÄKÖISYYDEN MÄÄRITTELEMINEN	12
KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS	12
ONGELMAT KLASSISEN TODENNÄKÖISYYDEN MÄÄRITELMÄSSÄ	13
KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS JA TODENNÄKÖISYYDEN FREKVENSSITULKINTA	13
EMPIIRINEN TODENNÄKÖISYYS	14
ONGELMAT EMPIIRISEN TODENNÄKÖISYYDEN MÄÄRITELMÄSSÄ	14
EMPIIRINEN TODENNÄKÖISYYS JA TODENNÄKÖISYYDEN FREKVENSSITULKINTA	15
TODENNÄKÖISYYS MITTANA	16
ONGELMAT TODENNÄKÖISYYDEN NAIIVISSA MÄÄRITELMÄSSÄ MITTANA	17
KOLMOGOROVIN AKSIOOMAT	17
1.6. SATUNNAISILMIÖT JA NIIDEN TILASTOLLISET MALLIT	17
2. JOUKKO-OPIN PERUSKÄSITTEET	19
2.1. JOUKKO JA SEN ALKIOT	20
2.2. VENN-DIAGRAMMIT	21
2.3. OSAJOUKKO	21
2.4. TYHJÄ JOUKKO	22
2.5. JOUKKO-OPIN PERUSOPERAATIOI	22
KOMPLEMENTTIJOUKKO	22
YHDISTE	22
LEIKKAUS	23
PISTEVIERAAT JOUKOT	23
EROTUS	24
3. TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSKÄSITTEET	25
3.1. SATUNNAISILMIÖT	26
3.2. TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSKÄSITTEET	26
3.3. TODENNÄKÖISYYS JA SEN PERUSOMINAISUUDET	28
TODENNÄKÖISYYDEN PERUSOMINAISUUDET	28
TODENNÄKÖISYYKSIEN VERTAILU	28
TODENNÄKÖISYYKSIEN VERTAILU JA TODENNÄKÖISYYDEN FREKVENSSITULKINTA	29
3.4. KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS	29
SYMMETRISET ALKEISTAPAHTUMAT	29
ALKEISTAPAHTUMIEN SYMMETRIA JA UHKAPELIT	29
LUKUMÄÄRÄFUNKTIO	29
KLASSISEN TODENNÄKÖISYYDEN MÄÄRITELMÄ	30
3.5. EMPIIRINEN TODENNÄKÖISYYS	30
3.6. TODENNÄKÖISYYS MITTANA	31
3.7. TODENNÄKÖISYYDEN FREKVENSSITULKINTA	31

4.	TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSLASKUSÄÄNNÖT	32
4.1.	TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSOPERAATIOT JA -LASKUSÄÄNNÖT	33
4.2.	TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSOPERAATIOT	33
	VENN-DIAGRAMMIT	33
	TAPAHTUMAN A KOMPLEMENTTI	34
	TAPAHTUMIEN A JA B YHDISTE	34
	TAPAHTUMIEN A JA B LEIKKAUS	35
	TAPAHTUMIEN A JA B EROTUS	35
4.3.	TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSLASKUSÄÄNNÖT	35
	KOMPLEMENTTITAPAHTUMAN TODENNÄKÖISYYS	37
	YHTEENLASKUSÄÄNTÖ TOISENSA POISSULKEVILLE TAPAHTUMILLE	38
	YLEISTETTY YHTEENLASKUSÄÄNTÖ TOISENSA POISSULKEVILLE TAPAHTUMILLE	38
	TAPAHTUMIEN RIIPPUMATTOMUUS	38
	RIIPPUMATTOMUUS VS RIIPPUVUUS	39
	TULOSÄÄNTÖ RIIPPUMATTOMILLE TAPAHTUMILLE	39
	YLEISTETTY TULOSÄÄNTÖ RIIPPUMATTOMILLE TAPAHTUMILLE	41
	YLEINEN YHTEENLASKUSÄÄNTÖ	42
	EROTUSTAPAHTUMAN TODENNÄKÖISYYS	43
	TAPAHTUMASTA B SEURAA TAPAHTUMA A	43
	EROTUSTAPAHTUMAN TODENNÄKÖISYYS, JOS TAPAHTUMASTA B SEURAA TAPAHTUMA A	44
	YHDISTEEN TODENNÄKÖISYYS	44
4.4.	EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS JA RIIPPUMATTOMUUS	44
	EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS	44
	RIIPPUMATTOMUUS	47
	YLEINEN TULOSÄÄNTÖ	49
	SATUNNAISOTANTA JA TULOSÄÄNNÖT	50
5.	KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS JA KOMBINATORIIKKA	51
5.1.	KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS	52
5.2.	KOMBINATORIIKAN PERUSPERIAATTEET	52
5.3.	KOMBINATORIIKAN PERUSONGELMAT	53
5.4.	KOMBINATORIIKAN PERUSONGELMIEN RATKAISEMINEN	55
	PERMUTAATIO	55
	N-KERTOMA	56
	VARIAATIO	57
	KOMBINAATIO	58
	PERMUTAATIOT, VARIAATIOT, KOMBINAATIOT	59
	PASCALIN KOLMIO	61
	PASCALIN KOLMIO JA BINOMIKERTOIMET	61
	BINOMIKAAVA	62
	ÄÄRELLISEN JOUKON OSAJOUKKOJEN LUKUMÄÄRÄ	64
	ESIMERKKEJÄ LUKUMÄÄRIEN LASKEMISESTA	65
5.5.	MULTINOMIKERROIN	66
6.	TODENNÄKÖISYYDEN AKSIOOMAT	68
6.1.	TODENNÄKÖISYYS ÄÄRELLISISSÄ OTOSAVARUUKSISSA	69
	BOOLEN ALGEBRAT	69
	TODENNÄKÖISYYDEN AKSIOOMAT ÄÄRELLISISSÄ OTOSAVARUUKSISSA	71
	ÄÄRELLINEN TODENNÄKÖISYYSKENTTÄ	75
	RIIPPUMATTOMUUS JA RIIPPUMATTOMIEN TAPAHTUMIEN TULOSÄÄNTÖ	75
6.2.	KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS, SUHTEELLINEN FREKVENSSI JA EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS TODENNÄKÖISYYKSINÄ	75
	KLASSINEN TODENNÄKÖISYYS TODENNÄKÖISYYTENÄ	75
	SUHTEELLINEN FREKVENSSI TODENNÄKÖISYYTENÄ	77

EMPIIRINEN TODENNÄKÖISYYS	78
TODENNÄKÖISYYDEN FREKVENSSTULKINTA	78
EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS TODENNÄKÖISYYTENÄ	79
6.3. TODENNÄKÖISYYS MIELIVALTAISISSA OTOSAVARUUKSISSA	80
σ-ALGEBRAT	80
KOLMOGOROVIN AKSIOOMAT	82
TODENNÄKÖISYYSKENTTÄ	83
MITALLISET JA EPÄMITALLISET JOUKOT	83
KOLMOGOROVIN AKSIOOMIEN SEURAUKSIA	84
7. KOKONAISTODENNÄKÖISYYDEN JA BAYESIN KAAVAT	89
7.1. JOHDATTELEVA ESIMERKKI	90
7.2. OSITUKSET	92
7.3. KOKONAISTODENNÄKÖISYYDEN KAAVA	92
7.4. BAYESIN KAAVA	94
7.5. KOKONAISTODENNÄKÖISYYDEN KAAVAN JA BAYESIN KAAVAN SYSTEEMITEOREETTINEN TULKINTA	95
8. VERKOT JA TODENNÄKÖISYYSLASKENTA	97
8.1. JOHDATTELEVA ESIMERKKI	98
8.2. PUUDIAGRAMMIT JA TODENNÄKÖISYYSLASKENTA	99
VERKOT	99
PUUT	100
PUIDEN KONSTRUOINTI	100
PUUTODENNÄKÖISYYDET	101
TULOSÄÄNTÖ PUUTODENNÄKÖISYYKSILLE	101
YHTEENLASKUSÄÄNTÖ PUUTODENNÄKÖISYYKSILLE	102
PÄÄTÖSPUUT: ESIMERKKI	103
8.3. TOIMINTAVERKOT JA TOIMINTATODENNÄKÖISYYDET	104
TOIMINTAVERKOT	104
SARJAAN KYTKENNÄN TOIMINTATODENNÄKÖISYYS	105
RINNANKYTKENNÄN TOIMINTATODENNÄKÖISYYS	106
SOVELLUS	106
Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat	109
9. SATUNNAISMUUTTUUJAT JA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT	117
9.1. SATUNNAISMUUTTUUJAT JA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT: JOHDATTELEVIA ESIMERKKEJÄ	118
9.2. SATUNNAISMUUTTUUJAT JA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT: MÄÄRITELMÄT	121
SATUNNAISMUUTTUJA	121
TODENNÄKÖISYYSJAKAUMA	122
TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT TILASTOLLISINA MALLEINA	122
SATUNNAISMUUTTUJIEN TYPPEJÄ	123
9.3. DISKREETIT SATUNNAISMUUTTUJAT JA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT	124
JOHDATTELEVA ESIMERKKI	124
DISKREETTI SATUNNAISMUUTTUJA	126
DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	127
DISKREETTI TODENNÄKÖISYYSJAKAUMA	128
PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTION KUVAAJA	128
PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTION KUVAAJAN KONSTRUOINTI	128
DISKREETTI TODENNÄKÖISYYSJAKAUMA JA REAALIAKSELIN VÄLIEN TODENNÄKÖISYYDET	129
TODENNÄKÖISYYKSIEN VERTAILU	129

	DISKREETTIEN TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIEN PARAMETROINTI	130
	HAVAINNOLLISTUS: GEOMETRINEN JAKAUMA	130
	DISKREETTEJÄ TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA	133
9.4.	JATKUVAT SATUNNAISMUUTTUJAT JA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAT	134
	JOHDATTELEVA ESIMERKKI	134
	JATKUVA SATUNNAISMUUTTUJA	135
	JATKUVAN SATUNNAISMUUTTUJAN TIHEYSFUNKTIO	136
	TIHEYSFUNKTION KUVAAJA	136
	JATKUVA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMA JA REAALIAKSELIN VÄLIEN TODENNÄKÖISYYDET	136
	TODENNÄKÖISYYKSIEN VERTAILU	138
	JATKUVIEN TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIEN PARAMETROINTI	139
	HAVAINNOLLISTUS: EKSPONENTTIJAKAUMA	139
	JATKUVIA TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA	141
9.5.	DISKREETIT JAKAUMAT VS JATKUVAT JAKAUMAT	141
10.	KERTYMÄFUNKTIO	143
10.1.	KERTYMÄFUNKTIO JA SEN OMINAISUUDET	144
10.2.	DISKREETIN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	147
	DISKREETIN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTION JA KERTYMÄFUNKTION YHTEYS	148
	DISKREETIN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTION KUVAAJA	148
	DISKREETTI JAKAUMA JA REAALIAKSELIN VÄLIEN TODENNÄKÖISYYDET	148
	DISKREETIN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO JA KERTYMÄFUNKTIO: HAVAINNOLLISTUS	149
10.3.	JATKUVAN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	150
	JATKUVAN JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION JA KERTYMÄFUNKTION YHTEYS	151
	JATKUVAN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTION KUVAAJA	151
	JATKUVA JAKAUMA JA REAALIAKSELIN VÄLIEN TODENNÄKÖISYYDET	151
	JATKUVAN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO JA KERTYMÄFUNKTIO: HAVAINNOLLISTUS	152
11.	JAKAUMIEN TUNNUSLUVUT	153
11.1.	ODOTUSARVO	154
	JOHDATTELEVA ESIMERKKI	154
	DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN ODOTUSARVO	156
	JATKUVAN SATUNNAISMUUTTUJAN ODOTUSARVO	157
11.2.	ODOTUSARVON OMINAISUUDET	159
	ODOTUSARVON OLEMASSAOLO	159
	ODOTUSARVO TODENNÄKÖISYYSJAKAUMAN TODENNÄKÖISYYSMASSAN PAINOPISTEENÄ	159
	VAKION ODOTUSARVO	159
	LINEAARIMUUNNOKSEN ODOTUSARVO	159
	ODOTUSARVON TULKINTA JAKAUMAN SIJAIN TIPARAMETRINA	160
	SUMMAN JA EROTUKSEN ODOTUSARVOT	161
	LINEAARIKOMBINAATION ODOTUSARVO	162
11.3.	YLEINEN ODOTUSARVO	162
	DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN FUNKTION ODOTUSARVO	162
	JATKUVAN SATUNNAISMUUTTUJAN FUNKTION ODOTUSARVO	162
11.4.	VARIANSSI JA STANDARDIPOIKKEAMA	163
	VARIANSSI	163
	VARIANSSIN VAIHTOEHTOINEN LASKUKAAVA	163
	STANDARDIPOIKKEAMA	163
	VARIANSSIN JA STANDARDIPOIKKEAMAN DIMENSIOT	164
	VARIANSSIN JA STANDARDIPOIKKEAMAN TULKINTA	164
	DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN VARIANSSI	164
	JATKUVAN SATUNNAISMUUTTUJAN VARIANSSI	166

11.5. VARIANSSIN OMINAISUUDET	167
VARIANSSIN OLEMASSAOLO	167
VAKION VARIANSSI	167
LINEAARIMUUNNOKSEN VARIANSSI	168
STANDARDOINTI	168
SUMMAN JA EROTUKSEN VARIANSSI	169
LINEAARIKOMBINAATION VARIANSSI	170
EMPIIRISEN JAKAUMAN ODOTUSARVO JA VARIANSSI	170
ARITMEETTISEN KESKIARVON ODOTUSARVO JA VARIANSSI	171
11.6. MARKOVIN JA TSHEBYSHEVIN EPÄYHTÄLÖT	172
MARKOVIN EPÄYHTÄLÖ	172
TSHEBYSHEVIN EPÄYHTÄLÖ	173
11.7. MOMENTIT	174
MOMENTTIEN OLEMASSAOLO	175
11.8. VINOUS JA HUIPUKUUUS	175
VINOUS	175
HUIPUKUUUS	176
11.9. KVANTIILIT	177
KVANTIILIN MÄÄRITELMÄ	177
KVANTIILIEEN OMINAISUUKSIA	177
KVANTIILIT JA TILASTOLLISET TAULUKOT	178
PROSENTTIPISTEET	178
DESIILIT	179
KVARTILIT	179
MEDIAANI	179
11.10. MOODI	180
11.11. SUURTEN LUKUJEN LAKI	181
12. MONIULOTTEISET SATUNNAISMUUTTUJAT JA JAKAUMAT	184
12.1. JOHDANTO	185
12.2. KAKSIULOTTEISET SATUNNAISMUUTTUJAT	185
12.3. DISKREETIT KAKSIULOTTEISET JAKAUMAT	185
DISKREETIT KAKSIULOTTEISET JAKAUMAT JA TAPAHTUMIEN TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN	186
DISKREETIT KAKSIULOTTEISET JAKAUMAT JA SYMMETRISET TODENNÄKÖISYYSKENTÄT	186
12.4. JATKUVAT KAKSIULOTTEISET JAKAUMAT	191
JATKUVAT KAKSIULOTTEISET JAKAUMAT JA TAPAHTUMIEN TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN	192
12.5. KAKSIULOTTEISTEN JAKAUMIEN KERTYMÄFUNKTIOT	192
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	192
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	192
12.6. KAKSIULOTTEISTEN JAKAUMIEN REUNAJAKAUMAT JA RIIPPUMATTOMUUS	192
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN REUNAJAKAUMAT	192
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN REUNAJAKAUMAT	196
SATUNNAISMUUTTUJIEN RIIPPUMATTOMUUS	196
USEAMMAN SATUNNAISMUUTTUJAN RIIPPUMATTOMUUS	197
SATUNNAISMUUTTUJIEN RIIPPUMATTOMUUS JA TAPAHTUMIEN TODENNÄKÖISYYS	197
12.7. KAKSIULOTTEISTEN JAKAUMIEN ODOTUSARVOT	199
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN YLEINEN ODOTUSARVO	199
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN YLEINEN ODOTUSARVO	199
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN REUNAJAKAUMIEN ODOTUSARVOT	200
12.8. ODOTUSARVON OMINAISUUDET	201
ODOTUSARVO PAINOPISTEENÄ	201
SUMMAN JA EROTUKSEN ODOTUSARVOT	201
LINEAARIKOMBINAATION ODOTUSARVO	201
SATUNNAISMUUTTUJIEN RIIPPUMATTOMUUS JA TULON ODOTUSARVO	202
12.9. KAKSIULOTTEISTEN JAKAUMIEN VARIANSSIT JA STANDARDIPOIKKEAMAT	203

REUNAJAKAUMIEN VARIANSSIT	203
VAIHTOEHTOISET LASKUKAAVAT VARIANSSEILLE	203
STANDARDIPOIKKEAMAT	204
VARIANSSIN JA STANDARDIPOIKKEAMAN TULKINTA	204
VARIANSSIN JA STANDARDIPOIKKEAMAN DIMENSIOT	204
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN VARIANSSIT	204
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN VARIANSSIT	207
12.10. KOVARIANSSI	207
VAIHTOEHTOINEN LASKUKAAVA KOVARIANSSILLE	207
KOVARIANSSIN TULKINTA	208
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN KOVARIANSSI	208
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN KOVARIANSSI	208
12.11. KOVARIANSSIN OMINAISUUDET	208
SATUNNAISMUUTTUJIEN LINEAARIMUUNNOSTEN KOVARIANSSI	208
SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JA EROTUKSEN VARIANSSIT	209
KORRELOIMATTOMUUS	210
SATUNNAISMUUTTUJIEN RIIPPUMATTOMUUS JA KOVARIANSSI	210
RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JA EROTUKSEN VARIANSSI	211
12.12. KORRELAATIO	211
KORRELAATIOKERTOIMEN DIMENSIO	211
12.13. KORRELAATIOKERTOIMEN OMINAISUUDET	211
KORRELAATIO JA KOVARIANSSI	211
SATUNNAISMUUTTUJIEN LINEAARIMUUNNOSTEN KORRELAATIO	211
KORRELAATIOKERTOIMEN TULKINTA	217
KORRELOIMATTOMUUS	218
12.14. EHDOLLISET JAKAUMAT	220
EHDOLLINEN TODENNÄKÖISYYS	220
EHDOLLISET JAKAUMAT	220
EHDOLLISET JAKAUMAT JA EHTOMUUTTUJA	220
EHDOLLISET JAKAUMAT JA RIIPPUMATTOMUUS	220
12.15. EHDOLLISET ODOTUSARVOT	221
DISKREETIN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN EHDOLLISET ODOTUSARVOT	221
JATKUVAN KAKSIULOTTEISEN JAKAUMAN EHDOLLISET ODOTUSARVOT	221
EHDOLLISET ODOTUSARVOT JA EHTOMUUTTUJA	221
EHDOLLISET ODOTUSARVOT JA RIIPPUMATTOMUUS	222
ITEROIDUN ODOTUSARVON LAIT	222
REGRESSIOFUNKTIOT JA -KÄYRÄT	223
REGRESSIOFUNKTIOT JA ENNUSTAMINEN	223
HAVAINNOLLISTUKSIA	224
13. MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA KARAKTERISTINEN FUNKTIO	235
13.1. MOMENTTIEMÄFUNKTIO	236
MOMENTTIEMÄFUNKTION OLEMASSAOLO	236
MOMENTTIEMÄFUNKTION YKSIKÄSITTEISYYS	236
MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA SATUNNAISMUUTTUJAN MOMENTIT	237
MOMENTTIEMÄFUNKTION TAYLORIN SARJAKEHITELMÄ	237
RIIPPUMATTOMIEN SAMOIN JAKAUTUNEIDEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	239
RIIPPUMATTOMIEN SAMOIN JAKAUTUNEIDEN SATUNNAISMUUTTUJIEN ARITMEETTISEN KESKIARVON MOMENTTIEMÄFUNKTIO	240
DISKREETIN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	241
JATKUVAN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	241
13.2. KARAKTERISTINEN FUNKTIO	241
KARAKTERISTISEN FUNKTION OLEMASSAOLO	242
INVERSIOTEOREEMA	242
KARAKTERISTISEN FUNKTION YKSIKÄSITTEISYYS	242
KARAKTERISTINEN FUNKTIO JA MOMENTTIEMÄFUNKTIO	243
KARAKTERISTISEN FUNKTION OMINAISUUDET	243

DISKREETIN SATUNNAISMUUTTUJAN KARAKTERISTINEN FUNKTIO	243
JATKUVAN SATUNNAISMUUTTUJAN KARAKTERISTINEN FUNKTIO	243
KARAKTERISTINEN FUNKTIO JA SATUNNAISMUUTTUJAN MOMENTIT	244
KARATERISTISEN FUNKTION TAYLORIN SARJAKEHITELMÄ	245
RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN KARAKTERISTINEN FUNKTIO	245
RIIPPUMATTOMIEN SAMOIN JAKAUTUNEIDEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN KARAKTERISTINEN FUNKTIO	245
RIIPPUMATTOMIEN SAMOIN JAKAUTUNEIDEN SATUNNAISMUUTTUJIEN ARITMEETTISEN KESKIARVON KARAKTERISTINEN FUNKTIO	246
14. SATUNNAISMUUTTUJIEN MUUNNOSTEN JAKAUMAT	247
14.1. SATUNNAISMUUTTUJAN LINEAARIMUUNNOKSEN JAKAUMA	248
14.2. SATUNNAISMUUTTUJAN MONOTONISEN MUUNNOKSEN JAKAUMA	250
LINEAARIMUUNNOKSEN JAKAUMA	252
CAUCHY-JAKAUMA	253
14.3. SATUNNAISMUUTTUJAN EI-MONOTONISEN MUUNNOKSEN JAKAUMA	254
$\chi^2(1)$ -JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	254
14.4. KAKSIULOTTEISTEN SATUNNAISMUUTTUJIEN MUUNNOSTEN JAKAUMAT	255
NORMAALIJAKAUTUNEIDEN SATUNNAISLUKUJEN GENEROINTI	255
14.5. RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JAKAUMA	258
$\chi^2(N)$ -JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	259
14.6. RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN OSAMÄÄRÄN JAKAUMA	263
F-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	264
t-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	267
14.7. RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN MINIMIN JA MAKSIMIN JAKAUMAT	269
RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN MINIMIN JAKAUMA	269
RIIPPUMATTOMIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN MAKSIMIN JAKAUMA	271
15. STOKASTIIKAN KONVERGENSSIKÄSITTEET JA RAJA-ARVOLAUSEET	274
15.1. SATUNNAISMUUTTUJIEN JONOT	275
15.2. VARMA KONVERGENSSI	275
15.3. MELKEIN VARMA KONVERGENSSI	276
15.4. KVADRAATTINEN KONVERGENSSI	277
SOVELLUS: RIIPPUMATTOMIEN SAMOIN JAKAUTUNEIDEN SATUNNAISMUUTTUJIEN ARITMEETTISTEN KESKIARVOJEN MUODOSTAMAN JONON KVADRAATTINEN KONVERGENSSI	278
15.5. STOKASTINEN KONVERGENSSI	278
SOVELLUS: RIIPPUMATTOMIEN SAMAA NORMAALIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN ARITMEETTISTEN KESKIARVOJEN MUODOSTAMAN JONON STOKASTINEN KONVERGENSSI	279
15.6. JAKAUMAKONVERGENSSI	280
15.7. STOKASTIIKAN KONVERGENSSIKÄSITTEIDEN YHTEYDET	281
15.8. SUURTEN LUKUJEN LAIT	282
VAHVA SUURTEN LUKUJEN LAKI	282
HEIKKO SUURTEN LUKUJEN LAKI	283
SUURTEN LUKUJEN LAIT: KOMMENTTEJA	284
SUURTEN LUKUJEN LAKI: SUHTEELLISEN FREKVENSSIN ASYMPTOOTTINEN KÄYTTÄYTYMINEN	284
15.9. KESKEINEN RAJA-ARVOLAUSE	286
KESKEINEN RAJA-ARVOLAUSE: KOMMENTTEJA	290
KESKEINEN RAJA-ARVOLAUSE: BINOMIJAKAUMAN, HYPERGEOMETRISEN JAKAUMAN JA POISSON-JAKAUMAN ASYMPTOOTTISET JAKAUMAT	290

Todennäköisyysjakaumia **293**

16. DISKREETTEJÄ JAKAUMIA **299**

16.1. DISKREETTI TASAINEN JAKAUMA **300**

DISKREETIN TASAISEN JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	300
DISKREETIN TASAISEN JAKAUMAN ODOTUSARVON JA VARIANSSIN OMINAISUUDET	301
DISKREETIN TASAISEN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	302
DISKREETIN TASAISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	302
DISKREETIN TASAISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	303

16.2. BERNOULLI-JAKAUMA **304**

BERNOULLI-KOKEET	304
BERNOULLI-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	305
BERNOULLI-JAKAUMAN ODOTUSARVON JA VARIANSSIN OMINAISUUDET	305
BERNOULLI-JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	305
BERNOULLI-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	306
BERNOULLI-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	306
BERNOULLI-JAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUIJEN SUMMAN JAKAUMA	307
BERNOULLI-KOKEET DISKREETTIEN TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIEN PERUSTANA	308

16.3. BINOMIJAKAUMA **308**

BINOMIJAKAUMAN JOHTO	309
BINOMIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	310
ODOTUSARVON OMINAISUUDET	311
BINOMIJAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	311
BINOMIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	312
BINOMIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	312
BINOMIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUIJEN SUMMAN JAKAUMA	313
BINOMIJAKAUMA JA BERNOULLI-JAKAUMA	314
BERNOULLI-JAKAUMA JA BINOMIJAKAUMAN ODOTUSARVO JA VARIANSSI	315
BINOMIJAKAUMA JA OTANTA PALAUTTAEN	316

16.4. GEOMETRINEN JAKAUMA **317**

GEOMETRISEN JAKAUMAN JOHTO	317
GEOMETRISEN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	318
GEOMETRISEN JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	318
ODOTUSARVON OMINAISUUDET	319
GEOMETRISEN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	319
GEOMETRISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	320
GEOMETRISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	320
GEOMETRISEN JAKAUMAN UNOHTAMISOMINAISUUS	321

16.5. NEGATIIVINEN BINOMIJAKAUMA **322**

NEGATIIVISEN BINOMIJAKAUMAN JOHTO	322
NEGATIIVISEN BINOMIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	323
ODOTUSARVON OMINAISUUDET	324
NEGATIIVISEN BINOMIJAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	324
NEGATIIVISEN BINOMIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	325
NEGATIIVISEN BINOMIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	325
NEGATIIVINEN BINOMIJAKAUMA JA GEOMETRINEN JAKAUMA	326

16.6. HYPERGEOMETRINEN JAKAUMA **327**

HYPERGEOMETRISEN JAKAUMAN JOHTO	327
HYPERGEOMETRISEN JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	329
ODOTUSARVON OMINAISUUDET	330
HYPERGEOMETRISEN JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	330
HYPERGEOMETRINEN JAKAUMA JA BINOMIJAKAUMA	331
HYPERGEOMETRINEN JAKAUMA JA OTANTA PALAUTTAMATTA	332
OTANTA PALAUTTAEN JA PALAUTTAMATTA	333

16.7. POISSON-JAKAUMA **334**

POISSON-JAKAUMAN JOHTO	334
POISSON-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	335
ODOTUSARVON OMINAISUUDET	336
POISSON-JAKAUMAN PISTETODENNÄKÖISYYSFUNKTIO	336
POISSON-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	337
POISSON-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	337
POISSON-JAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JAKAUMA	338
POISSON-JAKAUMA JA BINOMIJAKAUMA	339
POISSON-JAKAUMA JA EKSPONENTTIJAKAUMA	341
17. JATKUVIA JAKAUMIA	342
17.1. JATKUVA TASAINEN JAKAUMA	343
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	344
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	344
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	345
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	345
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	346
JATKUVAN TASAISEN JAKAUMAN TODENNÄKÖISYYDET	347
17.2. EKSPONENTTIJAKAUMA	347
EKSPONENTTIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	348
EKSPONENTTIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	348
EKSPONENTTIJAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	349
EKSPONENTTIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	349
EKSPONENTTIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	350
EKSPONENTTIJAKAUMA JA POISSON-JAKAUMA	351
EKSPONENTTIJAKAUMAN UNOHTAMISOMINAISUUS	352
17.3. NORMAALIJAKAUMA	353
NORMAALIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	355
NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	356
NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	357
NORMAALIJAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	358
NORMAALIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	359
NORMAALIJAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	359
STANDARDOITU NORMAALIJAKAUMA	360
NORMAALIJAKAUTUNEEN SATUNNAISMUUTTUJAN LINEAARIMUUNNOKSEN JAKAUMA	361
STANDARDOINTI	362
TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN STANDARDOIDUSTA NORMAALIJAKAUMASTA	362
TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN STANDARDOIDUSTA NORMAALIJAKAUMASTA JA NORMAALIJAKAUMAN TAULUKOT	363
TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN MIELIVALTAISESTA NORMAALIJAKAUMASTA	364
TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN NORMAALIJAKAUMASTA JA TIETOKONEOHJELMAT	366
NORMAALIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JAKAUMA	366
NORMAALIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN LINEAARIKOMBINAATION JAKAUMA	367
SAMAA NORMAALIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN SUMMAN JAKAUMA	368
NORMAALIJAKAUMAA NOUDATTAVIEN SATUNNAISMUUTTUJIEN ARITMEETTISEN KESKIARVON JAKAUMA	368
17.4. KESKEINEN RAJA-ARVOLAUSE	369
KESKEISEN RAJA-ARVOLAUSEEN SOVELLUKSIA: BINOMIJAKAUMAN APPROKSIMOINTI NORMAALIJAKAUMALLA	371
DE MOIVREN JA LAPLACEN RAJA-ARVOLAUSEEN HAVAINNOLLISTUS	372
BINOMITODENNÄKÖISYYKSIEN APPROKSIMOINTI NORMAALIJAKAUMAN AVULLA	374
KESKEISEN RAJA-ARVOLAUSEEN SOVELLUKSIA: HYPERGEOMETRISEN JAKAUMAN APPROKSIMOINTI NORMAALIJAKAUMAN AVULLA	376

	KESKEISEN RAJA-ARVOLAUSEEN SOVELLUKSIA: POISSON-JAKAUMAN APPROKSIMOINTI	
	NORMAALIJAKAUMALLA	376
17.5.	LOG-NORMAALIJAKAUMA	378
	LOG-NORMAALIJAKAUMAN JOHTO	378
	LOG-NORMAALIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	379
	LOG-NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	380
	LOG-NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	380
	LOG-NORMAALIJAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	380
17.6.	CAUCHY-JAKAUMA	380
	CAUCHY-JAKAUMAN JOHTO	381
	CAUCHY-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	381
	CAUCHY-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	382
	CAUCHY-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	382
	CAUCHY-JAKAUMA JA t-JAKAUMA	382
17.7.	GAMMA-JAKAUMA	382
	GAMMA-FUNKTIO	383
	GAMMA-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	384
	GAMMA-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	386
	GAMMA-JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	386
	GAMMA-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO	386
	GAMMA-JAKAUMAN MOMENTTIEMÄFUNKTIO JA JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	387
	GAMMA-JAKAUMA JA POISSON-JAKAUMA	388
	GAMMA-JAKAUMA JA EKSPONENTTIJAKAUMA	388
	GAMMA-JAKAUMA JA χ^2 -JAKAUMA	388
17.8.	BETA-JAKAUMA	389
	BETA-FUNKTIO	389
	BETA-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	389
	BETA-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	390
	BETA-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	391
	BETA-JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	392
	BETA-JAKAUMA JA JATKUVA TASAINEN JAKAUMA	392
17.9.	WEIBULL-JAKAUMA	392
	WEIBULL-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	393
	WEIBULL-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	394
	WEIBULL-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	395
	WEIBULL-JAKAUMAN KERTYMÄFUNKTIO	395
	WEIBULL-JAKAUMA JA EKSPONENTTIJAKAUMA	395
18.	NORMAALIJAKAUMASTA JOHDETTUA JAKAUMIA	396
18.1.	χ^2-JAKAUMA	397
	χ^2 -JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	397
	χ^2 -JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	398
	χ^2 -JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	398
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN χ^2 -JAKAUMASTA	398
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN χ^2 -JAKAUMASTA JA χ^2 -JAKAUMAN TAULUKOT	399
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN χ^2 -JAKAUMASTA JA TIETOKONEOHJELMAT	400
18.2.	F-JAKAUMA	400
	F-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	401
	F-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	401
	F-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	402
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN F-JAKAUMASTA	402
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN F-JAKAUMASTA JA F-JAKAUMAN TAULUKOT	402
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN F-JAKAUMASTA JA TIETOKONEOHJELMAT	404
18.3.	t-JAKAUMA	405
	t-JAKAUMAN TUNNUSLUVUT	405
	t-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO	406
	t-JAKAUMAN TIHEYSFUNKTION OMINAISUUDET	406
	TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN t-JAKAUMASTA	406

TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN t-JAKAUMASTA JA t-JAKAUMAN TAULUKOT	407
TODENNÄKÖISYYKSIEN MÄÄRÄÄMINEN t-JAKAUMASTA JA TIETOKONEOHJELMAT	408
t-JAKAUMA JA F-JAKAUMA	408
t-JAKAUMA JA CAUCHY-JAKAUMA	408
t-JAKAUMA JA NORMAALIJAKAUMA	409
19. MONIULOTTEISIA JAKAUMIA	410
19.1. MULTINOMIJAKAUMA	411
MULTINOMIJAKAUMAN OMINAISUUDET	412
19.2. KAKSIULOTTEINEN NORMAALIJAKAUMA	413
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN JOHTO	413
KAKSIULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN TUNNUSLUVUT	418
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN TIHEYSFUNKTIO JA SEN OMINAISUUDET	418
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN ODOTUSARVOVEKTORI JA KOVARIANSSIMATRIISI	419
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN REUNAJAKAUMAT	422
2-ULOTTEINEN NORMAALIJAKAUMA, KORRELOIMATTOMUUS JA RIIPPUMATTOMUUS	422
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET JAKAUMAT	423
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET ODOTUSARVOT	424
REGRESSIOSUORIEEN OMINAISUUDET	425
REGRESSIOSUORIEEN YHTÄLÖT JA STANDARDOINTI	426
YHTEISKORRELAATIOKERROIN	427
2-ULOTTEISEN NORMAALIJAKAUMAN EHDOLLISET VARIANSSIT	427
ESIMERKKI 2-ULOTTEISESTA NORMAALIJAKAUMASTA	427
Liitteet	435
1. JOUKKO-OPPI	475
1.1. JOUKKO-OPIN PERUSKÄSITTEET	476
JOUKKOJEN MÄÄRITTELEMINEN	476
NUMEROITUVAT JOUKOT	477
YLINUMEROITUVAT JOUKOT	478
JOUKKOJEN SAMUUS	478
OSAJOUKKO	479
VENN-DIAGRAMMIT	479
TYHJÄ JOUKKO	480
PERUSJOUKKO	480
ONGELMAT JOUKON KÄSITTEEN NAIIVISSA MÄÄRITELMÄSSÄ	480
NAIIVIN JOUKKO-OPIN PARADOKSIT	481
1.2. JOUKKO-OPIN PERUSOPERAATIOIT	481
KOMPLEMENTTIJOUKKO	481
YHDISTE	482
LEIKKAUS	482
DE MORGANIN LAIT	483
PISTEVIERAAT JOUKOT	483
EROTUS	484
YHDISTE PISTEVIERAIDEN JOUKKOJEN YHDISTEENÄ	485
SYMMETRINEN EROTUS	485
1.3. JOUKKO-OPIN LASKUSÄÄNNÖT	486
OSAJOUKKO-RELAATIO JA JOUKKO-OPIN OPERAATIOIT	486
JOUKKOJEN ALGEBRAN LASKUSÄÄNNÖT	487
1.4. FUNKTIOT	488
FUNKTIO	488
KUVA	488
FUNKTION MÄÄRITTELYALUE JA ARVOALUE	489

FUNKTIOIDEN SAMUUS	489
SURJEKTIO, INJEKTIO, BIJEKTIO	489
IDENTTINEN FUNKTIO	490
VAKIOFUNKTIO	490
YHDISTETTY FUNKTIO	490
YHDISTETYN FUNKTION OMINAISUUKSIA	491
KÄÄNTEISFUNKTIO	491
KÄÄNTEISFUNKTION OMINAISUUKSIA	492
1.5. TULOJOUKOT JA FUNKTIOIDEN KUVAAJAT	493
JÄRJESTETTY PARI	493
KARTEESINEN TULO	493
FUNKTION KUVAAJA	493
FUNKTION KUVAAJAN OMINAISUUDET	494
YLEISTETTY KARTEESINEN TULO	495
1.6. JOUKKO-OPIN PERUSOPERAATIOIDEN YLEISTYKSET	495
JOUKKOPERHEET	495
POTENSSIJOUKOT	496
INDEKSOIDUT JOUKKOPERHEET	496
YLEISTETYT JOUKKO-OPERAATIOT	497
YLEISTETYT DISTRIBUTIOLAIT	498
YLEISTETYT DE MORGANIN LAIT	498
OSITUKSET	498
1.7. BOOLEN ALGEBRAT	498
BOOLEN ALGEBRAN AKSIOOMAT	498
BOOLEN ALGEBROIDEN OMINAISUUDET	499
1.8. σ-ALGEBRAT	501
σ -ALGEBRAN AKSIOOMAT	501
σ -ALGEBROIDEN OMINAISUUDET	501
2. TODENNÄKÖISYSSLASKENTA JA PUUDIAGRAMMIT	503
2.1. VERKOT	504
VERKON MÄÄRITELMÄ	504
REITTI JA SILMUKKA	505
VERKON YHTENÄISYYS	506
2.2. PUUT	507
PUUN MÄÄRITELMÄ	507
PUUN OMINAISUUDET	507
PUUDIAGRAMMI	507
2.3. PUUTODENNÄKÖISYYDET	508
PUUTODENNÄKÖISYYDET	510
TULOSÄÄNTÖ PUUTODENNÄKÖISYYKSILLE	510
YHTEENLASKUSÄÄNTÖ PUUTODENNÄKÖISYYKSILLE	511
2.4. PUUT JA TODENNÄKÖISYSSLASKENNAN PERUSLASKUSÄÄNNÖT	511
KOMPLEMENTTITAPAHTUMAN TODENNÄKÖISYYS	512
YLEINEN TULOSÄÄNTÖ	512
TULOSÄÄNTÖ RIIPPUMATTOMILLE TAPAHTUMILLE	513
YLEINEN YHTEENLASKUSÄÄNTÖ	513
YHTEENLASKUSÄÄNTÖ TOISENSA POISSULKEVILLE TAPAHTUMILLE	515
EROTUSTAPAHTUMAN TODENNÄKÖISYYS	516
KOKONAISTODENNÄKÖISYYDEN KAAVA	517

