Todennäköisyyslaskenta: Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Sisällys

9. Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Jos *satunnaisilmiötä halutaan mallintaa matemaattisesti*, *ilmiön tulosvaihtoehdot on osattava kuvata* ja *ilmiön tulosvaihtoehtoihin on osattava liittää todennäköisyydet numeerisessa* (matemaattisten kaavojen) *muodossa*. Tämän vaatimuksen täyttäminen johtaa **satunnaismuuttujan** ja sen **todennäköisyysjakauman** käsitteisiin.

Tämän luvun tavoitteena on esittää satunnaismuuttujan ja sen todennäköisyysjakauman *määritelmät* ja *perusominaisuudet.*

Rajoitumme tässä esityksessä pelkästään **diskreettien** ja **jatkuvien satunnaismuuttujien** käsittelyyn. Toteamme, että *diskreetit jakaumat* voidaan määritellä antamalla niiden **pistetodennäköisyysfunktiot**, kun taas *jatkuvat jakaumat* voidaan määritellä antamalla niiden **tiheysfunktiot**.

Avainsanat:

Diskreetti jakauma, Diskreetti satunnaismuuttuja, Eksponenttijakauma, Funktio, Geometrinen jakauma, Jatkuva jakauma, Jatkuva satunnaismuuttuja, Otosavaruus, Perusjoukko, Piikkifunktio, Pistetodennäköisyysfunktio, Satunnaismuuttuja, Tapahtuma, Tiheysfunktio, Todennäköisyys, Todennäköisyysjakauma, Todennäköisyyskenttä, Todennäköisyysmalli, Todennäköisyysmitta, Tulosvaihtoehto

9.1. Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Johdattelevia esimerkkejä

Jos satunnaisilmiötä halutaan mallintaa *matemaattisesti*, niin *ilmiön tulosvaihtoehdot on osattava kuvata numeerisessa muodossa*. Tämä tapahtuu liittämällä tulosvaihtoehtoihin reaaliarvoinen *funktio*, jota kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**. Tulosvaihtoehtojen *todennäköisyydet* kuvataan liittämällä todennäköisyydet tulosvaihtoehtoja vastaaviin satunnaismuuttujan arvoihin.

Satunnaismuuttujan arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa määrittelevät satunnaismuuttujan **todennäköisyysjakauman**. Todennäköisyysjakauma kuvaa sitä, *miten satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoihin liittyvä todennäköisyysmassa jakautuu tulosvaihtoehtoihin liittyvän satunnaismuuttujan arvoalueelle*.

Jos satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa kuvaava satunnaismuuttuja ja sen todennäköisyysjakauma tunnetaan, hallitaan kaikkien ko. satunnaisilmiöön liittyvien tapahtumien todennäköisyydet.

Esimerkki 1. Rahanheitto satunnaisilmiönä.

Tarkastellaan rahanheittoa *satunnaisilmiönä*.

Alkeistapahtumat: Kruuna, Klaava

Otosavaruus: $S = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$

Otosavaruus on tässä *äärellinen* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* seuraavalla tavalla:

$$\xi(\text{Kruuna}) = 1$$

$$\xi(\text{Klaava}) = 0$$

Funktiota ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, kun rahaa heitetään. Huomaa, että ξ on kuitenkin funktiona *täysin määrätty*.

Jos raha on *virheetön*, voimme tehdä seuraavan *oletuksen* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(\xi = 0) = \frac{1}{2}$$

Satunnaismuuttujan ξ *arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa* muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**. Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat *tilastollisen mallin* eli *todennäköisyysmallin* rahanheitolle satunnaisilmiönä.

Koska satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**. Satunnaismuuttuja ξ noudattaa diskreettiä jakaumaa, jota kutsutaan **Bernoulli-jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 2. Lapsen sukupuolen määräytyminen satunnaisilmiönä.

Tarkastellaan lapsen sukupuolen määräytymistä *satunnaisilmiönä*.

Alkeistapahtumat: Tyttö, Poika

Otosavaruus: $S = \{$Tyttö, Poika$\}$

Otosavaruus on tässä *äärellinen* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* seuraavalla tavalla:

ξ(Tyttö) = 1

ξ(Poika) = 0

Funktiota ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, kun lapsen sukupuoli määräytyy sukusolujen yhtyessä. Huomaa, että ξ on kuitenkin funktiona *täysin määrätty*.

Tehdään seuraava, Suomen väkilukutilastoihin vuosilta 1991-95 perustuva *oletus* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$\Pr(\xi = 1) = 0.4902$

$\Pr(\xi = 0) = 0.5098$

Satunnaismuuttujan ξ *arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa* muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**. Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat *tilastollisen mallin* eli *todennäköisyysmallin* lapsen sukupuolen määräytymiselle satunnaisilmiönä.

Koska satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**. Satunnaismuuttuja ξ noudattaa diskreettiä jakaumaa, jota kutsutaan **Bernoulli-jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 3. Nopanheitto satunnaisilmiönä.

Tarkastellaan nopanheittoa *satunnaisilmiönä*.

Alkeistapahtumat: Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6

Otosavaruus: $S = \{$Silmäluku $i \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Otosavaruus on tässä *äärellinen* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* siten, että jokaiseen silmälukuun liitetään vastaava kokonaisluku:

ξ(Silmäluku i) = i , i = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Funktiota ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, kun noppaa heitetään. Huomaa, että ξ on kuitenkin funktiona *täysin määrätty*.

Jos noppa on *virheetön*, voimme tehdä seuraavan *oletuksen* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = i) = \frac{1}{6}, \; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan ξ *arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa* muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**. Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat *tilastollisen mallin* eli *todennäköisyysmallin* nopanheitolle satunnais-ilmiönä.

Koska satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**. Satunnais-muuttuja ξ noudattaa diskreettiä jakaumaa, jota kutsutaan **diskreetiksi tasaiseksi jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 4. Toistuva nopanheitto.

Heitetään noppaa toistuvasti ja tarkastellaan *satunnaisilmiönä* sen heiton järjestysnumeroa, jolla saadaan *ensimmäisen kuutonen*.

Alkeistapahtumat: Niiden heittojen järjestysnumerot, joilla voidaan saada 1. kuutonen: 1, 2, 3, …

Otosavaruus: $S = \{\text{Heiton järjestysnumero } i \mid i = 1, 2, 3, \ldots\}$

Otosavaruus on tässä *numeroituvasti ääretön* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* siten, että jokaiseen järjestysnumeroon liitetään vastaava kokonaisluku:

$$\xi(\text{Heiton järjestysnumero } i) = i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Funktiota ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, kun noppaa heitetään toistuvasti. Huomaa, että ξ on kuitenkin funktiona *täysin määrätty*.

Jos noppa on *virheetön* ja heitot ovat toisistaan *riippumattomia*, voimme tehdä seuraavan *oletuksen* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa:

$$\Pr(\xi = i) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Oletus perustuu seuraavaan päättelyketjuun (ks. tarkemmin esimerkkiä tämän luvun kappaleessa **Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat**):

(i) Jos kuutonen saadaan *ensimmäisen kerran i. heitossa, niin sitä ennen on täytynyt tapahtua* (i – 1) *heittoa, joissa ei ole saatu kuutosta*.

(ii) Jos noppa on *virheetön*, jokaisen silmäluvun todennäköisyys on 1/6, jolloin toden-näköisyys sille, että *ei saada kuutosta* on 5/6.

(iii) Koska heitot oletettiin toisistaan *riippumattomiksi*, niin todennäköisyys sille, että saadaan *ensin* (i – 1) ”ei-kuutosta” ja vasta i. heitto antaa kuutosen on riippumattomien tapahtumien tulosäännön nojalla

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}\frac{1}{6}$$

Satunnaismuuttujan ξ *arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa* muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**. Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyys-jakauma muodostavat *tilastollisen mallin* eli *todennäköisyysmallin* toistuvalle nopanheitolle, kun satunnaisilmiönä tarkastellaan *ensimmäisen* kuutosen järjestysnumeroa.

Koska satunnaismuuttuja ξ saa vain erillisiä arvoja, sitä sanotaan **diskreetiksi**. Satunnaismuuttuja ξ noudattaa diskreettiä jakaumaa, jota kutsutaan **geometriseksi jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 5. Onnenpyörän pyöräytys satunnaisilmiönä.

Tarkastellaan onnenpyörän pyöräytystä *satunnaisilmiönä*. Oletetaan, että onnenpyörän keskipisteeseen on asetettu vapaasti pyörivä osoitin, jota pyöräytetään pelissä ja tarkastellaan *satunnaisilmiönä* kulmaa, jonka osoitin pysähdyttyään muodostaa lähtöasentoonsa verrattuna.

Alkeistapahtumat: Kulmat välillä [0°, 360°)

Otosavaruus: $S = \{\text{Kulma } x \mid x \in [0°, 360°)\}$

Otosavaruus on tässä *ylinumeroituvasti ääretön* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* siten, että jokaiseen kulmaan x liitetään vastaava reaaliluku x:

$$\xi(\text{Kulma } x) = x$$

Funktiota ξ kutsutaan **satunnaismuuttujaksi**, koska *sattuma* määrää mikä funktion arvoista *realisoituu*, kun osoitinta pyöräytetään. Huomaa, että ξ on kuitenkin funktiona *täysin määrätty*.

Jos onnenpyörä toimii *virheettömästi*, voimme tehdä seuraavan *oletuksen* niistä *todennäköisyyksistä*, joilla ξ saa arvonsa: Jos

$$[a,b] \subset [0,360)$$

niin

$$\Pr(\xi \in [a,b]) = \frac{b-a}{360}$$

Tämä perustuu vaatimukseen (ks. tarkemmin esimerkkiä kappaleessa **Jatkuvat satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat**), jonka mukaan todennäköisyys sille, että osoitin pysähtyy välille $[a, b]$ ei saa riippua välin sijainnista onnenpyörän kehällä, vaan ainoastaan välin pituudesta.

Satunnaismuuttujan ξ *arvot yhdessä niihin liitettyjen todennäköisyyksien kanssa* muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**. Satunnaismuuttuja ξ ja sen todennäköisyysjakauma muodostavat *tilastollisen mallin* eli *todennäköisyysmallin* onnenpyörän pyöräytykselle satunnaisilmiönä.

Koska satunnaismuuttuja ξ saa *kaikki* reaalilukuarvot välillä [0, 360), sitä sanotaan **jatkuvaksi**. Satunnaismuuttuja ξ noudattaa jatkuvaa jakaumaa, jota kutsutaan **jatkuvaksi tasaiseksi jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

9.2. Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Määritelmät

Satunnaismuuttuja

Olkoon $(S, \mathsf{F}, \mathrm{Pr})$ *todennäköisyyskenttä*, jossa siis

S = *otosavaruus* (perusjoukko)

F = otosvaruuden S osajoukkojen joukossa määritelty *σ-algebra*

Pr = σ-algebran F alkioille määritelty *todennäköisyysmitta*

Jos ξ on otosavaruuden S *reaaliarvoinen* (ja mitallinen) *funktio* eli

$$\xi : S \to$$

niin ξ on **satunnaismuuttuja**.

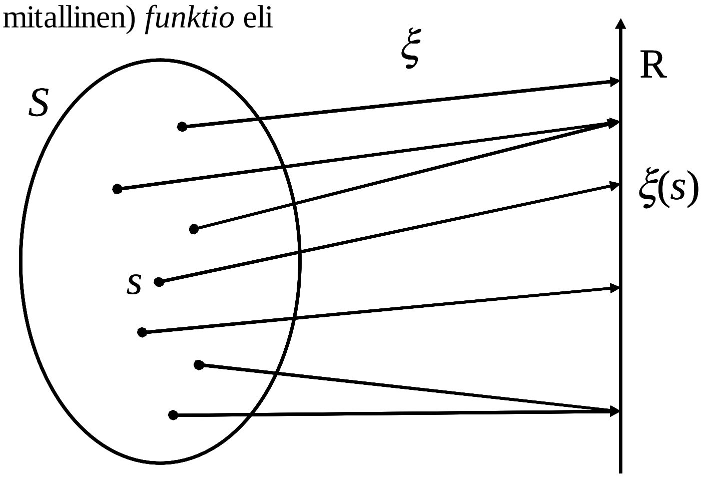
Satunnaismuuttujan ξ määritelmästä seuraa, että jos

$$s \in S$$

niin

$$\xi(s) \in$$

Ks. kuvaa oikealla.



Satunnaismuuttuja liittää satunnaisilmiön *tulosvaihtoehtoihin reaaliluvut* tai *numeeriset koodit*. Siten satunnaismuuttuja *kuvaa satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa*. On syytä huomata, että *satunnaismuuttuja on funktiona täysin määrätty*, mutta *sattuma määrää mikä funktion arvoista realisoituu*.

Huomautus:

- Sana satunnaismuuttuja on terminä siinä mielessä *epäonnistunut*, että se ei kerro sitä olennaista asiaa, että satunnaismuuttuja on *funktio*.

Jotta reaaliarvoinen funktio kelpaisi satunnaismuuttujaksi, sen on oltava **mitallinen**. Siten mikä tahansa otosavaruuden reaaliarvoinen funktio *ei kelpaa satunnaismuuttujaksi*. Voidaan osoittaa, että ns. *diskreetit* ja *jatkuvat satunnaismuuttujat* – joita tässä esityksessä pelkästään käsitellään – *ovat mitallisia funktioita*. Emme täsmennä *mitallisuuden* käsitettä tässä esityksessä.

Todennäköisyysjakauma

Satunnaismuuttujan ξ *todennäköisyysjakaumalla* tarkoitetaan kuvauksen

$$\xi : S \to$$

reaalilukujen joukkoon *indusoimaa* todennäköisyysmittaa. *Todennäköisyysjakauma* kuvaa koko otosavaruuden S **todennäköisyysmassan** (= 1) *jakautumista* otosavaruudessa S määritellyn satunnaismuuttujan ξ arvoalueella.

Todennäköisyysjakauman merkitys satunnaisilmiön tilastollisena mallina on siinä, että *kaikkien satunnaisilmiön tapahtumien todennäköisyydet hallitaan täydellisesti, jos satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja kuvaava satunnaismuuttuja ja sen todennäköisyysjakauma tunnetaan*.

Todennäköisyysjakaumat tilastollisina malleina

Tilastotieteen kehittää ja soveltaa matemaattisia *menetelmiä* ja *malleja*, joiden avulla jostakin reaalimaailman ilmiöstä pyritään tekemään *johtopäätöksiä* ilmiötä kuvaavien *numeeristen tietojen* perusteella sellaisissa tilanteissa, joissa ilmiöihin (tai niitä kuvaaviin tietoihin) liittyy *epävarmuutta* ja *satunnaisuutta*. Tilastollisten menetelmien ja mallien avulla pyritään *erottamaan* ja *kuvaamaan* ilmiöiden (tai oikeammin: ilmiöitä kuvaavien tietojen) *säännönmukaiset* ja *satunnaiset* piirteet.

Koska tilastotieteen tutkimiin ilmiöihin (tai niitä kuvaaviin tietoihin) liittyy epävarmuutta ja satunnaisuutta, tilastolliset menetelmät ja mallit perustuvat *todennäköisyyslaskentaan*. Satunnaisilmiöiden tilastolliset mallit kuvaavat ilmiöiden tulosvaihtoehdot ja niiden todennäköisyydet *matemaattisessa muodossa*.

Satunnaisilmiön **tilastollisessa mallissa** eli **todennäköisyysmallissa** on oltava seuraavat osat:

(i) Ilmiön tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa kuvaava **satunnaismuuttuja**.

(ii) Todennäköisyysmassan 1 jakautumista satunnaismuuttujan arvoalueelle kuvaava **todennäköisyysjakauma**.

Kun satunnaisilmiöille *konstruoidaan* tilastollisia malleja, vaaditaan *tilastotieteen* ja *todennäköisyyslaskennan* tietojen lisäksi hyviä tietoja ilmiötä selittävästä *taustateoriasta*. Taustateorian tuottaa se *tieteenala*, jonka alueeseen ilmiö kuuluu.

Esimerkki:

> Taloudellisten ilmiöiden tilastollisessa analyysissa eli *ekonometriassa* taustateoriana on *taloustiede*.

Tilastollinen tutkimus on parhaimmillaan tilastotieteen, todennäköisyyslaskennan ja tutkimuksen kohteena olevaa ilmiötä selittävän taustateorian *yhteispeliä*.

Teoreettisen tilastotieteen tehtävänä on konstruoida tutkimuksen kohteena oleville satunnais-ilmiöille *tilastollisia malleja*, jotka *selittävät* ilmiöistä saatujen *havaintojen käyttäytymisen*. *Empiirisen tilastotieteen* tehtävänä on selvittää, ovatko konstruoidut tilastolliset mallit *sopu-soinnussa* havaintojen kanssa.

Huomaa, että tilastollinen malli on *teoreettinen oletus*, joka pitää asettaa *testiin havaintojen tutkimuksen kohteena olevasta ilmiöstä tuottamaa informaatioita vastaan*; lisätietoja tilastollisista malleista: ks. monistetta **Tilastolliset menetelmät**.

Satunnaismuuttujien tyyppejä

Satunnaismuuttuja määriteltiin edellä *mitallisena funktiona* otosavaruudesta reaalilukujen joukkoon. Mitalliset funktiot voivat olla funktioina hyvin *monimutkaisia*. Kaikissa *tilastotieteen tavanomaisissa sovelluksissa* tullaan kuitenkin yleensä hyvin toimeen seuraavien satunnaismuuttujien tyyppien kanssa:

(i) **Diskreetit satunnaismuuttujat**.

(ii) **Jatkuvat satunnaismuuttujat**.

Satunnaismuuttujaa on **diskreetti**, jos sen arvoalue on *diskreetti joukko* eli sen arvoalue *muodostuu erillisistä reaaliakselin pisteistä*. Diskreetin satunnaismuuttujan arvoalue on aina joko *äärellinen* tai korkeintaan *numeroituvasti ääretön*. Diskreetin satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma määrittelee *alkeistapahtumien* todennäköisyydet. Kaikkien muiden tapahtumien todennäköisyydet saadaan alkeistapahtumien todennäköisyyksistä todennäköisyyden laskusääntöjen avulla.

Satunnaismuuttujaa on **jatkuva**, jos sen arvoalue on jokin *reaaliakselin osaväli*. Jatkuvan satunnaismuuttujan arvoalue on reaalilukujen joukon osavälinä *ylinumeroituva*. Jatkuvan satunnaismuuttujan todennäköisyysjakauma määrittelee satunnaismuuttujan arvoalueeseen kuuluvien reaaliakselin *välien* todennäköisyydet. Kaikkien muiden tapahtumien todennäköisyydet saadaan välien todennäköisyyksistä todennäköisyyden laskusääntöjen avulla.

Rajoitumme jatkossa pelkästään diskreettien ja jatkuvien satunnaismuuttujien käsittelyyn.

9.3. Diskreetit satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

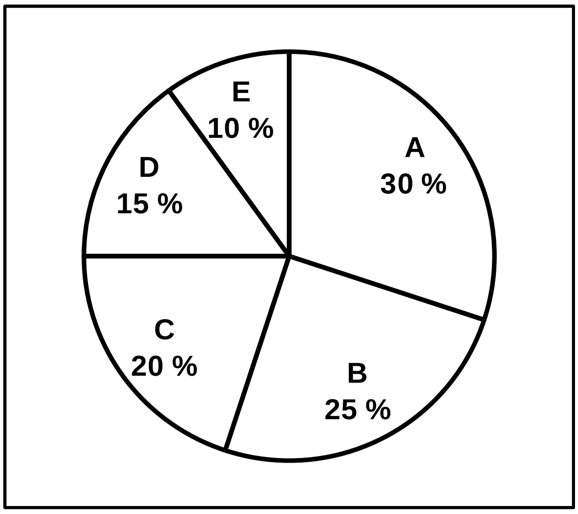
Johdatteleva esimerkki

Kuva oikealla esittää onnenpyörää, jonka pinta on jaettu viiteen sektoriin

A, B, C, D, E

Alla olevassa taulukossa on esitetty sektoreiden pinta-alojen osuudet onnenpyörän kokonaispinta-alasta:

Sektori	%
A	30
B	25
C	20
D	15
E	10
Summa	100



Onnenpyörän keskipisteeseen on kiinnitetty vapaasti pyörivä osoitin. Tarkastellaan peliä, jossa osoitinta pyöräytetään ja pelaaja yrittää *arvata* mihin sektoreista A, B, C, D, E osoitin pysähtyy. Peli on *satunnaisilmiö*, johon liittyvä **otosavaruus** eli *mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukko* on

$S = \{$Sektorit A, B, C, D, E$\}$

Oletetaan, että *todennäköisyydet, joilla osoitin pysähtyy sektoreihin* A, B, C, D, E *suhtautuvat toisiinsa kuten sektoreiden pinta-alat*. Tällöin voimme asettaa:

$\Pr(A) = 0.30$

$\Pr(B) = 0.25$

$\Pr(C) = 0.20$

$\Pr(D) = 0.15$

$\Pr(E) = 0.10$

Määritellään **satunnaismuuttuja** ξ, joka liittää tulosvaihtoehtoihin

A, B, C, D, E

reaaliluvut seuraavalla tavalla:

$A \rightarrow 1$

$B \rightarrow 2$

C $\to$ 3

D $\to$ 4

E $\to$ 5

Satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa seuraavilla todennäköisyyksillä:

$\Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$

$\Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$

$\Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$

$\Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$

$\Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$

Sanomme, että satunnaismuuttuja ξ on **diskreetti**, koska ξ saa vain erillisiä arvoja. Kutsumme satunnaismuuttujan ξ arvoihin liittyviä todennäköisyyksiä **pistetodennäköisyyksiksi**, koska ne liittyvät *erillisiin pisteisiin* reaaliakselilla. Diskreetin satunnaismuuttujan ξ arvot ja niihin liittyvät pistetodennäköisyydet muodostavat satunnaismuuttujan ξ **todennäköisyysjakauman**.

Diskreetin satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa voidaan kuvata sen **pistetodennäköisyysfunktiolla**. Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio kertoo miten koko otosavaruuden *todennäköisyysmassa* (= 1) *jakautuu* satunnaismuuttujan ξ mahdollisille arvoille. On helppo nähdä, että pistetodennäköisyysfunktio f on funktiona *epäjatkuva* ja saa *positiivisia arvoja* vain *erillisissä pisteissä*.

Esimerkin tapauksessa satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio* f voidaan määritellä seuraavalla tavalla:

$f(1) = \Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$

$f(2) = \Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$

$f(3) = \Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$

$f(4) = \Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$

$f(5) = \Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$

Olkoon x on diskreetin satunnaismuuttujan ξ mahdollinen arvo ja

$$\Pr(\xi = x) = p_x$$

olkoon vastaava pistetodennäköisyys. Satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktiota voidaan kuvata graafisesti* **piikkifunktiolla**, joka saadaan yhdistämällä pisteet

$(x, 0)$

ja

(x, p_x)

toisiinsa janoilla.

Alla oleva kuva esittää esimerkissä määritellyn diskreetin satunnaismuuttujan ξ todennäköisyys-jakauman pistetodennäköisyysfunktiota vastaavaa piikkifunktiota.

Piikkien pituudet kuvassa vastaavat siis niitä todennäköisyyksiä, joilla satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa:

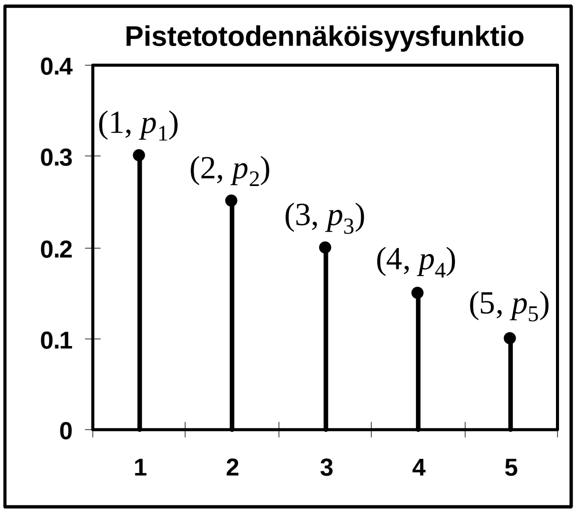
$$p_1 = f(1) = \Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$$

$$p_2 = f(2) = \Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$$

$$p_3 = f(3) = \Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$$

$$p_4 = f(4) = \Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$$

$$p_5 = f(5) = \Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$$



Diskreetti satunnaismuuuttuja

Olkoon otosavaruus S *äärellinen* tai *numeroituvasti ääretön*. Tällöin voimme merkitä

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

jos S on äärellinen ja

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$$

jos S on numeroituvasti ääretön. Olkoon

$$\xi : S \to$$

satunnaismuuttuja eli otosavaruuden (mitallinen) kuvaus reaalilukujen joukkoon. Jos otosavaruus S on *äärellinen* tai *numeroituvasti ääretön*, jolloin myös funktion ξ arvoalue on äärellinen tai numeroituvasti ääretön, sanomme, että satunnaismuuttuja ξ on **diskreetti**.

Diskreetit satunnaismuuttujat liittyvät sellaisiin todennäköisyyslaskennan sovelluksiin, joissa tarkastellaan **diskreettejä suureita**. Diskreettejä suureita ovat esimerkiksi seuraavat:

- **Laatuerot** (koodattuina numeerisiksi)
- **Luokittelut** ja **ryhmittelyt** (koodattuina numeerisiksi)
- **Järjestysluvut**
- **Lukumäärät**

Esimerkki 1. Laadunvalvonta.

Kone tekee erästä tuotetta sarjatuotantona n kpl päivässä. Oletetaan, että osa tuotteista on viallisia ja vialliset tuotteet syntyvät valmistusprosessin aikana täysin sattumanvaraisesti. Oletetaan edelleen, että viallisten tuotteiden suhteellinen osuus valmistetuista tuotteista on keskimäärin p. Tällöin voimme antaa luvulle p todennäköisyystulkinnan:

p = todennäköisyys, että satunnaisesti valittu tuote on viallinen

Voidaan osoittaa, että *viallisten tuotteiden lukumäärä päivän aikana tehtyjen tuotteiden joukossa* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **binomijakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 2. Laadunvalvonta.

Kone tekee erästä tuotetta sarjatuotantona *n* kpl päivässä. Oletetaan, että osa tuotteista on viallisia ja vialliset tuotteet syntyvät valmistusprosessin aikana täysin sattumanvaraisesti. Oletetaan edelleen, että viallisten tuotteiden suhteellinen osuus valmistetuista tuotteista on keskimäärin *p*. Tällöin voimme antaa luvulle *p* todennäköisyystulkinnan:

p = todennäköisyys, että satunnaisesti valittu tuote on viallinen

Poimitaan tuotteita tarkastettavaksi, *kunnes löydetään ensimmäinen viallinen*. Voidaan osoittaa, että *ensimmäisen viallisen tuotteen järjestysnumero tarkastettujen tuotteiden joukossa* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **geometrista jakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Esimerkki 3. Jono.

Oletetaan, että palvelujonoon tulee asiakkaita keskimääriin *k* kappaletta aikayksikköä kohden. Voidaan osoittaa, että tietyin edellytyksin *jollakin aikavälillä jonoon tulevien asiakkaiden lukumäärä* on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **Poisson-jakaumaa**; lisätietoja: ks. luvun **Diskreettejä jakaumia**.

Huomautus:

- Jos jollakin aikavälillä jonoon tulevien asiakkaiden lukumäärä noudattaa Poisson-jakaumaa, niin *aika, jonka seuraavan asiakkaan tuloa jonoon joudutaan odottamaan* on *jatkuva satunnaismuuttuja*, joka noudattaa **eksponenttijakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Esimerkki 4. Järven kalakannan koon laskeminen.

Pyydystetään järvestä joukko kaloja elävinä, merkitään pyydystetyt kalat ja lasketaan ne takaisin järveen. Pyydystetään järvestä jonkin ajan kuluttua uusi joukko kaloja. Voidaan osoittaa, että *merkittyjen kalojen lukumäärä uudessa pyynnissä* on tietyin edellytyksin diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa **hypergeometrista jakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Huomautus:

- Kuvattua *merkintä-takaisinpyynti-menetelmää* sovelletaan todellakin (sopivasti modifioituna) riista- ja kalakantojen laskemiseen.

Diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio

Olkoon

$$\xi : S \to$$

diskreetti satunnaismuuttuja ja olkoon T satunnaismuuttujan ξ saamien äärellinen tai numeroituvasti ääretön arvojen joukko. Jos satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen joukko T on *äärellinen*, voimme kirjoittaa

$$T = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$$

Jos satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen joukko T on *numeroituvasti ääretön*, kirjoitamme

$$T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

Reaaliarvoinen funktio f määrittelee diskreetin satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktion**, jos seuraavat kolme ehtoa pätevät:

(1) $f(x_i) \ge 0$ kaikille $x_i \in T$

(2) $f(x_i) = \Pr(\xi = x_i)$ kaikille $x_i \in T$

(3) $\sum_{i|x_i \in T} f(x_i) = 1$

Sanomme, että todennäköisyys

$$\Pr(\xi = x_i) = f(x_i) = p_i \;, \; x_i \in T$$

on satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava **pistetodennäköisyys**.

Ehdon (1) mukaan pistetodennäköisyysfunktio f on kaikkialla *ei-negatiivinen*. Ehdon (2) mukaan pistetodennäköisyysfunktion f arvot pisteissä x_i ovat *todennäköisyyksiä*. Ehdon (3) mukaan *kaikkien* pistetodennäköisyyksien summa = 1.

Olkoon f diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio*, T satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen joukko ja

$$\Pr(\xi = x_i) = f(x_i) = p_i \;, \; x_i \in T$$

satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava *pistetodennäköisyys*. Satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktio** voidaan määritellä *kaikille reaaliluvuille* kaavalla

$$f(x) = \Pr(\xi = x) = \begin{cases} p_i \;, & x \in T \\ 0 \;, & x \notin T \end{cases}$$

Näin määriteltynä pistetodennäköisyysfunktio f on *epäjatkuva* funktio, jossa on epäjatkuvuuskohta jokaiselle $x \in T$.

Diskreetti todennäköisyysjakauma

Jos f on diskreetin satunnaismuuttujan

$$\xi : S \to$$

pistetodennäköisyysfunktio, sanomme, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa **diskreettiä todennäköisyysjakaumaa**, jonka pistetodennäköisyysfunktiona on f. Diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio* f kertoo miten koko otosavaruuden S *todennäköisyysmassa* (= 1) *jakautuu* satunnaismuuttujan ξ saamille *arvoille*. Pistetodennäköisyysfunktion avulla voidaan määrätä *kaikki* ko. satunnaisilmiöön liittyvät todennäköisyydet.

Pistetodennäköisyysfunktion kuvaaja

Olkoon f diskreetin satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio*, T satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen joukko ja

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \;, \; x_i \in T$$

satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava *pistetodennäköisyys*.

Satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktiota** f voidaan *kuvata graafisesti* ns. **piikkifunktiolla**. Piikkifunktio konstruoidaan seuraavalla tavalla:

(1) Merkitään vastinpisteet

$$(x_i, 0) \text{ ja } (x_i, p_i)$$

kaikille $x_i \in T$ tasoon.

(2) Yhdistetään vastinpisteet

$$(x_i, 0) \text{ ja } (x_i, p_i)$$

kaikille $x_i \in T$ toisiinsa janalla.

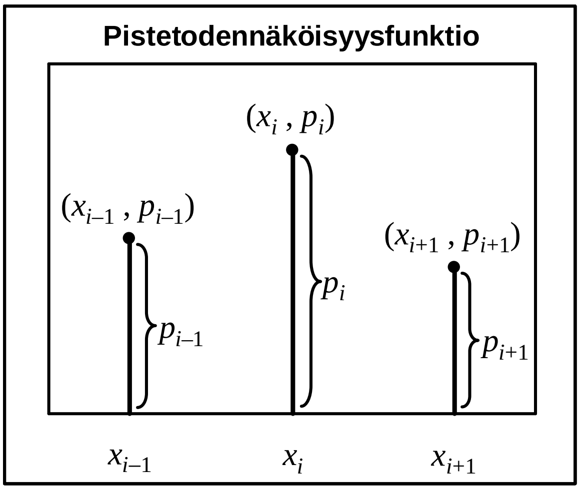
Siten satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktiota

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

voidaan kuvata graafisesti piirtämällä vaaka-akselin pisteisiin x_i ”*piikit*”, joiden pituudet vastaavat pistetodennäköisyyksiä p_i.

Lisäksi ”*piikkien kärkipisteet*” (x_i, p_i) piirretään tavallisesti niin, että ne erottuvat selvästi pisteitä $(x_i, 0)$ ja (x_i, p_i) yhdistävästä janasta.

Ks. kuvaa oikealla.



Diskreetti todennäköisyysjakauma ja reaaliakselin välien todennäköisyydet

Olkoon

$$\xi : S \to$$

diskreetti satunnaismuuttuja, T satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen joukko ja

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio*. Tällöin reaaliakselin välin

$$[a, b]$$

todennäköisyys on

$$\Pr(a \le \xi \le b) = \sum_{i | x_i \in [a,b]} f(x_i) = \sum_{i | x_i \in [a,b]} \Pr(\xi = x_i)$$

Geometrisesti reaaliakselin välin $[a,b]$ todennäköisyyden määrääminen merkitsee niiden ”piikkien” *pituuksien* p_i *yhteenlaskua*, joita vastaavat satunnaismuuttujan ξ arvot $x_i \in [a,b]$.

Luvussa **Todennäköisyyden aksioomat** on todettu seuraavaa:

(i) Jokainen *tapahtuma* reaalilukujen joukossa voidaan muodostaa reaaliakselin väleistä yhdistelemällä välejä sopivasti joukko-opin operaatioilla.

(ii) Jokaisen *tapahtuman todennäköisyys* saadaan reaaliakselin välien todennäköisyyksistä todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.

Siten se *satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja ko. diskreetti satunnaismuuttuja kuvaa, hallitaan täydellisesti, jos satunnaismuuttujan pistetodennäköisyysfunktio tunnetaan*.

Todennäköisyyksien vertailu

Olkoon

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i$$

ja

$$f(x_j) = \Pr(\xi = x_j) = p_j$$

Jos

$$p_i > p_j$$

niin satunnaismuuttujan ξ arvoa x_i vastaava tulosvaihtoehto on *todennäköisempi* kuin satunnaismuuttujan ξ arvoa x_j vastaava tulosvaihtoehto.

Diskreettien todennäköisyysjakaumien parametrointi

Oletetaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa *diskreettiä* todennäköisyysjakaumaa, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on f. Pistetodennäköisyysfunktio f riippuu tavallisesti **parametreista** eli *vakioista*, jotka määräävät funktion f *muodon*. Pistetodennäköisyysfunktion muodon määrääviä parametreja kutsutaan tavallisesti sen **todennäköisyysjakauman parametreiksi**, jonka todennäköisyydet ko. pistetodennäköisyysfunktio määrittelee.

Olkoot pistetodennäköisyysfunktion f muodon määräävät parametrit

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

Jos haluamme korostaa pistetodennäköisyysfunktion f riippuvuutta sen muodon määräävistä parametreista, kirjoitamme

$$f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$$

Parametreilla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ on tavallisesti jokin sisällöllinen *tulkinta* siinä satunnaisilmiössä, jonka malliksi f on konstruoitu.

Parametrien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ arvot ovat sovelluksissa tavallisesti *tuntemattomia* ja niiden arvot on **estimoitava** eli *arvioitava* havaintojen perusteella; lisätietoja: ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Estimointi**. Parametreja $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ koskeva *hypoteeseja* eli *oletuksia* voidaan *testata* ns. **tilastollisin testein**; ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Tilastolliset testit**.

Havainnollistus: Geometrinen jakauma

Heitetään noppaa toistuvasti ja tarkastellaan *satunnaisilmiönä* sen heiton järjestysnumeroa, jolla saadaan *ensimmäisen kuutonen*. Ensimmäinen kuutonen voidaan saada heitolla numero 1, 2, 3, … Ensimmäisen kuutosen saamiseksi tarvittavien heittojen lukumäärällä ei selvästikään ole ylärajaa.

Siten *alkeistapahtumina* ovat järjestysnumerot

1, 2, 3, …

ja *otosavaruus* on muotoa

$S = \{\text{Heiton järjestysnumero } x \mid x = 1, 2, 3, \ldots\}$

Otosavaruus on tässä *numeroituvasti ääretön* joukko.

Määritellään reaaliarvoinen *funktio* ξ, joka liittää otosavaruuden S alkioihin *numeerisen koodin* siten, että jokaiseen järjestysnumeroon liitetään vastaava kokonaisluku:

$\xi(\text{Heiton järjestysnumero } x) = x \,,\; x = 1, 2, 3, \ldots$

ξ on *diskreetti satunnaismuuttuja*.

Haluamme ratkaista seuraavat tehtävät:

(a) Määrää satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktio**.

(b) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *täsmälleen* 6 *kertaa*.

(c) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään 6 *kertaa tai useammin*.

(d) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään 36 *kertaa tai useammin*.

Oletetaan, että nopanheitot ovat toisistaan *riippumattomia* siinä mielessä, että yhdenkään heiton tulos ei riipu aikaisempien heittojen tuloksista.

Määritellään tapahtumat:

A = ”Noppaa heitettäessä tuloksena *saadaan kuutonen*”

A^c = ”Noppaa heitettäessä tuloksena *ei saada kuutosta*”

Koska noppa oletettiin *virheettömäksi*, voimme olettaa, että

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}$$

Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan mukaan

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(a) Määrää satunnaismuuttujan ξ **pistetodennäköisyysfunktio**.

Koska *ensimmäinen kuutonen* voidaan saada ensimmäisellä, toisella, kolmannella jne. heitolla, ξ on *diskreetti satunnaismuuttuja*, joka saa *kaikki* kokonaislukuarvot 1, 2, 3, …

Oletetaan, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan x. heitolla, x = 1, 2, 3, … Tällöin *ennen* x. heittoa on täytynyt tapahtua (x – 1) heittoa, joiden tuloksena ei ole saatu kuutosta:

Heiton numero:	1	2	$\ldots$	$x-1$	x
Tapahtuma:	A^c	A^c	$\ldots$	A^c	A

Koska heitot oletettiin riippumattomiksi, tapahtumajonon

$$\underbrace{A^c A^c \ldots A^c}_{(x-1)\text{ kpl}} A$$

todennäköisyys on *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* nojalla

$$\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{6}}_{(x-1)\text{ kpl}}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$$

Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}, \ x=1,2,3,\ldots$$

Funktio f kelpaa *pistetodennäköisyysfunktioksi*, koska se toteuttaa pistetodennäköisyysfunktion määrittelevät ehdot (1)-(3).

(1) Funktion f arvot ovat ei-negatiivisia (itse asiassa positiivisia):

$$f(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}>0, \ x=1,2,3,\ldots$$

(2) Funktion f arvot ovat todennäköisyyksiä:

$$f(x)=\Pr(\xi=x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}, \ x=1,2,3,\ldots$$

(3) Kaikkien pistetodennäköisyyksien summa = 1 *geometrisen sarjan* summan kaavan mukaan:

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x)=\sum_{x=1}^{\infty}\Pr(\xi=x)=\frac{1}{6}\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}=\frac{1}{6}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{x}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=1$$

Koska pistetodennäköisyydet

$$f(x)=\Pr(\xi=x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}, \ x=1,2,3,\ldots$$

muodostavat (suppenevan) *geometrisen sarjan*, satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa sanotaan **geometriseksi jakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

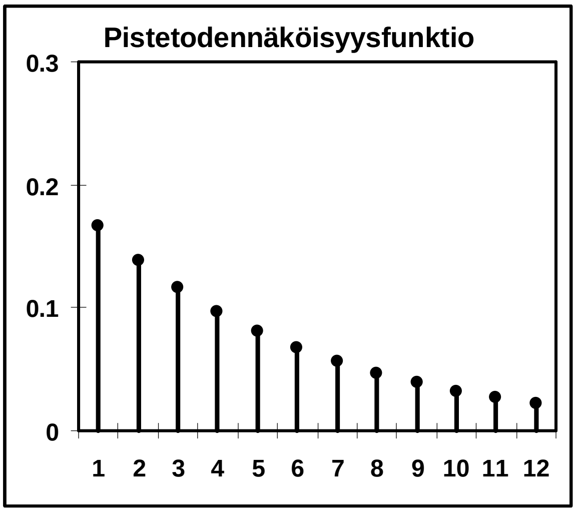
Huomaa, että jakauman pistetodennäköisyydet *vähenevät eksponentiaalista vauhtia* eli *kuten suppenevassa geometrisessa sarjassa*, kun x kasvaa. Tämä merkitsee seuraavaa:

(i) Todennäköisyys, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan heti ensimmäisellä heitolla *on* kaikkein *suurin*.

(ii) Todennäköisyys, että *ensimmäinen kuutonen* saadaan x. heitolla, *pienenee* heittojen lukumäärän x funktiona *eksponentiaalista vauhtia*.

Alla oleva taulukko ja kuva esittävät esimerkissä johdetun geometrisen jakauman pistetodennäköisyyksiä kun x = 1, 2, … , 12.

x	$\Pr(\xi = x)$
1	0.1667
2	0.1389
3	0.1157
4	0.0965
5	0.0804
6	0.0670
7	0.0558
8	0.0465
9	0.0388
10	0.0323
11	0.0269
12	0.0224



(b) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään *täsmälleen* 6 *kertaa*.

Suoraan satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktion kaavasta saadaan:

$$\Pr(\xi = 6) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.0670$$

Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan mukaan tämä merkitsee seuraavaa: Jos 1000 henkilöä heittää noppaa, *keskimäärin* n. 70 saa *ensimmäisen kuutosen* 6. heitolla.

Johdetaan ennen tehtävien (c) ja (d) ratkaisemista seuraava aputulos:

Aputulos:

Todennäköisyys sille, että noppaa joudutaan heittämään ennen ensimmäisen kuutosen saamista *k kertaa tai useammin*, on

$$\Pr(\xi \ge k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Perustelu:

Komplementtitapahtuman todennäköisyyden ja *geometrisen sarjan osasumman kaavoista* seuraa, että

$$\begin{aligned}\Pr(\xi \ge k) = 1 - \Pr(\xi < k) &= 1 - \sum_{x=1}^{k-1}\Pr(\xi = x)\\ &= 1 - \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\\ &= 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1-(5/6)^{k-1}}{1-5/6}\\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

(c) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään 6 *kertaa tai useammin*.

Edellä johdetun aputuloksen nojalla

$$\Pr(\xi \geq 6) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.402$$

Todennäköisyyden frekvenssintulkinnan mukaan tämä merkitsee seuraavaa: Suuressa joukossa ihmisiä *keskimäärin* 40 % joutuu heittämään noppaa 6 *kertaa tai useammin* ennen kuin he saavat *ensimmäisen kuutosen*.

(d) Määrää todennäköisyys, että noppaa joudutaan heittämään 36 *kertaa tai useammin*.

Edellä johdetun aputuloksen nojalla

$$\Pr(\xi \geq 36) = \left(\frac{5}{6}\right)^{35} \approx 0.00169$$

Todennäköisyyden frekvenssintulkinnan mukaan tämä merkitsee seuraavaa: Jos 1000 henkilöä heittää noppaa, *keskimäärin* 1-2 henkilöä joutuu heittämään noppaa 36 *kertaa tai useammin* ennen kuin he saavat *ensimmäisen kuutosen*. Nämä 1-2 henkilöä varmasti *ihmettelevät* heittosarjaansa.

Kohtaamme tässä *tilastotieteen selityksen ihmeille*: **Harvinaisetkin tapahtumat sattuvat – suurella todennäköisyydellä – ennemmin tai myöhemmin**, **jos ilmiö toistuu riittävän monta kertaa**.

Diskreettejä todennäköisyysjakaumia

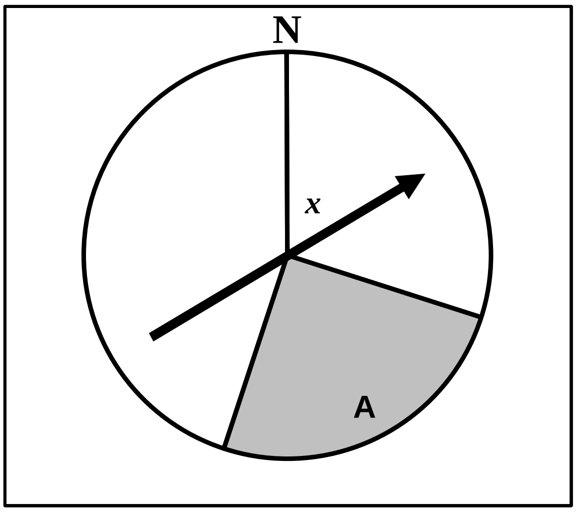
Luvussa **Diskreettejä todennäköisyysjakaumia** määritellään seuraavat diskreetit jakaumat:

- **Diskreetti tasainen jakauma**.
- **Bernoulli-jakauma**.
- **Binomijakauma**.
- **Geometrinen jakauma**.
- **Negatiivinen binomijakauma**.
- **Hypergeometrinen jakauma**.
- **Poisson-jakauma**.

Johdamme jakaumien pistetodennäköisyysfunktiot käyttämällä todennäköisyyslaskennan lasku-sääntöjä ja kombinatoriikkaa. Lisäksi luvussa esitellään jakaumien tärkeimmät matemaattiset ominaisuudet.

9.4. Jatkuvat satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat

Johdatteleva esimerkki.



Kuva oikealla esittää onnenpyörää, jonka keskipisteeseen on kiinnitetty vapaasti pyörivä osoitin.

Tarkastellaan satunnaisilmiönä peliä, jossa pelaaja valitsee onnenpyörästä *mielivaltaisen sektorin A*. Osoitinta pyöräytetään ja pelaaja voittaa, jos osoitin pysähtyy pelaajan valitsemaan sektoriin.

Tehdään oletus, että *todennäköisyys, että osoitin pysähtyy valittuun sektoriin on suhteessa sektorin pinta-alaan, mutta ei riipu sektorin paikasta*.

Olkoon x kulma, jonka osoitin pysähdyttyään muodostaa N:llä (N = *n*orth) merkityn suunnan kanssa.

Peliin satunnaisilmiönä liittyväksi **otosavaruudeksi** eli *mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukoksi* voidaan ottaa joukko

$$S = \{\text{Kulma } x \mid x \in [0°, 360°)\}$$

Otosavaruus on tässä *ylinumeroituvasti ääretön* joukko.

Määritellään satunnaismuuttuja ξ, joka liittää jokaiseen otosavaruuden S alkioon *numeerisen koodin* siten, että jokaiseen kulmaan $x \in [0°, 360°)$ liitetään vastaava reaaliluku x:

$$\xi(\text{Kulma } x) = x$$

Sanomme, että satunnaismuuttuja ξ on **jatkuva**, koska ξ saa *kaikki reaalilukuarvot* väliltä [0, 360).

Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360}, & x \in [0,360) \\ 0, & x \notin [0,360) \end{cases}$$

Sanomme, että funktio f määrittelee satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakauman (todennäköisyys-) **tiheysfunktion**. Saamme välien $[a, b] \subset [0, 360)$ todennäköisyydet *integroimalla* funktio f välillä $[a, b]$:

$$\Pr(\xi \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{360}$$

mikä merkitsee funktion f kuvaajan ja x-akselin välisen alueen *pinta-alan* määräämistä pisteiden a ja b välistä.

Funktion f määrittelemää todennäköisyysjakaumaa kutsutaan **jatkuvaksi tasaiseksi jakaumaksi**, koska todennäköisyydet *jakautuvat* välin [0, 360) osaväleille *tasaisesti* siinä mielessä, että

$$\Pr(\xi \in [a, b]) = \Pr(\xi \in [c, d])$$

jos $[a, b]$ ja $[c, d]$ ovat välin $[0, 360)$ *yhtä pitkiä* osavälejä eli toteuttavat ehdot

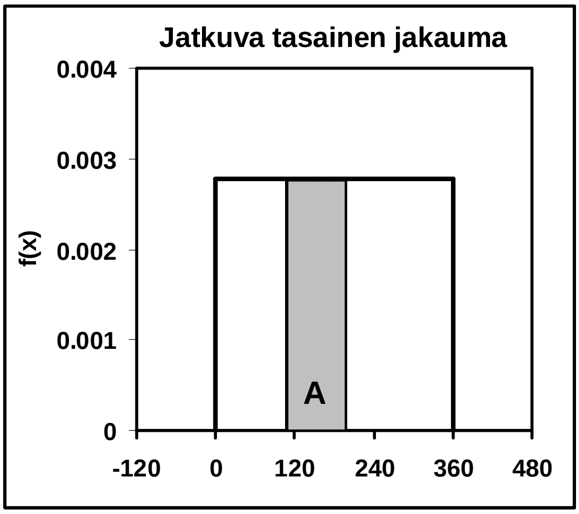
$$[a, b] \subset [0, 360)$$

$$[c, d] \subset [0, 360)$$

$$b - a = c - d$$

Lisätietoja jatkuvasta tasaisesta jakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Kuva oikealla esittää esimerkin *jatkuvan tasaisen jakauman tiheysfunktiota f*. Kuvaan on merkitty myös alue, joka vastaa onnenpyörää esittävään kuvaan merkittyä sektoria *A*.



Jatkuva satunnaismuuttuja

Olkoon otosavaruus *S ylinumeroituvasti ääretön* ja olkoon

$$\xi : S \rightarrow$$

satunnaismuuttuja eli otosavaruuden (mitallinen) kuvaus reaalilukujen joukkoon.

Sanomme, että satunnaismuuttuja ξ on **jatkuva**, jos seuraavat kaksi ehtoa pätevät:

(i) Satunnaismuuttuja ξ saa *kaikki* reaalilukuarvot joltakin reaaliakselin väliltä.

(ii) Todennäköisyys, että satunnaismuuttuja ξ saa *minkä tahansa* yksittäisen arvon = 0:

$$\Pr(\xi = x) = 0 \text{ kaikille } x \in$$

Jatkuvat satunnaismuuttujat liittyvät sellaisiin todennäköisyyslaskennan sovelluksiin, joissa tarkastellaan **jatkuvia suureita**. Jatkuvia suureita ovat esimerkiksi seuraavat:

- **Aika ja nopeus**
- **Pituus**, **pinta-ala**, **tilavuus**
- **Paino**
- **Lämpötila**
- **Rahamäärä** ja **korko**

Esimerkki 1. Palvelujono.

Oletetaan, että palvelujonoon tulee asiakkaita keskimääriin *k* kappaletta aikayksikköä kohti.

Voidaan osoittaa, että tietyin edellytyksin *aika, jonka seuraavan asiakkaan tuloa jonoon joudutaan odottamaan* on *jatkuva satunnaismuuttuja*, joka noudattaa **eksponenttijakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Huomautus:

- Jos aika, jonka seuraavan asiakkaan tuloa jonoon joudutaan odottamaan noudattaa eksponenttijakaumaa, niin *jollakin aikavälillä jonoon tulevien asiakkaiden lukumäärä* on *diskreetti satunnaismuuttuja*, joka noudattaa **Poisson-jakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **diskreettejä jakaumia**.

Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio

Olkoon

$$\xi : S \to$$

jatkuva satunnaismuuttuja. Reaaliarvoinen funktio f määrittelee jatkuvan satunnaismuuttujan ξ **tiheysfunktion**, jos seuraavat neljä ehtoa pätevät:

(1) $f(x)$ on *jatkuva*

(2) $f(x) \geq 0$ kaikille x

(3) $\Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Tiheysfunktion määritelmän ehdon (1) mukaan tiheysfunktio on *jatkuva* reaaliarvoinen funktio. Määritelmän ehdon (2) mukaan tiheysfunktio on kaikkialla *ei-negatiivinen*. Määritelmän ehto (2) on välttämätön, koska ehdon (3) mukaan tiheysfunktion integraalit yli reaaliakselin välien ovat *todennäköisyyksiä*. Määritelmän ehdon (4) mukaan tiheysfunktion integraali yli koko reaaliakselin = 1.

Jatkuva todennäköisyysjakauma

Jos f on jatkuvan satunnaismuuttujan

$$\xi : S \to$$

tiheysfunktio, sanomme, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa **jatkuvaa todennäköisyysjakaumaa**, jonka tiheysfunktio on f.

Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ *tiheysfunktio* kertoo, miten koko otosavaruuden S *todennäköisyysmassa* (= 1) *jakautuu* satunnaismuuttujan ξ saamien *arvojen väleille*. Tiheysfunktion avulla voidaan määrätä *kaikki* ko. satunnaisilmiöön liittyvät todennäköisyydet.

Tiheysfunktion kuvaaja

Jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktiota $f(x)$ voidaan *kuvata graafisesti* **jatkuvalla käyrällä**

$$(x, f(x))$$

Jatkuva todennäköisyysjakauma ja reaaliakselin välien todennäköisyydet

Olkoon

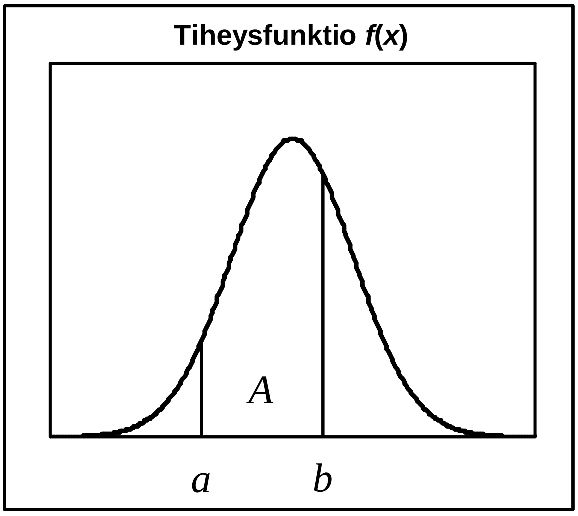
$$\xi : S \to$$

jatkuva satunnaismuuttuja ja $f(x)$ sen *tiheysfunktio*. Tällöin reaaliakselin välin $[a, b]$ todennäköisyys on tiheysfunktion ominaisuuden (3) mukaan

$$\Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Geometrisesti reaaliakselin väliin $[a, b]$ liittyvän todennäköisyyden määrääminen merkitsee tiheysfunktion kuvaajan, x-akselin ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman tasoalueen *pinta-alan laskemista*. Havainnollistetaan tätä seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 2. Normaalijakauma.



Kuva oikealla esittää **normaalijakaumaa** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) noudattavan jatkuvan satunnaismuuttujan ξ *tiheysfunktiota* $f(x)$.

Edellä esitetyn mukaan

$$\begin{aligned}\Pr(a \le \xi \le b) \\ &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \text{Alueen } A \text{ pinta-ala}\end{aligned}$$

Olkoon

$$[a, a + \Delta a]$$

reaaliakselin väli, jossa Δa on *pieni* positiivinen luku. Tiheysfunktion ominaisuuden (3) ja määrätyn integraalin ominaisuuksien perusteella välin $[a, a + \Delta a]$ todennäköisyys on

$$\Pr(a \le \xi \le a + \Delta a) = \int_a^{a+\Delta a} f(x)dx \approx f(a)\cdot\Delta a$$

Siten voimme ajatella, että tiheysfunktion f arvo pisteessä a mittaa todennäköisyyttä sille, että satunnaismuuttuja ξ saa arvoja *lyhyellä* pisteeseen a liittyvällä välillä.

Huomaa, että tiheysfunktion ominaisuudesta (3) ja määrätyn integraalin ominaisuuksista seuraa, että jos ξ on jatkuva satunnaismuuttuja, niin *jokaisen yksittäisen pisteen todennäköisyys* = 0 eli

$$\Pr(\xi = x) = 0 \text{ kaikille } x \in$$

Perustelu:

Olkoon $f(x)$ jatkuvan satunnaismuuttujan ξ tiheysfunktio.

Tiheysfunktion ominaisuuden (3) mukaan

$$\Pr(x \le \xi \le x + h) = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

Annetaan

$$h \to 0$$

Kappaleen 1.6.3. lauseesta 4 ja määrätyn integraalin ominaisuuksista seuraa, että

$$\Pr(\xi = x) = \lim_{h\to 0}\Pr(x \le \xi \le x + h) = \lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} f(x)dx = 0$$

■

Luvussa **Todennäköisyyden aksioomat** on todettu seuraavaa:

(i) Jokainen *tapahtuma* reaalilukujen joukossa voidaan muodostaa reaaliakselin väleistä yhdistelemällä välejä sopivasti joukko-opin operaatioilla.

(ii) Jokaisen *tapahtuman todennäköisyys* saadaan reaaliakselin välien todennäköisyyksistä todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen avulla.

Siten se *satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja ko. jatkuva satunnaismuuttuja kuvaa, hallitaan täydellisesti, jos satunnaismuuttujan tiheysfunktio tunnetaan*.

Todennäköisyyksien vertailu

Olkoon ξ *jatkuva satunnaismuuttuja* ja f vastaava *tiheysfunktio* ja olkoot

$$A = \{a \le \xi \le b\}$$

$$C = \{c \le \xi \le d\}$$

Jos

$$\int_a^b f(x)dx > \int_c^d f(x)dx$$

niin tapahtuma A on *todennäköisempi* kuin tapahtuma C:

$$\Pr(A) > \Pr(C)$$

Esimerkki 3. Eksponenttijakauma.

Kuva alla oikealla esittää **eksponenttijakaumaa** (lisätietoja: ks. luvun **Jatkuvia jakaumia**) noudattavan *jatkuvan satunnaismuuttujan* ξ *tiheysfunktiota* $f(x)$.

Olkoot tapahtumat

$$A = \{a \le \xi \le b\}$$

$$C = \{c \le \xi \le d\}$$

jossa

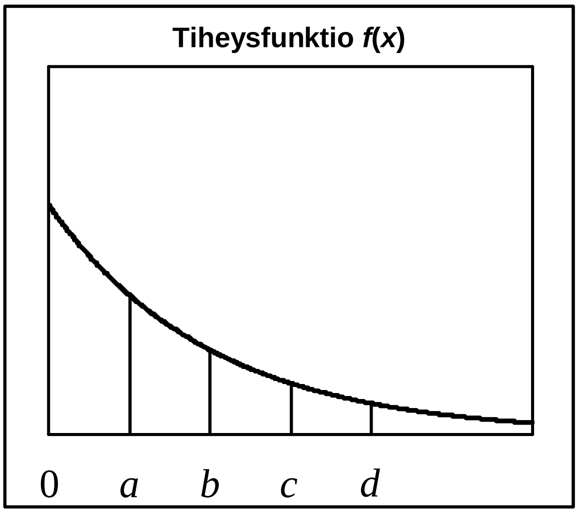
$$b - a = d - c$$

kuten kuvassa.

Kuvan perusteella on ilmeistä, että

$$\Pr(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$> \int_c^d f(x)dx = \Pr(c \le \xi \le d)$$



Siten tapahtuma A on *todennäköisempi* kuin tapahtuma C:

$$\Pr(A) > \Pr(C)$$

Jatkuvien todennäköisyysjakaumien parametrointi

Oletetaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa *jatkuvaa* todennäköisyysjakaumaa, jonka *tiheysfunktio* on f . Tiheysfunktio f riippuu tavallisesti **parametreista** eli *vakioista*, jotka määräävät funktion f

muodon. Tiheysfunktion muodon määrääviä parametreja kutsutaan tavallisesti sen **todennäköisyys-jakauman parametreiksi**, jonka todennäköisyydet ko. tiheysfunktio määrittelee.

Olkoot tiheysfunktion f muodon määräävät parametrit

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$$

Jos halutaan korostaa tiheysfunktion f riippuvuutta sen muodon määräävistä parametreista, kirjoitamme

$$f(x;\, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$$

Parametreilla $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ on tavallisesti jokin sisällöllinen *tulkinta* siinä satunnaisilmiössä, jonka malliksi f on konstruoitu.

Parametrien $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ arvot ovat sovelluksissa tavallisesti *tuntemattomia* ja niiden arvot on **estimoitava** eli *arvioitava* havaintojen perusteella; lisätietoja: ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Estimointi**. Parametreja $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ koskeva *hypoteeseja* eli *oletuksia* voidaan *testata* ns. **tilastollisin testein**; ks. monisteen **Tilastolliset menetelmät** lukua **Tilastolliset testit**.

Havainnollistus: Eksponenttijakauma

Tarkastellaan jonkin tapahtuman *odotusaikaa* satunnaismuuttujana ja oletetaan, että tapahtumien *keskimääräinen* lukumäärä jotakin aikayksikköä kohden on λ. Tällöin seuraavan tapahtuman *odotusaika* ξ on *jatkuva satunnaismuuttuja*, joka voi saada *kaikki* ei-negatiiviset reaalilukuarvot.

Tietyin ehdoin satunnaismuuttuja ξ noudattaa *jatkuvaa todennäköisyysjakaumaa*, jonka *tiheys-funktio* on muotoa

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,,\ x \ge 0\,,\ \lambda \ge 0$$

Satunnaismuuttujan ξ todennäköisyysjakaumaa sanotaan **eksponenttijakaumaksi**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Tarkastellaan sovelluksena erään yrityksen puhelinkeskukseen tulevien puheluiden odotusaikoja, kun oletamme, että keskukseen tulee keskimäärin 4 puhelua minuutissa.

Oletuksen mukaan satunnaismuuttujan

ξ = ”Seuraavan puhelun odotusaika”

tiheysfunktio on muotoa

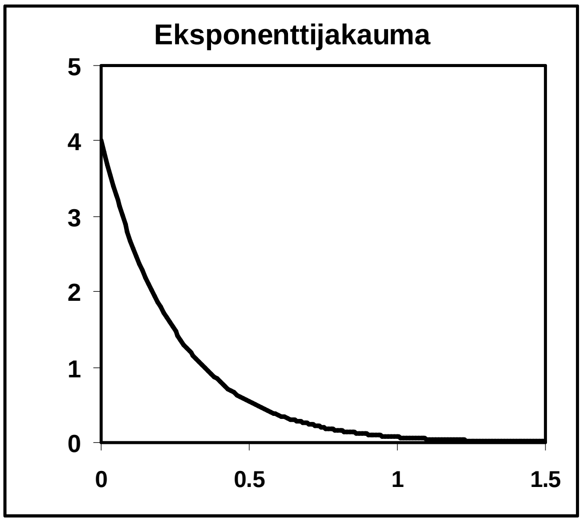
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,,\ x \ge 0\,,\ \lambda \ge 0$$

jossa

$$\lambda = 4$$

kun aikayksikkönä on 1 minuutti.

Kuva oikealla esimerkin eksponenttijakauman tiheysfunktion kuvaajaa välillä [0, 1.5].



Haluamme ratkaista seuraavat tehtävät:

(a) Määrää todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *korkeintaan* 15 sekuntia.

(b) Määrää todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *korkeintaan* 30 sekuntia.

(c) *Kumpi on todennäköisempää*: Se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 15-30 sekuntia, vai se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 30-60 sekuntia?

(d) Määrää todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *yli* 60 sekuntia.

Käytämme tehtävien (a)-(d) ratkaisemisessa kolmea aputulosta:

Aputulos 1:

Tapahtuman $\xi \le t$ todennäköisyys on

$$\Pr(\xi \le t) = \int_0^t f(x)dx = 4\int_0^t e^{-4x}dx = 4\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_0^t = 1 - e^{-4t}$$

Aputulos 2:

Tapahtuman $\xi > t$ todennäköisyys on komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan ja aputuloksen 1 nojalla

$$\Pr(\xi > t) = 1 - \Pr(\xi \le t) = e^{-4t}$$

Aputulos 3:

Tapahtuman $s \le \xi \le t$ todennäköisyys on

$$\Pr(s \le \xi \le t) = \int_s^t f(x)dx = 4\int_s^t e^{-4x}dx = 4\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_s^t = e^{-4s} - e^{-4t}$$

(a) Määrätään todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *korkeintaan* 15 sekuntia.

Tapahtuman $\xi \le 1/4$ min todennäköisyys on aputuloksen 1 nojalla

$$\Pr\left(\xi \le \frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-4\times\frac{1}{4}} = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

(b) Määrätään todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *korkeintaan* 30 sekuntia.

Tapahtuman $\xi \le 1/2$ min todennäköisyys on aputuloksen 1 nojalla

$$\Pr\left(\xi \le \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-4\times\frac{1}{2}} = 1 - e^{-2} \approx 0.865$$

(c) *Kumpi on todennäköisempää*: Se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 15-30 sekuntia, vai se, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan 30-60 sekuntia?

Tarkastellaan tapahtumia

$$1/4 \text{ min} \le \xi \le 1/2 \text{ min}$$

ja

$$1/2 \text{ min} \le \xi \le 1 \text{ min}$$

Niiden todennäköisyydet ovat aputuloksen 3 nojalla

$$\Pr\left(\frac{1}{4} \le \xi \le \frac{1}{2}\right) = e^{-4\times\frac{1}{4}} - e^{-4\times\frac{1}{2}} = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233$$

ja

$$\Pr\left(\frac{1}{2} \le \xi \le 1\right) = e^{-4\times\frac{1}{2}} - e^{-4\times 1} = e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$$

Siten tapahtuma

$$1/4 \text{ min} \le \xi \le 1/2 \text{ min}$$

on todennäköisempi kuin tapahtuma

$$1/2 \text{ min} \le \xi \le 1 \text{ min}$$

(d) Määrätään todennäköisyys, että seuraavaa puhelua joudutaan odottamaan *yli* 60 sekuntia.

Tapahtuman $\xi > 1$ min todennäköisyys on aputuloksen 2 nojalla

$$\Pr(\xi > 1) = 1 - \Pr(\xi \le 1) = e^{-4} \approx 0.018$$

Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan mukaan tämä merkitsee seuraavaa: Keskus joutuu odottamaan seuraavaa puhelua *kauemmin* kuin yhden minuutin *keskimäärin* melkein 2 (≈ 100×0.018) kertaa 100:sta odotuskerrasta.

Jatkuvia todennäköisyysjakaumia

Luvussa **Jatkuvia todennäköisyysjakaumia** määritellään seuraavat jatkuvat jakaumat:

- **Jatkuva tasainen jakauma**.
- **Eksponenttijakauma**.
- **Normaalijakauma**.
- **Log-normaalijakauma**.
- **Cauchy-jakauma**.
- **Gamma-jakauma**.
- **Beta-jakauma**.
- **Weibull-jakauma**.

Lisäksi luvussa esitellään jakaumien tärkeimmät matemaattiset ominaisuudet.

9.5. Diskreetit jakaumat *vs* jatkuvat jakaumat

(i) Olkoon ξ **diskreetti satunnaismuuttuja** ja $f(\cdot)$ sen **pistetodennäköisyysfunktio**.

Olkoon T diskreetin satunnaismuuttujan ξ saamien arvojen muodostama äärellinen tai numeroituvasti ääretön joukko. Pistetodennäköisyysfunktion $f(\cdot)$ arvot pisteissä $x_i \in T$ *ovat todennäköisyyksiä*:

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i)\,,\ x_i \in T$$

Koska funktion f arvo pisteessä x_i *on todennäköisyys*, niin

$$0 \le f(x_i) \le 1\,,\ x_i \in T$$

(ii) Olkoon ξ **jatkuva satunnaismuuttuja** ja $f(\cdot)$ sen **tiheysfunktio**.

Olkoon T jatkuvan satunnaismuuttujan ξ saamien *arvojen* muodostama väli. Tiheysfunktion $f(\cdot)$ arvot pisteissä $x \in T$ *eivät ole todennäköisyyksiä*, mutta reaaliakselin *välien* $[a, b] \subset T$ todennäköisyydet saadaan kaavasta

$$\Pr(a \le \xi \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Koska tiheysfunktion f arvo pisteessä x *ei ole todennäköisyys, on mahdollista*, että

$$f(x) > 1$$

10. Kertymäfunktio

Satunnaismuuttujan kertymäfunktio määrää täysin sen todennäköisyysjakauman. Kertymäfunktioiden yleistä teoriaa kehitettäessä **ei tarvitse erottaa diskreettejä**, **jatkuvia** tai **jotakin muuta tyyppiä olevia jakaumia toisistaan**. Siksi kertymäfunktio on keskeinen työväline *todennäköisyyslaskennassa* ja *matemaattisessa tilastotieteessä*.

Tarkastelemme tässä luvussa *kertymäfunktioiden yleisiä ominaisuuksia*. Sen lisäksi tarkastelemme erikseen *diskreettien jakaumien kertymäfunktioita* ja *jatkuvien jakaumien kertymäfunktioita*.

Avainsanat:

Diskreetti jakauma, Diskreetti satunnaismuuttuja, Jatkuva jakauma, Jatkuva satunnaismuuttuja, Kertymäfunktio, Normaalijakauma, Piikkifunktio, Pistetodennäköisyysfunktio, Porrasfunktio, Satunnaismuuttuja, Tiheysfunktio, Todennäköisyysjakauma

10.1. Kertymäfunktio ja sen ominaisuudet

Olkoon

$$\xi : S \to$$

satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujan ξ **kertymäfunktio** on reaaliarvoinen funktio

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

Kertymäfunktion F määritelmässä

ξ = *satunnaismuuttuja*

x = *reaaliluku*, kertymäfunktion F *argumentti*

Määritelmänsä mukaan satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio F on reaalilukujen joukon kuvaus välille [0,1]:

$$F : \quad \to [0,1]$$

Kertymäfunktion F arvo pisteessä x on *todennäköisyys* sille, että satunnaismuuttuja ξ saa arvoja, jotka ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin reaaliluku x. Piste x erottaa *vasemmalle puolelleen todennäköisyysmassan, jonka koko on*

$$\Pr(\xi \le x) = F(x)$$

Satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio F kuvaa sitä, miten *todennäköisyysmassaa kertyy tai kumuloituu lisää*, kun kertymäfunktion argumentti x *kasvaa*.

Kertymäfunktio on keskeinen työväline **todennäköisyyslaskennassa** ja **matemaattisessa tilastotieteessä**. Tämä johtuu siitä, että kertymäfunktio määritellään samalla tavalla *kaikille* satunnaismuuttujille olivatpa ne diskreettejä, jatkuvia tai jotakin muuta tyyppiä.

Satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio määrää *kaikkien* ko. satunnaisilmiöön liittyvien *tapahtumien todennäköisyydet*. Tämä johtuu seuraavista seikoista:

(i) Jokaista tapahtumaa vastaa jokin reaalilukujen joukon osajoukko, joka voidaan muodostaa soveltamalla korkeintaan numeroituva määrä tavanomaisia *joukko-opin operaatioita* muotoa $(-\infty,x]$ oleviin reaaliakselin väleihin.

(ii) Jokaisen tapahtuman todennäköisyys saadaan tyyppiä $(-\infty,x]$ olevien reaaliakselin välien todennäköisyyksistä *todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen* avulla.

Todistamme alla kaksi lausetta, jotka sisältävät kertymäfunktion keskeiset ominaisuudet.

Lause 1.

Olkoon

$$\xi : S \to$$

satunnaismuuttuja ja

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

sen kertymäfunktio.

Kertymäfunktiolla F on seuraavat ominaisuudet:

(i) $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

(iii) F on funktiona *ei-vähenevä*:

$$F(x_1) \le F(x_2), \text{ jos } x_1 \le x_2$$

(iv) F on funktiona *jatkuva oikealta*:

$$\lim_{h\to0+} F(x+h) = F(x)$$

Todistus:

Todistamme seuraavassa sen, että satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktiolla

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

on ominaisuudet (i)-(iv).

(i) $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

Olkoon

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

laskeva lukujono ja lisäksi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

Tällöin

$$\{\xi \le x_1\} \supset \{\xi \le x_2\} \supset \{\xi \le x_3\} \supset \cdots \to \varnothing$$

Kappaleen 1.6.3. lauseen 4 mukaan

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(\xi \le x_n) = 0$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Olkoon

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

nouseva lukujono ja lisäksi

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

Tällöin

$$\{\xi \le x_1\} \subset \{\xi \le x_2\} \subset \{\xi \le x_3\} \subset \cdots \to$$

ja

$$\{\xi > x_1\} \supset \{\xi > x_2\} \supset \{\xi > x_3\} \supset \cdots \to \varnothing$$

Kappaleen 1.6.3. lauseen 4 mukaan

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(\xi > x_n) = 0$$

joten

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(\xi \le x_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \Pr(\xi > x_n) = 1$$

(iii) F on funktiona *ei-vähenevä*:

$$F(x_1) \le F(x_2), \text{ jos } x_1 \le x_2$$

Olkoon

$$x_1 \le x_2$$

Tällöin

$$\{\xi \le x_1\} \subset \{\xi \le x_2\}$$

joten

$$F(x_1) = \Pr(\xi \le x_1) \le \Pr(\xi \le x_2) = F(x_2)$$

(iv) F on funktiona *jatkuva oikealta*:

$$\lim_{h\to 0+} F(x+h) = F(x)$$

Olkoon

$$h_1 > h_2 > h_3 > \cdots \ge 0$$

laskeva lukujono ja lisäksi

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$$

Tällöin

$$\{\xi \le x+h_1\} \supset \{\xi \le x+h_2\} \supset \{\xi \le x+h_3\} \supset \cdots \to \{\xi \le x\}$$

Kappaleen 1.6.3. lauseen 3 kohdan (b) mukaan

$$\lim_{n\to+\infty} F(x+h_n) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(\xi \le x+h_n) = \Pr(\xi \le x) = F(x)$$

■

Lauseen 1 mukaan satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktiolla

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

on ominaisuudet (i)-(iv). Lisäksi voidaan osoittaa, että jokainen funktio

$$F: \quad \to [0,1]$$

joka toteuttaa ehdot (i)-(iv) on jonkin satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio.

Lause 2.

Jos funktio

$$F: \quad \to [0,1]$$

on kertymäfunktio, niin

(v) $\Pr(\xi > x) = 1 - F(x)$

(vi) $\Pr(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a)$

Todistus:

(v) *Komplementtitapahtuman todennäköisyyden* kaavan nojalla

$$\Pr(\xi > x) = 1 - \Pr(\xi \leq x) = 1 - F(x)$$

(vi) Koska

$$\{\xi \leq b\} = \{\xi \leq a\} \cup \{a < \xi \leq b\}$$

ja

$$\{\xi \leq a\} \cap \{a < \xi \leq b\} = \varnothing$$

niin *toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännöstä* seuraa, että

$$F(b) = \Pr(\xi \leq b\} = \Pr(\xi \leq a) + \Pr(a < \xi \leq b) = F(a) + \Pr(a < \xi \leq b)$$

josta saadaan yhtälö

$$F(b) - F(a) = \Pr(a < \xi \leq b)$$

■

Useimmissa todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppikirjoissa olevat *normaali*-, χ^2-, *F*- ja *t*-*jakaumien* **tilastolliset taulukot** *liittyvät ko. jakaumien kertymäfunktion arvoihin*:

Normaalijakauman taulukoissa on tavallisesti taulukoitu kertymäfunktion arvoja useille eri argumentin x arvoille (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**). Sen sijaan **χ^2-, *F*- ja *t*-jakaumien taulukoissa** on tavallisesti taulukoitu argumentin x arvoja vain muutamille todennäköisyyksille (lisätietoja: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**).

10.2. Diskreetin jakauman kertymäfunktio

Olkoon

$$\xi : S \rightarrow$$

diskreetti satunnaismuuttuja, T satunnaismuuttujan ξ äärellinen tai numeroituvasti ääretön arvojen joukko ja f sen *pistetodennäköisyysfunktio*. Tällöin satunnaismuuttujan ξ **kertymäfunktio** on

$$F(x) = \Pr(\xi \leq x) = \sum_{i \mid x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{i \mid x_i \leq x} \Pr(\xi = x_i)$$

Diskreetin jakauman kertymäfunktion F määritelmän mukaan kertymäfunktion F arvo pisteessä x eli todennäköisyys tapahtumalle

$$\xi \leq x$$

saadaan *laskemalla yhteen kaikki pistetodennäköisyydet*

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

joita vastaavat satunnaismuuttujan ξ arvot $x_i \leq x$.

Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio F on *epäjatkuva ei-vähenevä* funktio. *Kaikkien* satunnaismuuttujaan ξ liittyvien tapahtumien todennäköisyydet voidaan määrätä sen kertymäfunktion avulla.

Diskreetin jakauman pistetodennäköisyysfunktion ja kertymäfunktion yhteys

Olkoon ξ *diskreetti satunnaismuuttuja* ja T sen *tulosvaihtoehtojen* eli *arvojen* joukko. Olkoon

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

satunnaismuuttujan ξ *pistetodennäköisyysfunktio* ja

$$F(x) = \Pr(\xi \le x) = \sum_{i \,|\, x_i \le x} p_i$$

satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktio*. Tällöin

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) \ , \ x_i \in T$$

Diskreetin jakauman kertymäfunktion kuvaaja

Diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio F on *epäjatkuva ei-vähenevä* funktio, jolla on *epäjatkuvuuskohta* eli *hyppäys* jokaisessa pisteessä $x_i \in T$, johon liittyvä todennäköisyys

$$\Pr(\xi = x_i) = p_i$$

on *positiivinen*. *Hyppäyksen suuruus* pisteessä x_i on p_i . Peräkkäisten pisteiden x_{i-1} ja x_i *välissä* kertymäfunktio F saa *vakioarvon*. Siten diskreetin satunnaismuuttujan kertymäfunktio on **porrasfunktio**, jossa todennäköisyydet p_i määräävät *askelmien korkeudet* ja erotukset $x_i - x_{i-1}$ määräävät *askelmien syvyydet*.

Diskreetti jakauma ja reaaliakselin välien todennäköisyydet

Diskreetin jakauman tapauksessa reaaliakselin välin $(a,b]$ *todennäköisyys* on

$$\Pr(a < \xi \le b) = F(b) - F(a) = \sum_{i|x_i \in (a,b]} \Pr(\xi = x_i) = \sum_{i|x_i \in (a,b]} p_i$$

Siten reaaliakselin muotoa $(a, b]$ olevien välien todennäköisyydet voidaan määrätä kahdella tavalla:

(i) Jos jakauman *pistetodennäköisyysfunktio* f tunnetaan, saadaan reaaliakselin välin $(a,b]$ todennäköisyys *laskemalla yhteen* kaikki pistetodennäköisyydet p_i , joita vastaavat satunnaismuuttujan ξ arvot $x_i \in (a, b]$.

(ii) Jos jakauman *kertymäfunktio F* tunnetaan, saadaan reaaliakselin välin $(a, b]$ todennäköisyys laskemalla *kertymäfunktion F arvojen* $F(b)$ ja $F(a)$ *erotus*.

Kaikki ko. satunnaisilmiöön liittyvät tapahtumat saadaan muotoa $(-\infty, b]$ olevista väleistä soveltamalla väleihin korkeintaan numeroituva määrä joukko-opin operaatioita ja niiden todennäköisyydet saadaan muotoa $(-\infty, b]$ olevien välien todennäköisyyksistä soveltamalla todennäköisyyden laskusääntöjä.

Diskreetin jakauman pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio: Havainnollistus

Luvun **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat** kappaleen **Diskreetit satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat** johdattelevassa esimerkissä käsitellään alle kuvatun onnenpyörän pyöräytystä satunnaisilmiönä.

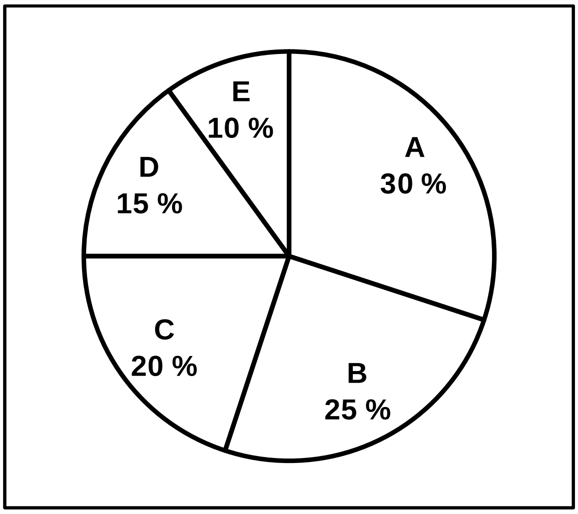
Onnenpyörän pinta on jaettu viiteen sektoriin

A, B, C, D, E

Ks. kuvaa oikealla.

Sektoreiden pinta-alojen osuudet onnenpyörän kokonaispinta-alasta on esitetty alla:

Sektori	%
A	30
B	25
C	20
D	15
E	10
Summa	100



Esimerkissä määriteltiin diskreetti satunnaismuuttuja ξ, joka liittää tulosvaihtoehtoihin

A, B, C, D, E

reaaliluvut seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 1 \\ B &\rightarrow 2 \\ C &\rightarrow 3 \\ D &\rightarrow 4 \\ E &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

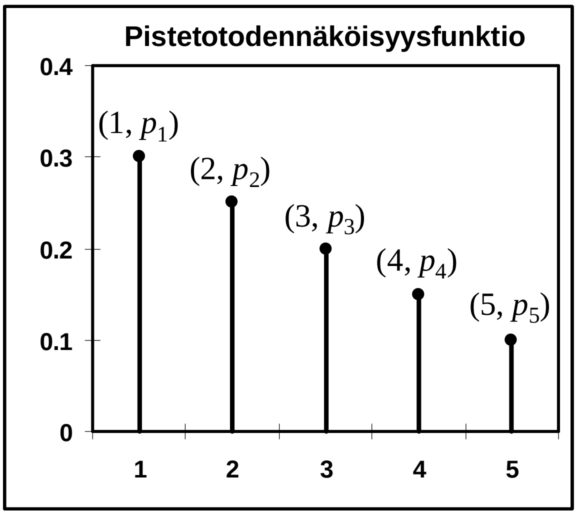
Diskreetin satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio f määritellään kaavalla

$$f(x_i) = \Pr(\xi = x_i) = p_i \;,\; x_i \in T$$

jossa T on satunnaismuuttujan ξ saamien *arvojen joukko*.

Satunnaismuuttujan ξ pistetodennäköisyysfunktio f voidaan määritellä esimerkin tapauksessa seuraavasti:

$$f(1) = \Pr(\xi = 1) = p_1 = 0.30 = \Pr(A)$$
$$f(2) = \Pr(\xi = 2) = p_2 = 0.25 = \Pr(B)$$
$$f(3) = \Pr(\xi = 3) = p_3 = 0.20 = \Pr(C)$$
$$f(4) = \Pr(\xi = 4) = p_4 = 0.15 = \Pr(D)$$
$$f(5) = \Pr(\xi = 5) = p_5 = 0.10 = \Pr(E)$$



Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujan ξ *piste-todennäköisyysfunktiota* graafisesti.

Kuvan *piikkien pituudet* vastaavat siis niitä todennäköisyyksiä, joilla satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa.

Satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktio* määritellään kaavalla

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

Diskreetin satunnaismuuttujan pistetodennäköisyys- ja *kertymäfunktioiden* välillä on seuraava yhteys:

$$\Pr(\xi = x_i) = p_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) \text{ , } x_i \in T$$

Satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktio* *F* voidaan määritellä esimerkin tapauksessa seuraavasti:

$$\begin{array}{rll}
x < 1 : & F(x) = \Pr(\xi \le x) & = 0 \\
1 \le x < 2 : & F(x) = \Pr(\xi \le x) = p_1 & = 0.3 \\
2 \le x < 3 : & F(x) = \Pr(\xi \le x) = p_1 + p_2 & = 0.3 \;\; + 0.25 = 0.55 \\
3 \le x < 4 : & F(x) = \Pr(\xi \le x) = p_1 + p_2 + p_3 & = 0.55 + 0.2 \;\; = 0.75 \\
4 \le x < 5 : & F(x) = \Pr(\xi \le x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & = 0.75 + 0.15 = 0.90 \\
5 \le x \;\;\;\;\; : & F(x) = \Pr(\xi \le x) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 & = 0.9 \;\; + 0.1 \;\; = 1
\end{array}$$

Kuva alla oikealla esittää satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktiota* graafisesti.

Kuvan *porrasaskelmien korkeudet* vastaavat niitä todennäköisyyksiä, joilla satunnaismuuttuja ξ saa arvonsa:

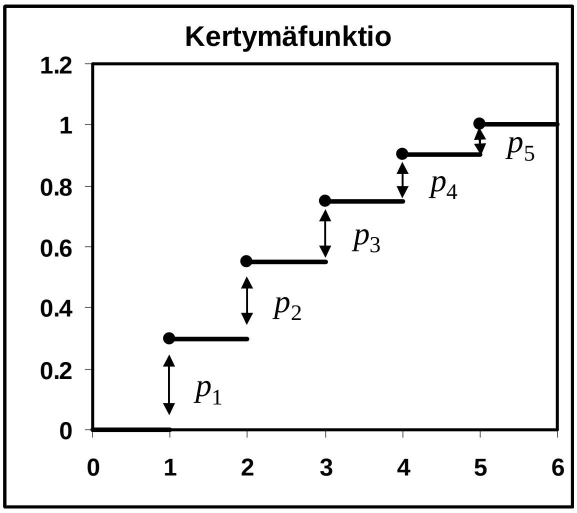
$$p_1 = \Pr(\xi = 1) = 0.30 = \Pr(A)$$

$$p_2 = \Pr(\xi = 2) = 0.25 = \Pr(B)$$

$$p_3 = \Pr(\xi = 3) = 0.20 = \Pr(C)$$

$$p_4 = \Pr(\xi = 4) = 0.15 = \Pr(D)$$

$$p_5 = \Pr(\xi = 5) = 0.10 = \Pr(E)$$



10.3. Jatkuvan jakauman kertymäfunktio

Olkoon

$$\xi : S \to$$

jatkuva satunnaismuuttuja ja *f* sen *tiheysfunktio*. Tällöin satunnaismuuttujan ξ **kertymäfunktio** on

$$F(x) = \Pr(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Jatkuvan jakauman kertymäfunktion F määritelmän mukaan kertymäfunktion *F* arvo pisteessä *x* eli todennäköisyys tapahtumalle

$$\xi \le x$$

saadaan *integroimalla jakauman tiheysfunktio*

$$f(x)$$

välillä $(-\infty, x]$.

Jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio F on *jatkuva aidosti kasvava* funktio. *Kaikkien* satunnaismuuttujaan ξ liittyvien *tapahtumien todennäköisyydet* voidaan määrätä sen kertymäfunktion avulla.

Jatkuvan jakauman tiheysfunktion ja kertymäfunktion yhteys

Olkoon ξ *jatkuva satunnaismuuttuja*. Olkoon

$$f(x)$$

satunnaismuuttujan ξ *tiheysfunktio* ja

$$F(x) = \Pr(\xi \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

satunnaismuuttujan ξ *kertymäfunktio*. Tällöin

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

Jatkuvan jakauman kertymäfunktion kuvaaja

Jatkuvan satunnaismuuttujan kertymäfunktio F on *jatkuva aidosti kasvava* funktio.

Jatkuva jakauma ja reaaliakselin välien todennäköisyydet

Jatkuvan jakauman tapauksessa reaaliakselin välin $(a, b]$ todennäköisyys on

$$\Pr(a < \xi \le b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Siten reaaliakselin muotoa $(a, b]$ olevien välien todennäköisyydet voidaan määrätä kahdella tavalla:

(i) Jos jakauman *tiheysfunktio* f tunnetaan, saadaan reaaliakselin välin $(a, b]$ todennäköisyys *integroimalla* tiheysfunktio f välillä $(a, b]$.

(ii) Jos jakauman *kertymäfunktio* F tunnetaan, saadaan reaaliakselin välin $(a, b]$ todennäköisyys laskemalla *kertymäfunktion* F *arvojen* $F(b)$ ja $F(a)$ *erotus*.

Kaikki ko. satunnaisilmiöön liittyvät tapahtumat saadaan muotoa $(-\infty, b]$ olevista väleistä soveltamalla väleihin korkeintaan numeroituva määrä joukko-opin operaatioita ja niiden todennäköisyydet saadaan muotoa $(-\infty, b]$ olevien välien todennäköisyyksistä soveltamalla todennäköisyyden laskusääntöjä.

Huomaa, että *jatkuville satunnaismuuttujille* pätee:

$$\Pr(a < \xi \le b) = \Pr(a \le \xi < b) = \Pr(a < \xi < b) = \Pr(a \le \xi \le b)$$

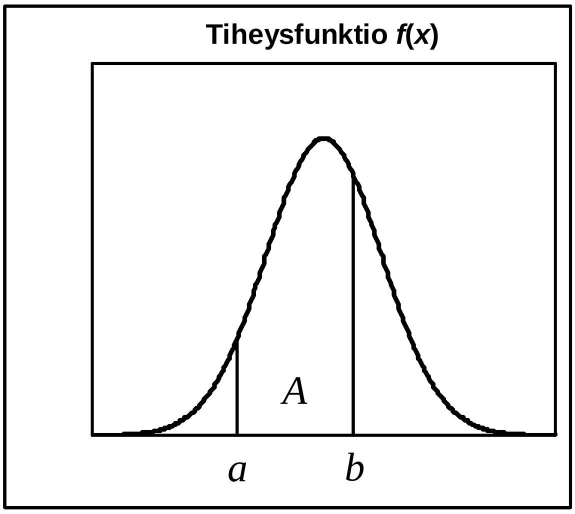
Jatkuvan jakauman tiheysfunktio ja kertymäfunktio: Havainnollistus

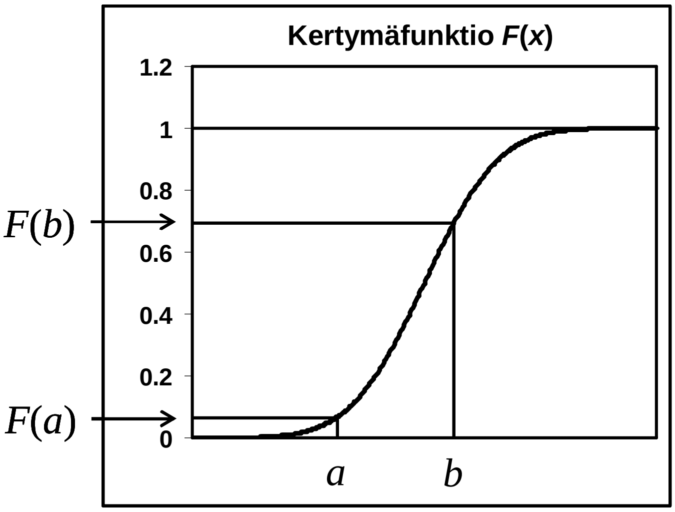
Oletetaan, että satunnaismuuttuja ξ noudattaa **normaalijakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Kuva alla vasemmalla esittää normaalijakauman *tiheysfunktiota* $f(x)$ ja kuva alla oikealla esittää normaalijakauman *kertymäfunktiota* $F(x)$.

Edellä esitetyn mukaan

$$\Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \text{Alueen } A \text{ pinta-ala}$$





11. Jakaumien tunnusluvut

Tarkastelemme tässä luvussa *todennäköisyysjakaumien karakterististen ominaisuuksien kuvaamista* **tunnuslukujen** avulla.

Tärkeimmät tarkasteltavista tunnusluvuista ovat *todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassan painopistettä kuvaava* **odotusarvo** ja *todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta painopisteen suhteen kuvaava* **varianssi** (tai **standardipoikkeama**).

Näiden lisäksi tarkastelemme mm. todennäköisyysjakauman **vinouden** ja **huipukkuuden** karakterisointia sekä jakauman **kvantiileja** ja **moodia**.

Avainsanat:

Desiili, Diskreetti jakauma, Diskreetti satunnaismuuttuja, Diskreetti tasainen jakauma, Eksponenttijakauma, Hajaantuneisuus, Huipukkuus, Jatkuva jakauma, Jatkuva satunnaismuuttuja, Jatkuva tasainen jakauma, Keskusmomentti, Kolmiojakauma, Kvantiili, Kvartiili, Normaalijakauma, Markovin epäyhtälö, Mediaani, Momentti, Moodi, Normaalijakauma, Odotusarvo, Origomomentti, Painopiste, Pistetodennäköisyysfunktio, Prosenttipiste, Satunnaismuuttuja, Sekoitettu normaalijakauma, Standardipoikkeama, Suurten lukujen laki, tiheysfunktio, Tilastollinen stabiliteetti, Todennäköisyysjakauma, Todennäköisyysmassa, Tshebyshevin epäyhtälö Tunnusluku, Varianssi, Vinous

11.1. Odotusarvo

Johdatteleva esimerkki

Tarkastellaan **arpajaisia**, joissa on 1000 *arpaa*, jotka numeroitu yhdestä tuhanteen.

Arpanumerot: 1, 2, … , 1000.

Oletetaan, että arpajaisten *voitonjako* on seuraava:

Voitot (mk)	Voittoja (kpl)
1000	1
100	10
20	100
0	889

Arvotaan voittonumerot seuraavalla tavalla:

(1) Kirjoitetaan arpanumerot lipukkeille.

(2) Pannaan lipukkeet uurnaan ja sekoitetaan uurnan sisältö.

(3) Poimitaan uurnasta *satunnaisesti* 111 arpaa:

- 100 ensimmäistä saa voittona 20 mk
- 10 seuraavaa saa voittona 100 mk
- Viimeinen saa voittona 1000 mk

Voitot yhteensä:

$$1000\times 1+100\times 10+10\times 100=4000 \text{ mk}$$

Voitto yhtä ostettua arpaa kohden eli *voitto/arpa*:

$$\frac{4000}{1000}=4 \text{ mk}$$

Voitto/arpa voidaan laskea myös seuraavalla tavalla:

$$\frac{1\times 1000+10\times 100+100\times 20+889\times 0}{1000}$$
$$=\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0=4 \text{ mk}$$

Voitto/arpa saadaan siis laskutoimituksella

$$\frac{1}{1000}\times 1000+\frac{10}{1000}\times 100+\frac{100}{1000}\times 20+\frac{889}{1000}\times 0=4 \text{ mk}$$

jossa *voitto/arpa* on laskettu **voittojen painotettuna summana**, **jossa painoina on käytetty voittojen todennäköisyyksiä**:

$$\Pr(\text{Voitto}=1000 \text{ mk})=\frac{1}{1000}=0.001$$

$$\Pr(\text{Voitto} = 100 \text{ mk}) = \frac{10}{1000} = 0.01$$

$$\Pr(\text{Voitto} = 20 \text{ mk}) = \frac{100}{1000} = 0.1$$

$$\Pr(\text{Voitto} = 0 \text{ mk}) = \frac{889}{1000} = 0.889$$

Siten suuretta *voitto*/*arpa* laskettaessa on käytetty kaavaa

$$voitto / arpa = \sum_i x_i p_i$$

jossa

x_i = *i*. voitto

p_i = on voiton x_i todennäköisyys

Suuretta *voitto*/*arpa* kutsutaan todennäköisyyslaskennassa *voiton* **odotusarvoksi**. Voiton odotusarvo on *odotettavissa oleva voitto,* jos ostaa *yhden arvan*. Voiton odotusarvo kertoo siis *keskimääräisen voiton yhtä arpaa kohden*.

Tarkastellaan nyt arpajaisia *satunnaisilmiönä* ja määritellään *satunnaismuuttuja*

$X = voitto$

Satunnaismuuttujan X mahdolliset *arvot* x_i (voitot) ja niiden *todennäköisyydet* p_i on annettu seuraavassa taulukossa:

x_i	$\Pr(X = x_i) = p_i$
1000	$\frac{1}{1000} = 0.001$
100	$\frac{10}{1000} = 0.01$
20	$\frac{100}{1000} = 0.1$
0	$\frac{889}{1000} = 0.889$

Huomautus:

- Tulosvaihtoehto 0 mk ja sen todennäköisyys on otettava mukaan!

Satunnaismuuttujan X *arvot* x_i (voitot) ja niiden *todennäköisyydet*

$\Pr(X = x_i) = p_i$

määrittelevät **diskreetin** todennäköisyysjakauman. Lauseke

$$\sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \Pr(X = x_i)$$

määrittelee *diskreetin satunnaismuuttujan X* **odotusarvon**.

Huomautus:

- Odotusarvo määritellään seuraavassa erikseen *diskreeteille* ja *jatkuville* jakaumille.

Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo

Olkoon X **diskreetti** satunnaismuuttuja ja T sen tulosvaihtoehtojen eli arvojen joukko. Olkoon

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio**. Tällöin satunnaismuuttujan X ja sitä vastaavan todennäköisyysjakauman **odotusarvo** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_{x_i \in T} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in T} x_i \Pr(X = x_i) = \sum_{x_i \in T} x_i p_i$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvolle voidaan antaa seuraava tulkinta: Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.

Huomautuksia:

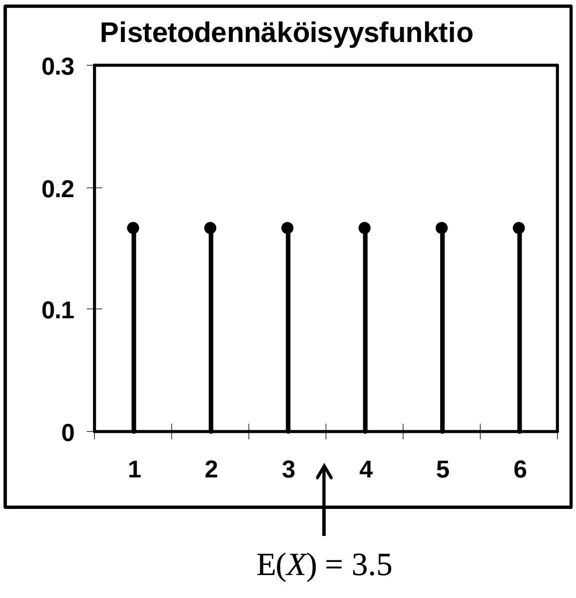
- Jakaumalla *ei välttämättä ole* odotusarvoa.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Diskreetin* satunnaismuuttujan odotusarvo *ei välttämättä kuulu* satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen joukkoon.

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Virheettömän nopan heittoa satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** (lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) *pistetodennäköisyysfunktio* on muotoa

$$\Pr(X = i) = \frac{1}{6} \ , \ i = 1,2,3,4,5,6$$

Ks. kuvaa oikealla.



Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} i \Pr(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} \\ &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5\end{aligned}$$

Huomaa, että nopanheiton tuloksen odotusarvo 3.5 ei esiinny nopanheiton mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukossa.

Esimerkki 2. Onnenpyörä.

Olkoon *diskreetin satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyysfunktio* muotoa

$\Pr(X = 1) = 0.3$

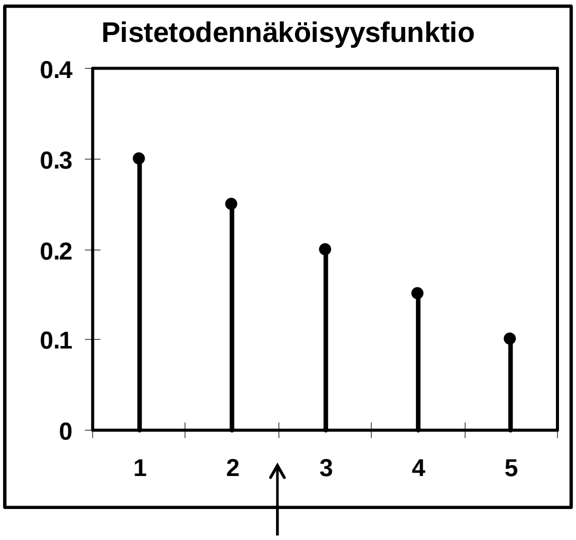
$\Pr(X = 2) = 0.25$

$\Pr(X = 3) = 0.2$

$\Pr(X = 4) = 0.15$

$\Pr(X = 5) = 0.1$

Pistetodennäköisyysfunktio liittyy luvussa **Satunnaismuuttujat ja niiden todennäköisyysjakaumat** käsiteltyyn esimerkkiin onnenpyörästä; ks. kuvaa oikealla.



E(X) = 2.5

Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{5} i \Pr(X = i) = 1\times 0.3 + 2\times 0.25 + 3\times 0.2 + 4\times 0.15 + 5\times 0.1 = 2.5$$

Huomaa, että jakauman odotusarvo 2.5 ei esiinny satunnaismuuttujan X mahdollisten arvojen joukossa.

Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo

Olkoon X *jatkuva* satunnaismuuttuja ja $f(x)$ sen *tiheysfunktio*. Millä tavalla määrittelisimme *odotusarvon* satunnaismuuttujalle X?

Jos X olisi *diskreetti*, sen odotusarvo olisi

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in T} x \Pr(X = x)$$

jossa T on satunnaismuuttujan X arvojen joukko. Emme voi kuitenkaan käyttää tätä määritelmää jatkuvalle satunnaismuuttujalle X, koska tällöin

$\Pr(X = x) = 0$ kaikille $x \in$

Toisaalta, jos ε on pieni positiivinen luku, niin voimme ajatella, että approksimoimme odotusarvoa E(X) seuraavalla tavalla:

$$\mathrm{E}(X) \approx \sum_{k\in} k\varepsilon \Pr(k\varepsilon \le X < (k+1)\varepsilon)$$

jossa on kokonaislukujen joukko. Approksimaatio perustuu siihen, että jos ε on pieni positiivinen luku ja

$$k\varepsilon \le X < (k+1)\varepsilon$$

niin

$$X \approx k\varepsilon$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktion ominaisuuksien perusteella

$$\Pr(k\varepsilon \le X < (k+1)\varepsilon) = \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(x)dx$$

Siten

$$(*) \qquad \mathrm{E}(X) \approx \sum_{k\in} k\varepsilon \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} f(x)dx$$

Koska ε on pieni positiivinen luku ja

$$k\varepsilon \le x < (k+1)\varepsilon$$

lausekkeen $(*)$ integraalissa, niin

$$k\varepsilon \approx x$$

välillä $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$.

Siten olemme saaneet approksimaation

$$\mathrm{E}(X) \approx \sum_{k\in} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Tämä tarkastelu motivoi seuraavan määritelmän esittämisen jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvolle:

Olkoon $f(x)$ **jatkuvan** satunnaismuuttujan X **tiheysfunktio**. Tällöin satunnaismuuttujan X ja sitä vastaavan todennäköisyysjakauman **odotusarvo** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvolle voidaan antaa seuraava tulkinta: Vaikka satunnaismuuttujan saama arvo vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, satunnaismuuttuja saa *keskimäärin* arvoja, jotka vaihtelevat sen odotusarvon ympärillä.

Huomautuksia:

- Jakaumalla *ei välttämättä ole* odotusarvoa.
- *Jos jakaumalla on odotusarvo*, se on jakauman todennäköisyysmassan **painopiste**.
- *Jatkuvan* satunnaismuuttujan odotusarvo *kuuluu* ko. satunnaismuuttujan mahdollisten arvojen joukkoon.

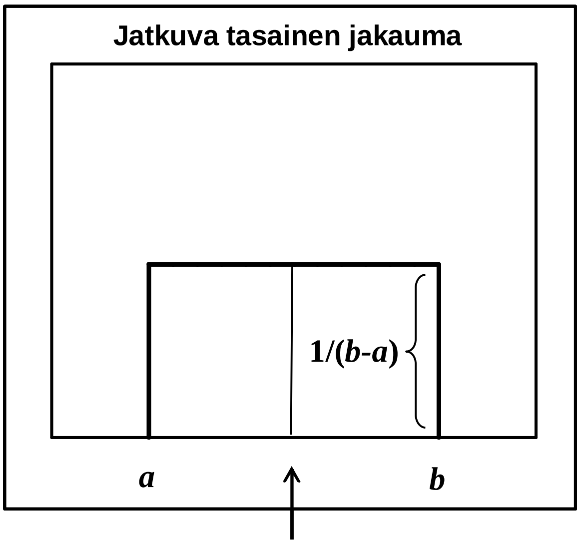
Esimerkki 3. Jatkuvan tasaisen jakauman odotusarvo.

Jatkuvan tasaisen jakauman (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 & , \text{muulloin} \end{cases}$$

Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ &= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_a^b \\ &= (b+a)/2 \\ &= a+(b-a)/2\end{aligned}$$



E(X) = a + (b – a)/2

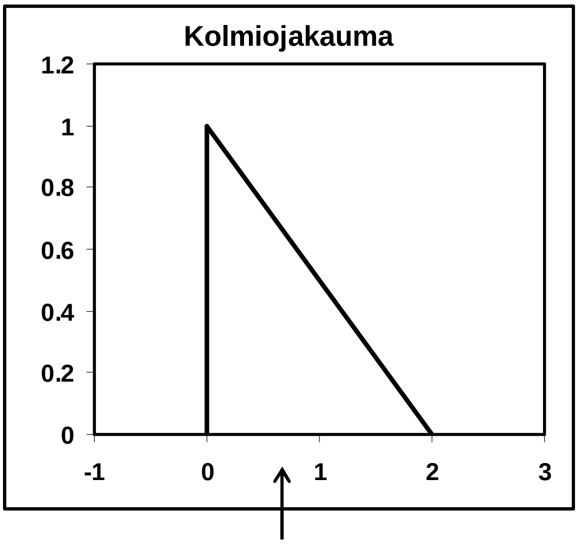
Esimerkki 4. Kolmiojakauman odotusarvo.

Erään **kolmiojakauman** *tiheysfunktio* on

$$f(x) = \begin{cases} -\tfrac{1}{2}x+1 \,, 0 \le x \le 2 \\ 0 \qquad\qquad , \text{muulloin} \end{cases}$$

Jakauman *odotusarvo* on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ &= \int_0^2 x\left(-\tfrac{1}{2}x+1\right)dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$



E(X) = 2/3

Esimerkki 5. Normaalijakauman odotusarvo.

Normaalijakauman (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) *tiheysfunktio* on

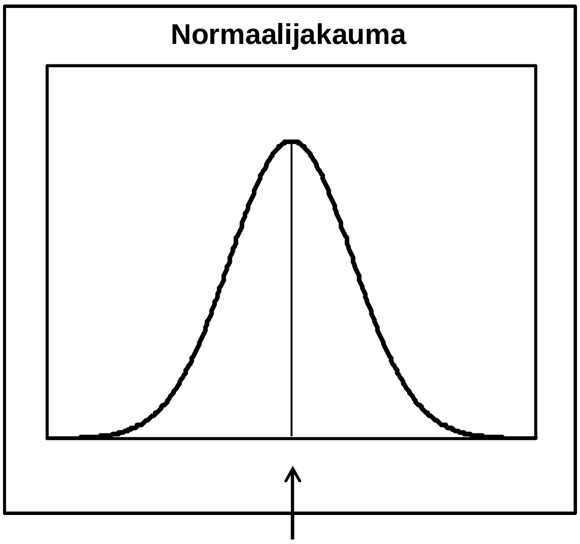
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Normaalijakauman tiheysfunktio on *symmetrinen* pisteen

$x = \mu$

suhteen. Voidaan osoittaa, että jakauman *odotusarvo* on

E(X) = μ



E(X) = μ

11.2. Odotusarvon ominaisuudet

Odotusarvon olemassaolo

Jakaumalla *ei välttämättä ole* odotusarvoa. Esimerkin tällaisesta jakaumasta tarjoaa ns. **Cauchy-jakauma**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Diskreetin jakauman tapauksessa odotusarvon olemassaololla tarkoitetaan sitä, että

$$\sum_{x_i \in T} |x_i| f(x_i) < \infty$$

Jatkuvan jakauman tapauksessa odotusarvon olemassaololla tarkoitetaan sitä, että

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx < \infty$$

Odotusarvo todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassan painopisteenä

Satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman *todennäköisyysmassan* **painopiste**.

Jos satunnaismuuttujan X jakauma on *symmetrinen* pisteen

$$x = a$$

suhteen ja satunnaismuuttujalla X on odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

niin

$$\mathrm{E}(X) = \mu = a$$

Vakion odotusarvo

Olkoon a ei-satunnainen **vakio**. Tällöin

$$\mathrm{E}(a) = a$$

Perustelu:

Perustellaan tulos *jatkuvan jakauman* tapauksessa:

$$\mathrm{E}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} af(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \cdot 1 = a$$

■

Lineaarimuunnoksen odotusarvo

Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$. Tällöin satunnaismuuttujan X **lineaarimuunnoksen**

$$Y = a + bX$$

(a ja b ovat ei-satunnaisia *vakioita*) **odotusarvo** $\mathrm{E}(Y)$ saadaan soveltamalla ko. lineaarimuunnosta odotusarvoon $\mathrm{E}(X)$:

$$\mathrm{E}(Y) = a + b\mathrm{E}(X)$$

Perustelu:

Perustellaan tulos *jatkuvan jakauman* tapauksessa:

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(a + bX) = \int_{-\infty}^{+\infty} (a + bx) f(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = a + b\,\mathrm{E}(X)$$

■

Satunnaismuuttujan X kertominen vakiolla b merkitsee satunnaismuuttujan X saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*. Satunnaismuuttujan X saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella b* muuttaa satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan painopistettä samalla kertoimella.

Vakion a lisääminen satunnaismuuttujaan X merkitsee satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*. Todennäköisyysmassan siirtäminen vakion a verran siirtää todennäköisyysmassan painopistettä *saman* verran. Tähän odotusarvon ominaisuuteen perustuu odotusarvon tulkinta jakauman (todennäköisyysmassan) *sijaintiparametrina*.

Odotusarvon tulkinta jakauman sijaintiparametrina

Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ ja olkoon

$$Y = X + a$$

jossa a on ei-satunnainen vakio. Edellä esitetyn mukaan

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) + a$$

Koska lisäksi odotusarvolla on tulkinta todennäköisyysmassan *painopisteenä*, odotusarvoa kutsutaan usein jakauman (todennäköisyysmassan) **sijaintiparametriksi**.

Oletetaan, että satunnaismuuttujilla X ja Y on odotusarvot ja niiden tiheysfunktiot ovat *yksihuippuisia* ja *symmetrisiä* odotusarvojensa *suhteen*. Tällöin satunnaismuuttujan X todennäköisyysmassan pääosa *sijaitsee vasemmalla* satunnaismuuttujan Y todennäköisyysmassan pääosasta, jos ja vain jos

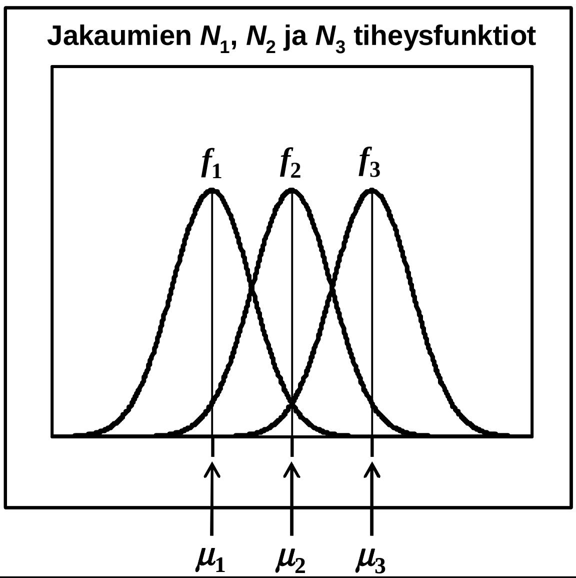
$$\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(Y)$$

Seuraava esimerkki havainnollistaa odotusarvon tulkintaa jakauman (todennäköisyysmassan) *sijaintiparametrina* tilanteessa, jossa jakauma on *yksihuippuinen* ja huippua vastaava piste sijaitsee jakauman määrittelyalueen *sisällä*.

Esimerkki 1. Normaalijakauman odotusarvo.

Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) N_1, N_2 ja N_3 *tiheysfunktioita* f_1, f_2 ja f_3 .

Normaalijakauman tiheysfunktio on *yksihuippuinen* ja *symmetrinen* odotusarvon määräämän pisteen suhteen. Lisäksi tiheysfunktiolla on maksimi odotusarvon määräämässä pisteessä.



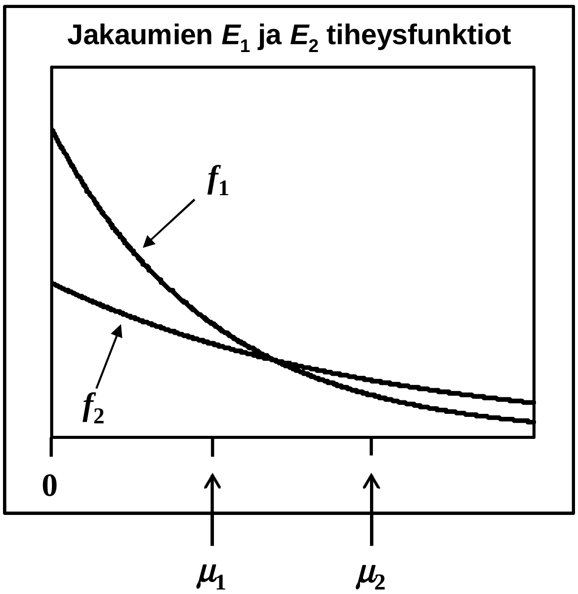
Kuvan perusteella on ilmeistä, että jakaumien N_1, N_2 ja N_3 odotusarvot μ_1, μ_2 ja μ_3 toteuttavat epäyhtälöt

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$$

Voimme ajatella, että kuvan jakaumat N_2 ja N_3 on saatu *siirtämällä* jakauman N_1 todennäköisyysmassaa *oikealle*.

Seuraava esimerkki havainnollistaa odotusarvon tulkintaa jakauman (todennäköisyysmassan) *sijaintiparametrina* tilanteessa, jossa jakauma on kyllä *yksihuippuinen*, mutta huippua vastaava piste sijaitsee jakauman määrittelyalueen *reunalla*.

Esimerkki 2. Eksponenttijakauman odotusarvo.



Kuva oikealla esittää kahden **eksponenttijakauman** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) E_1 ja E_2 *tiheysfunktioita* f_1 ja f_2 .

Eksponenttijakauman tiheysfunktio on *monotonisesti laskeva* kaikille $x \geq 0$.

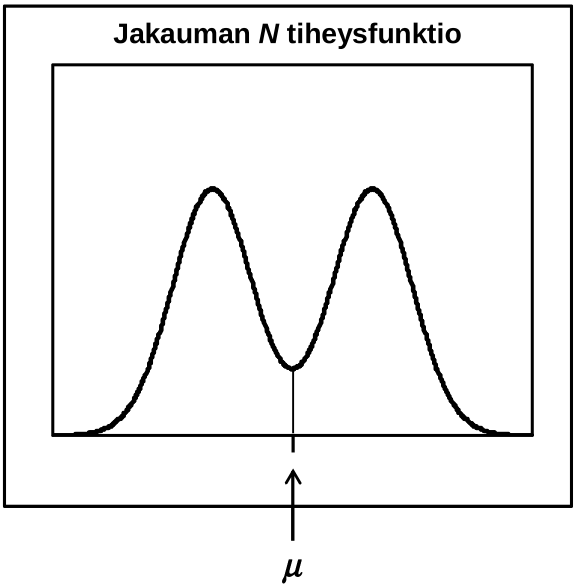
Kuvan jakauman E_1 todennäköisyysmassa on *keskittynyt* jakauman E_2 todennäköisyysmassaa *voimakkaammin origon lähelle*.

Voidaan osoittaa, että jakaumien E_1 ja E_2 odotusarvot μ_1 ja μ_2 toteuttavat epäyhtälön

$$\mu_1 < \mu_2$$

On syytä huomata, että jos satunnaismuuttujan X jakauma on *monihuippuinen*, jakauman todennäköisyysmassan pääosien ei tarvitse olla lähellä odotusarvoa. Havainnollistetaan tätä seuraavalla esimerkillä.

Esimerkki 3. Sekoitetun normaalijakauman odotusarvo.



Kuva oikealla esittää erään ns. **sekoitetun normaalijakauman** N *tiheysfunktiota*.

Kuvan sekoitettu normaalijakauma on saatu muodostamalla *lineaarikombinaatio* kahdesta normaalijakaumasta sopivin painokertoimin. Lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Kuvan tiheysfunktio on *kaksihuippuinen* ja *symmetrinen* pisteen

$$x = \mu$$

suhteen. Jakauman N todennäköisyysmassalla *on kaksi keskittymää* x-akselin suhteen.

Jakauman N odotusarvo μ on selvästi todennäköisyysmassojen keskittymien *välissä*.

Summan ja erotuksen odotusarvot

Satunnaismuuttujien X ja Y **summan $X + Y$ odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)$$

Satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen $X - Y$ odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)$$

Siten odotusarvo on *operaattorina lineaarinen.*

Huomautus:

- Todistus vaatii *kaksiulotteisten satunnaismuuttujien* määrittelemistä ja esitetään siksi luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**.

Lineaarikombinaation odotusarvo

Olkoot

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , n$$

satunnaismuuttujia ja

$$a_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , n$$

(ei-satunnaisia) vakioita. Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , n$ **lineaarikombinaation** eli **painotetun summan**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

odotusarvo on

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathrm{E}(X_i)$$

Tulos on yleistys *kahden satunnaismuuttujan summan odotusarvoa* ja *satunnaismuuttujan lineaari-muunnoksen odotusarvoa* koskevista tuloksista.

11.3. Yleinen odotusarvo

Diskreetin satunnaismuuttujan funktion odotusarvo

Olkoon

$$f(x_i)=\Pr(X=x_i)=p_i\ ,\ x_i\in T$$

diskreetin satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio** ja olkoon g reaaliarvoinen funktio. Tällöin satunnaismuuttujan $g(X)$ **odotusarvo** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{E}(g(X))=\mu_{g(X)}=\sum_{x_i\in T} g(x_i)f(x_i)=\sum_{x_i\in T} g(x_i)\Pr(X=x_i)=\sum_{x_i\in T} g(x_i)p_i$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan funktion odotusarvo

Olkoon

$$f(x)$$

jatkuvan satunnaismuuttujan X **tiheysfunktio** ja olkoon g jatkuva reaaliarvoinen funktio. Tällöin satunnaismuuttujan $g(X)$ **odotusarvo** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{E}(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

11.4. Varianssi ja standardipoikkeama

Varianssi

Olkoon satunnaismuuttujan X *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

Tällöin satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **varianssi** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]$$

Satunnaismuuttujan X varianssi on satunnaismuuttujan X omasta odotusarvostaan μ_X määrätyn *poikkeaman* $(X - \mu_X)$ *neliön odotusarvo.*

Varianssin vaihtoehtoinen laskukaava

Varianssi on tavallisesti kätevintä *laskea* kaavalla

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \alpha_2 - \mu_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2)$$

on satunnaismuuttujan X 2. *momentti* (lisätietoja: ks. kappaletta **Momentit**).

Perustelu:

Olkoon

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

satunnaismuuttujan X *odotusarvo* ja

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2$$

satunnaismuuttujan X *toinen momentti* (ks. kappaletta **Momentit**).

Koska odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ on ei-satunnainen vakio, satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X-\mu)^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(\mu^2)\end{aligned}$$

$$= \alpha_2 - 2\mu \times \mu + \mu^2$$
$$= \alpha_2 - \mu^2$$

■

Standardipoikkeama

Satunnaismuuttujan X **standardipoikkeama** on ei-satunnainen vakio

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}[(X - \mu_X)^2]}$$

Varianssin ja standardipoikkeaman dimensiot

Huomaa, että satunnaismuuttujalla, sen odotusarvolla ja standardipoikkeamalla on aina *sama* **dimensio** eli **laatu**. Sen sijaan satunnaismuuttujalla, sen odotusarvolla ja standardipoikkeamalla on *eri dimensio* eli *laatu* kuin satunnaismuuttujan varianssilla.

Esimerkki:

Jos satunnaismuuttujan laatuna on *metri* (m) niin myös sen odotusarvon ja standardipoikkeaman laatuna on *metri* (m), mutta sen varianssin laatuna on m^2.

Varianssin ja standardipoikkeaman tulkinta

Satunnaismuuttujan varianssi ja standardipoikkeama kuvaavat satunnaismuuttujan *todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan odotusarvon ympärillä*:

(i) Mitä *pienempi* on jakauman varianssi tai standardipoikkeama, sitä voimakkaammin jakauman todennäköisyysmassa *keskittyy* jakauman odotusarvon ympärille.

(ii) Mitä *suurempi* on jakauman varianssi tai standardipoikkeama, sitä voimakkaammin jakauman todennäköisyysmassa *hajaantuu* odotusarvon ympärille.

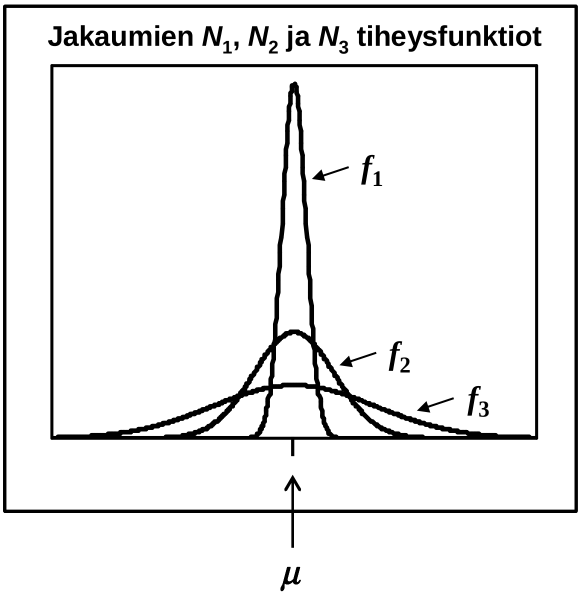
Esimerkki 1. Normaalijakauman varianssi.

Kuva oikealla esittää kolmen **normaalijakauman** (lisätietoja: ks. luvun **Jatkuvia jakaumia**) N_1, N_2 ja N_3 *tiheysfunktioita* f_1, f_2 ja f_3 .

Normaalijakauman tiheysfunktio on *yksihuippuinen* ja *symmetrinen* odotusarvon määräämän pisteen suhteen. Lisäksi tiheysfunktiolla on maksimi odotusarvon määräämässä pisteessä.

Kaikilla kuvan jakaumilla on *sama* odotusarvo μ.

Kuvan perusteella on ilmeistä, että jakauman N_1 todennäköisyysmassa on *keskittynein*, kun taas jakauman N_3 todennäköisyysmassa on *hajaantunein*.



Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että voidaan osoittaa, että jakaumien N_1, N_2 ja N_3 varianssit toteuttavat epäyhtälöt:

$$\mathrm{Var}(X_1) < \mathrm{Var}(X_2) < \mathrm{Var}(X_3)$$

Diskreetin satunnaismuuttujan varianssi

Olkoon X **diskreetti** satunnaismuuttuja ja T sen tulosvaihtoehtojen eli arvojen joukko. Olkoon

$$f(x_i) = \Pr(X = x_i) = p_i \ , \ x_i \in T$$

diskreetin satunnaismuuttujan X **pistetodennäköisyysfunktio**. Tällöin satunnaismuuttujan X **varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = \sum_{x_i \in T} (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

Esimerkki 2. Nopanheitto.

Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** (lisätietoja: ks. luvun **Diskreettejä jakaumia**) *pistetodennäköisyysfunktio*:

$$\mathrm{P}(X = i) = \frac{1}{6} \ , \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{6} i \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{21}{6} = 3.5$$

Satunnaismuuttujan X *toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

Satunnaismuuttujan X *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917$$

Satunnaismuuttujan X *standardipoikkeama* eli *keskihajonta*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{2.917} \approx 1.708$$

Nopanheiton tulosta satunnaisilmiönä kuvaavan **diskreetin tasaisen jakauman** *odotusarvon* ja *varianssin* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset voidaan järjestää seuraavan taulukon muotoon:

	Keskiarvo			Varianssi 1		Varianssi 2		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 p_i$
1	1	1/6	1/6	1	1/6	–2.5	6.25	25/24
2	2	1/6	2/6	4	4/6	–1.5	2.25	9/24
3	3	1/6	3/6	9	9/6	–0.5	0.25	1/24
4	4	1/6	4/6	16	16/6	+0.5	0.25	1/24
5	5	1/6	5/6	25	25/6	+1.5	2.25	9/24
6	6	1/6	6/6	36	36/6	+2.5	6.25	25/24
Σ	21	1	21/6	91	91/6	0	17.5	70/24

Taulukon rivillä Σ on sarakesummat riveiltä 1-6:

Sarake 2: $\sum x_i = 21$

Sarake 3: $\sum p_i = 1$

Sarake 4: $\sum x_i p_i = \mu = 21/6 = 3.5$

Sarake 5: $\sum x_i^2 = 91$

Sarake 6: $\sum x_i^2 p_i = \alpha_2 = 91/6 = 15.167$

Sarake 7: $\sum \left(x_i - \mu \right) = 0$

Sarake 8: $\sum \left(x_i - \mu \right)^2 = 17.5$

Sarake 9: $\sum \left(x_i - \mu \right)^2 p_i = \sigma^2 = 70/24 = 2.917$

Satunnaismuuttujan X *odotusarvon* määräämistä varten tarvittavat laskutoimitukset on suoritettu sarakkeissa 2-4. Rivin Σ sarakkeesta 4 saadaan:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$

Satunnaismuuttujan X *varianssi* voidaan määrätä kahdella tavalla:

Kaava 1:

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2$$

jossa

$$\alpha_2 = \mathrm{E}(X^2) = \sum x_i^2 p_i$$
$$\mu = \mathrm{E}(X) = \sum x_i p_i$$

Kaava 2:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \sum \left(x_i - \mu \right)^2 p_i$$

jossa μ on kuten kaavassa 1.

Kaavan 1 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 5-6:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum x_i p_i = 21/6 = 3.5$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum x_i^2 p_i = 91/6 = 15.167$$

Kaavan 1 mukaan

$$\mathrm{Var}(X) = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6} \right)^2 = \frac{35}{12} = 2.917$$

Kaavan 2 vaatimat laskutoimitukset on tehty sarakkeissa 2-4 ja 7-9:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mu)^2 = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{70}{24} = 2.917$$

Kaavan 2 soveltaminen on siinä mielessä monimutkaisempaa kuin kaavan 1 soveltaminen, että kaavan 2 erotuksien $(x_i - \mu)$ määräämiseksi on *ensin* määrättävä odotusarvo μ.

Jatkuvan satunnaismuuttujan varianssi

Olkoon

$$f(x)$$

jatkuvan satunnaismuuttujan X **tiheysfunktio**. Tällöin satunnaismuuttujan X **varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx$$

Esimerkki 3. Jatkuva tasainen jakauma.

Erään **jatkuvan tasaisen jakauman** (lisätietoja: ks. luvun **Jatkuvia jakaumia**) *tiheysfunktio*:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & 0 \le x \le b \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan X *odotusarvo*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^b x\frac{1}{b}dx = \left[\frac{1}{2b}x^2\right]_0^b = \frac{b}{2}$$

Satunnaismuuttujan X *toinen momentti*:

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^b x^2\frac{1}{b}dx = \left[\frac{x^3}{3b}\right]_0^b = \frac{b^2}{3}$$

Satunnaismuuttujan X *varianssi*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = \frac{b^2}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{12}$$

Satunnaismuuttujan X *standardipoikkeama*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

11.5. Varianssin ominaisuudet

Varianssin olemassaolo

Jakaumalla *ei välttämättä ole* varianssia. Esimerkin tällaisesta jakaumasta tarjoaa ns. **Cauchy-jakauma**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Diskreetin jakauman tapauksessa varianssin olemassaololla tarkoitetaan sitä, että

$$\sum_{x_i \in T} (x_i - \mu_X)^2 p_i < \infty$$

Jatkuvan jakauman tapauksessa Varianssin olemassaololla tarkoitetaan sitä, että

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)dx < \infty$$

Vakion varianssi

Olkoon a ei-satunnainen **vakio**. Tällöin

$$\mathrm{Var}(a) = 0$$

Perustelu:

Koska jokaisen ei-satunnaisen vakion a odotusarvo on vakio itse eli

$$\mathrm{E}(a) = a$$

niin suoraan laskemalla saadaan

$$\mathrm{Var}(a) = \mathrm{E}[a-\mathrm{E}(a)]^2 = \mathrm{E}(a-a)^2 = \mathrm{E}(0) = 0$$

■

Lineaarimuunnoksen varianssi

Olkoon satunnaismuuttujan X odotusarvo E(X). Tällöin *satunnaismuuttujan X* **lineaarimuunnoksen**

$$Y = a + bX$$

(a ja b ovat ei-satunnaisia *vakioita*) **varianssi** Var(Y) on

$$\mathrm{Var}(Y) = b^2\mathrm{E}(X)$$

Perustelu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(a+bX) \\
&= \mathrm{E}\left[(a+bX)-\mathrm{E}\left(a+bX\right)\right]^2 \\
&= \mathrm{E}\left[a+bX-a-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\
&= \mathrm{E}\left[bX-b\,\mathrm{E}(X)\right]^2 \\
&= b^2\,\mathrm{E}\left[X-\mathrm{E}(X)\right]^2 \\
&= b^2\,\mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

■

Satunnaismuuttujan X kertominen vakiolla b merkitsee satunnaismuuttujan X saamien arvojen *mittakaavan muuttamista*. Satunnaismuuttujan X saamien arvojen mittakaavan muuttaminen *verrannollisuuskertoimella b* muuttaa satunnaismuuttujan X varianssia kertoimella b^2.

Vakion a lisääminen satunnaismuuttujaan X merkitsee satunnaismuuttujan X jakauman todennäköisyysmassan *siirtoa*. Todennäköisyysmassan siirtäminen *ei muuta* todennäköisyysmassan hajaantuneisuutta.

Standardointi

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja varianssi on

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$$

Tällöin **standardoidun satunnaismuuttujan**

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\mathrm{D}(X)} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

odotusarvo on

$$\mathrm{E}(Z) = 0$$

ja varianssi on

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{D}^2(Z) = 1$$

Huomaa, että tämä pätee *kaikille* satunnaismuuttujille, joilla on odotusarvo ja varianssi.

Perustelu:

Standardoitu satunnaismuuttuja Z on satunnaismuuttujan X lineaarimuunnos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}$$

Siten lineaarimuunnoksen odotusarvon ja varianssin kaavoista seuraa:

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

■

Summan ja erotuksen varianssi

Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*. Tarkastellaan satunnaismuuttujien X ja Y *summan*

$$X + Y$$

ja *erotuksen*

$$X - Y$$

variansseja.

Huomautus:

- Satunnaismuuttujien X ja Y *riippumattomuudella* tarkoitetaan seuraavaa: Se, mitä arvoja satunnaismuuttuja X saa, ei riipu siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja Y saa ja kääntäen, se, mitä arvoja satunnaismuuttuja Y saa, ei riipu siitä, mitä arvoja satunnaismuuttuja X

saa; käsite täsmennetään luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**.

Riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y **summan $X + Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen $X - Y$ varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Huomautus:

- Todistus vaatii *kaksiulotteisen satunnaismuuttujan* määrittelemistä ja esitetään siksi luvussa **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**.

Huomaa, että riippumattomien satunnaismuuttujien X ja Y summalla ja erotuksella on *sama* varianssi:

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Sen sijaan

$$\mathrm{Var}(X-Y) \neq \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$$
$$\mathrm{D}(X+Y) \neq \mathrm{D}(X) + \mathrm{D}(Y)$$
$$\mathrm{D}(X-Y) \neq \mathrm{D}(X) - \mathrm{D}(Y)$$

jossa siis

$$\mathrm{D}^2(\cdot) = \mathrm{Var}(\cdot)$$

Lineaarikombinaation varianssi

Olkoot

$$X_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia ja

$$a_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(ei-satunnaisia) vakioita. Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ **lineaarikombinaation** eli **painotetun summan**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

varianssi on

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\mathrm{Var}(X_i)$$

Tulos on yleistys *kahden satunnaismuuttujan summan varianssia* ja *satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen varianssia* koskevista tuloksista.

Empiirisen jakauman odotusarvo ja varianssi

Oletetaan, että *diskreetin satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot* ovat

$$x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Liitetään satunnaismuuttujan X arvoihin *symmetriset todennäköisyydet*

$$\Pr(X = x_i) = p_i = \frac{1}{n}\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Havaintoarvot x_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ noudattavat satunnaisotannan perusmuodossa, *yksinkertaisessa satunnaisotannassa*, tätä ns. **empiiristä jakaumaa**. Empiirinen jakauma on **diskreetti tasainen jakauma** (lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**) havaintopisteille x_i , $i = 1, 2, \ldots , n$.

Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvon määritelmän mukaan satunnaismuuttujan X **odotusarvo** on

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Satunnaismuuttajan X **2. momentti** on

$$\mathrm{E}(X^2) = \alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Siten satunnaismuuttujan X **varianssi** on

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Huomaa, että satunnaismuuttujan X odotusarvo

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

on lukujen x_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ **aritmeettinen keskiarvo** ja satunnaismuuttujan X varianssi

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

on lukujen x_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ **otosvarianssi**.

Aritmeettisen keskiarvon odotusarvo ja varianssi

Olkoot

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia. Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujilla X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*. Tällöin

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{D}^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Perustelu:

Todistus perustuu riippumattomien satunnaismuuttujien *lineaarikombinaation odotusarvon* ja *varianssin* kaavoihin.

Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettisen keskiarvon* $\bar{X}$ *odotusarvoksi* saadaan

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_i \mathrm{E}\left(X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_i \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

Huomaa, että tämä tulos pätee, vaikka satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *eivät olisi riippumattomia*, koska satunnaismuuttujien summan odotusarvo on aina satunnaismuuttujien odotusarvojen summa.

Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettisen keskiarvon* $\bar{X}$ *varianssiksi* saadaan

$$\mathrm{D}^2(\bar{X}) = \mathrm{D}^2\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \mathrm{D}^2\left(X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i \sigma^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Huomaa, että tämä tulos vaatii sitä, että satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *ovat riippumattomia*, koska satunnaismuuttujien summan varianssi on satunnaismuuttujien varianssien summa, vain jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomia.

■

Huomautuksia:

- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ aritmeettisen keskiarvon odotusarvo on *sama* kuin yksittäisten muuttujien yhteinen odotusarvo μ.
- Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ aritmeettinen keskiarvo vaihtelee varianssilla mitattuna *vähemmän* kuin muuttujat itse (jos $n > 1$).

11.6. Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt

Markovin epäyhtälö

Olkoon $g(X)$ satunnaismuuttujan X *positiivinen* reaaliarvoinen funktio, jonka odotusarvo on

$$\mathrm{E}(g(X))$$

Tällöin jokaiselle reaaliselle, ei-satunnaiselle vakiolle $a > 0$ pätee **Markovin epäyhtälö**:

$$\Pr(g(X) \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

Perustelu:

Todistamme Markovin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.

Olkoon $g(X)$ jatkuvan satunnaismuuttujan X *positiivinen* ja jatkuva reaaliarvoinen funktio, jonka odotusarvo on

$$\mathrm{E}(g(X))$$

Olkoon satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio*

$$f(x)$$

ja olkoon

$$a > 0$$

ei-satunnainen *vakio*.

Markovin epäyhtälö saadaan epäyhtälöketjusta

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \geq a \int_S f(x) dx = a \Pr(g(X) \geq a)$$

jossa

$$S = \{x | g(x) \geq a\}$$

■

Markovin epäyhtälön mukaan todennäköisyys sille, että mielivaltaisen satunnaismuuttujan X (jolle odotusarvo $\mathrm{E}(g(X))$ on olemassa) *positiivinen* funktio $g(X)$ saa *suurempia* arvoja kuin $a > 0$, on *korkeintaan*

$$\frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

Markovin epäyhtälön erikoistapauksena saadaan *positiivisille* satunnaismuuttujille X epäyhtälö

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$$

jossa $a > 0$.

Markovin epäyhtälön mukaan mielivaltaisen *positiivisen* satunnaismuuttujan (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X)$ on olemassa) todennäköisyysjakauman todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100 \times \frac{\mathrm{E}(X)}{a} \%$$

on etäisyyttä $a > 0$ *kauempana* origosta.

Tshebyshevin epäyhtälö

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja varianssi on

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Tällöin pätee **Tshebyshevin epäyhtälö**:

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Perustelu:

Todistamme Tshebyshevin epäyhtälön *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.

Olkoon X jatkuva satunnaismuuttuja, jonka *tiheysfunktio* on

$$f(x)$$

Olkoon edelleen satunnaismuuttujan X *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(X) = \mu$$

ja *varianssi*

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

sekä olkoon

$$k > 0$$

ei-satunnainen *vakio*.

Tshebyshevin epäyhtälö seuraa *Markovin epäyhtälöstä*

$$\Pr(g(X) \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{a}$$

valitsemalla

$$g(x) = (x-\mu)^2$$
$$a = k^2\sigma^2$$

■

Tshebyshevin epäyhtälöstä seuraa *komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan* nojalla

$$\Pr(|X-\mu| < k\sigma) = 1 - \Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Tshebyshevin epäyhtälön mukaan mielivaltaisen satunnaismuuttujan X (jonka odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ ovat olemassa) todennäköisyysmassasta *korkeintaan*

$$100 \times \frac{1}{k^2}\ \%$$

on etäisyyttä $k\sigma$ *kauempana* jakauman todennäköisyysmassan painopisteestä μ.

Siten Tshebyshevin epäyhtälö antaa *absoluuttisen ylärajan* mielivaltaisen satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman ”häntäalueiden” todennäköisyysmassan osuudelle satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauman koko todennäköisyysmassasta (= 1). Jos satunnaismuuttujan X jakauma spesifioidaan tarkemmin, ”häntäalueiden” todennäköisyysmassan osuudesta voidaan antaa tarkempia arvioita.

Esimerkki. Normaalijakauma.

Tshebyshevin epäyhtälön mukaan *kaikille satunnaismuuttujille X*, joilla on odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja varianssi $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, pätee

$$\Pr(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9} \approx 0.111$$

Jos tiedämme, että X noudattaa **normaalijakaumaa** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**), saadaan (esimerkiksi normaalijakaumien taulukoiden avulla) ko. todennäköisyydelle seuraava tarkempi arvio:

$$\Pr(|X-\mu| \geq 3\sigma) \approx 0.003$$

11.7. Momentit

Olkoon X satunnaismuuttuja. Tällöin satunnaismuuttujan X^k odotusarvo

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \, , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

on satunnaismuuttujan X ***k*. momentti** eli ***k*. momentti origon suhteen** eli ***k*. origomomentti**.

Erityisesti:

$$\alpha_0 = 1$$
$$\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu$$

Siten satunnaismuuttujan X 1. momentti origon suhteen on satunnaismuuttujan X *odotusarvo*.

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka *odotusarvo* on

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \alpha_1$$

Tällöin satunnaismuuttujan $(X-\mu)^k$ odotusarvo

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^k] = \mu_k \, , \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

on satunnaismuuttujan X ***k*. keskusmomentti** eli ***k*. momentti painopisteen μ suhteen**.

Erityisesti:

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma^2$$

Siten satunnaismuuttujan X 1. keskusmomentti *häviää* ja 2. keskusmomentti on satunnaismuuttujan *X varianssi*.

Momenttien olemassaolo

Satunnaismuuttujan X k. origomomentti *on olemassa*, jos

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty$$

Satunnaismuuttujan X k. keskusmomentti *on olemassa*, jos vastaava origomomentti on olemassa.

Voidaan osoittaa, että jos

$$\mathrm{E}(|X|^n) < \infty$$

jollekin $n \in$, niin

$$\mathrm{E}(|X|^k) < \infty$$

kaikille $k < n$. Jos siis satunnaismuuttujalla on n. origomomentti, niin sillä on myös kaikki alempien kertalukujen momentit.

11.8. Vinous ja huipukkuus

Vinous

Olkoon

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \text{ , } k = 0,1,2,\ldots$$

satunnaismuuttujan X *k. origomomentti* ja olkoon

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^k] = \mu_k \text{ , } k = 0,1,2,\ldots$$

satunnaismuuttujan X *k. keskusmomentti*, jossa

$$\mu = \alpha_1 = \mathrm{E}(X)$$

satunnaismuuttujan X *odotusarvo*. Tunnuslukua

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **vinouden** *mittana*: Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen* ja huippukohta ei osu jakauman määrittelyalueen reunalle, niin pätee seuraava:

$\gamma_1 < 0$: Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**, jolloin jakauman vasen häntä on pitempi kuin oikea häntä.

$\gamma_1 = 0$: Jakauma on **symmetrinen**.

$\gamma_1 > 0$: Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**, jolloin jakauman oikea häntä on pitempi kuin vasen häntä.

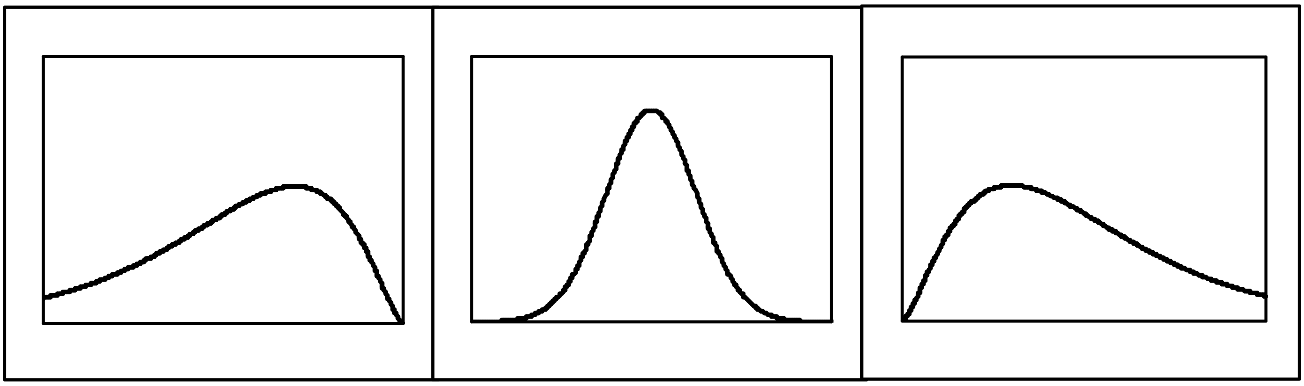
Huomautus:

- *Normaalijakaumalle* $\gamma_1 = 0$.

Esimerkki. Negatiivinen vinous, symmetria, positiivinen vinous.

Alla olevat kuvat esittävät kolmen erilailla vinon jatkuvan jakauman tiheysfunktioita.

$10 - \chi^2(5)$ **N(0,1)** **$\chi^2(5)$**



$\gamma_1 < 0$:
Jakauma on **negatiivisesti vino** eli **vino vasemmalle**.

$\gamma_1 = 0$:
Jakauma on **symmetrinen**

$\gamma_1 > 0$:
Jakauma on **positiivisesti vino** eli **vino oikealle**.

Huipukkuus

Olkoon

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \,,\; k = 0,1,2,\ldots$$

satunnaismuuttujan X k*. origomomentti* ja olkoon

$$\mathrm{E}[(X-\mu)^k] = \mu_k \,,\; k = 0,1,2,\ldots$$

satunnaismuuttujan X k*. keskusmomentti*, jossa

$$\mu = \alpha_1 = \mathrm{E}(X)$$

satunnaismuuttujan X *odotusarvo*. Tunnuslukua

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

käytetään *todennäköisyysjakaumien* **huipukkuuden** *mittana*. Jos todennäköisyysjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on *yksihuippuinen*, pätee seuraava:

$\gamma_2 > 0$: Jakauma on **huipukas** (normaalijakaumaan verrattuna)

$\gamma_2 = 0$: Jakauma on **yhtä huipukas kuin normaalijakauma**

$\gamma_2 < 0$: Jakauma on **laakea** (normaalijakaumaan verrattuna)

Huomautus:

- *Normaalijakaumalle* $\gamma_2 = 0$.

11.9. Kvantiilit

Kvantiilin määritelmä

Olkoon X satunnaismuuttuja. Olkoon lisäksi

$$0 < p < 1$$

Jos luku x_p toteuttaa ehdot

$$\Pr(X \le x_p) \ge p$$

$$\Pr(X \ge x_p) \ge 1 - p$$

sanomme, että x_p on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **kvantiili** kertalukua p. Huomaa, että kvantiilit voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole momentteja*.

Kvantiilien ominaisuuksia

Satunnaismuuttujan X kvantiili x_p toteuttaa epäyhtälöt

$$\Pr(X < x_p) \le p \le \Pr(X \le x_p)$$

Kvantiilit *eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä*:

(i) *Diskreettien* satunnaismuuttujien kvantiili on *monikäsitteinen*, jos kvantiili osuu sellaisten vierekkäisten pisteiden *väliin*, joissa satunnaismuuttujan arvoihin liittyy *positiivinen* todennäköisyys.

(ii) *Jatkuvien* satunnaismuuttujien kvantiilit ovat *yksikäsitteisiä*.

Olkoon

$$F(x) = \Pr(X \le x)$$

jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Tällöin satunnaismuuttujan X kvantiili x_p toteuttaa yhtälön

$$F(x_p) = p$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa kvantiili x_p jakaa satunnaismuuttujan X todennäköisyys-jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

$$p \times 100\ \%$$

on kvantiilista x_p *vasemmalla* ja

$$(1 - p) \times 100\ \%$$

on kvantiilista x_p *oikealla*.

Kvantiilit ja tilastolliset taulukot

Useimmissa *todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen oppikirjoissa on taulukoituna* keskeisten *tilastollisessa päättelyssä* käytettävien jatkuvien jakaumien (so. *normaalijakauman*, *χ^2-jakauman*, *t-jakauman* ja *F-jakauman*) kvantiileja x_p ja niitä vastaavia todennäköisyyksiä p ja useimmissa *tilastollisissa tietokoneohjelmissa on aliohjelmia*, jotka laskevat tavallisimpien jatkuvien jakaumien kvantiileja x_p ja niitä vastaavia todennäköisyyksiä p.

Esimerkki 1. Normaalijakauman kvantiilit.

Oletetaan, että satunnaismuuttuja Z noudattaa ns. **standardoitua normaalijakaumaa** N(0,1); lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Ylempi kuva oikealla esittää standardoidun normaalijakauman *tiheysfunktiota* $f_Z(z)$.

Alempi kuva oikealla esittää standardoidun normaalijakauman *kertymäfunktiota* $\Phi(z)$.

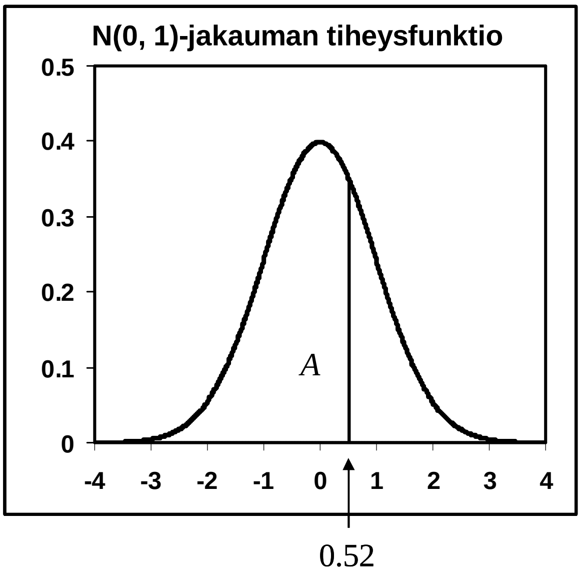
Standardoidun normaalijakauman *taulukoiden mukaan*:

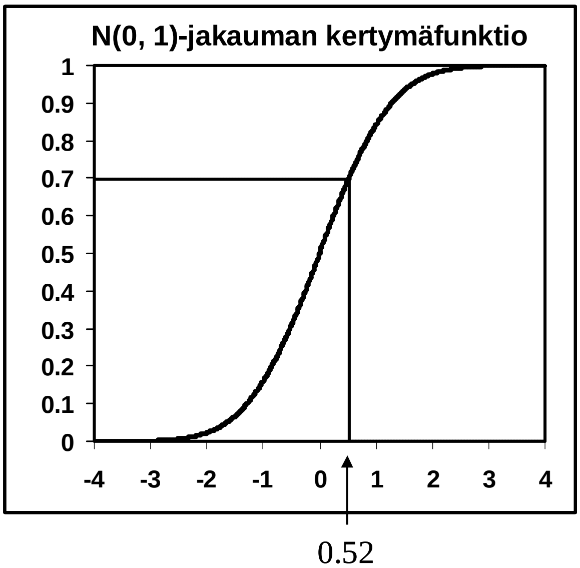
Alueen A pinta-ala

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{0.52} f_Z(z)dz \\ &= \Pr(Z \le 0.52) \\ &= \Phi(0.52) \\ &\approx 0.6985 \end{aligned}$$

Siten

$$x_{0.6985} \approx 0.52$$





Prosenttipisteet

Jos p on muotoa

$$p = q/100 \ , \ q = 1, 2, \dots , 99$$

kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. prosenttipisteeksi**.

Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. prosenttipiste jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

$$q \ \%$$

on q. prosenttipisteestä *vasemmalla* ja

$$(100 - q) \ \%$$

on q. prosenttipisteestä *oikealla*.

Desiilit

Jos p on muotoa

$$p = 10 \times q/100 \ , \ q = 1, 2, \dots , 9$$

kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. desiiliksi**.

Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. desiili jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

$$10\times q\ \%$$

on q. desiilistä *vasemmalla* ja

$$(100-10\times q)\ \%$$

on q. desiilistä *oikealla*.

Kvartiilit

Jos p on muotoa

$$p = 25\times q/100\ ,\ q = 1, 2, 3$$

kvantiilia x_p kutsutaan ***q*. kvartiiliksi**. Kvartiileja merkitään tavallisesti symboleilla Q_1, Q_2, Q_3 ja sanotaan, että

Q_1 = **alakvartiili**

Q_2 = **keskikvartiili**

Q_3 = **yläkvartiili**

Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa q. kvartiili jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen osaan* niin, että massasta

$$25\times q\ \%$$

on q. kvartiilista *vasemmalla* ja

$$(100-25\times q)\ \%$$

on q. kvartiilista *oikealla*. Siten kvartiilit jakavat jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa jakauman todennäköisyysmassan *neljään yhtä suureen osaan*:

25 % massasta on kvartiilista Q_1 *vasemmalle*

25 % massasta on kvartiilien Q_1 ja Q_2 *välissä*

25 % massasta on kvartiilien Q_2 ja Q_3 *välissä*

25 % massasta on kvartiilista Q_3 *oikealle*

Mediaani

Jos

$$p = 0.5$$

kvantiilia x_p kutsutaan **mediaaniksi**. Mediaania merkitään tavallisesti symbolilla *Me*. Huomaa, että mediaani voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole odotusarvoa*.

Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa mediaani *Me* jakaa jakauman todennäköisyysmassan *kahteen yhtä suureen osaan* niin, että massasta

50 %

on mediaanista *vasemmalla* ja

50 %

on mediaanista *oikealla*.

Jakauman mediaani yhtyy jakauman 50. *prosenttipisteeseen*, 5. *desiiliin* ja *keskikvartiiliin* Q_2.

Jos satunnaismuuttujan X jakauma on *symmetrinen* suoran $x = a$ suhteen, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen a:

$$Me = a$$

Jos symmetrisellä jakaumalla *on odotusarvo* $\mathrm{E}(X) = \mu$, niin jakauman mediaani yhtyy pisteeseen μ:

$$Me = \mu$$

Esimerkki 2. Eksponenttijakauman mediaani.

Kuva oikealla esittää **eksponenttijakauman** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) Exp(1) *tiheysfunktiota*

$$f(x) = e^{-x} \text{ , } x \geq 0$$

välillä [0, 4].

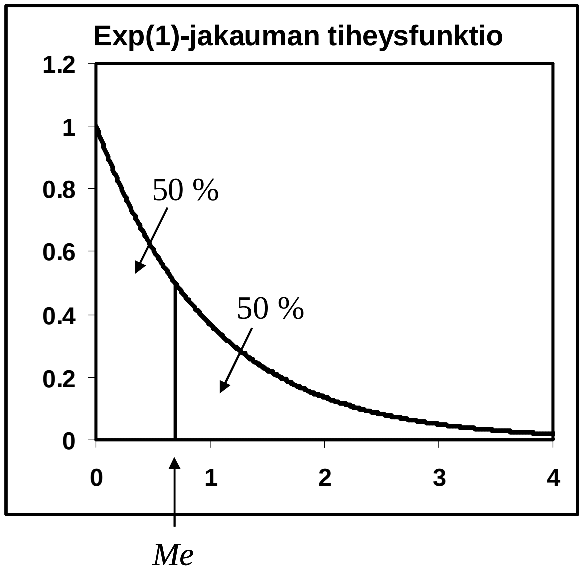
Jakauman *mediaani* saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\int_0^x e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$= 1 - e^{-x} = 0.5$$

muuttujan x suhteen. Siten

$$Me = x = \log(2) \approx 0.69$$



11.10. Moodi

Olkoon X *diskreetti* satunnaismuuttuja, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

Piste Mo on *diskreetin satunnaismuuttujan X* ja sen jakauman **moodi**, jos pistetodennäköisyysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_x f(x)$$

Olkoon X *jatkuva* satunnaismuuttuja, jonka *tiheysfunktio* on

$$f(x)$$

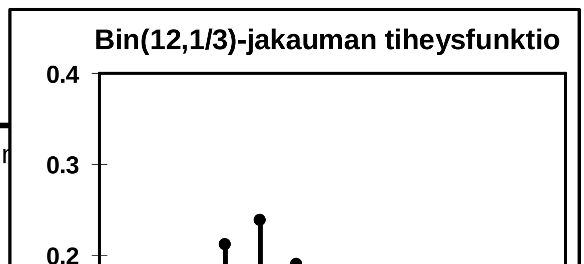
Piste Mo on *jatkuvan satunnaismuuttujan X* ja sen jakauman **moodi**, jos tiheysfunktio $f(x)$ saavuttaa maksiminsa pisteessä $x = Mo$:

$$f(Mo) = \max_x f(x)$$

Jakauman moodi *ei välttämättä ole* yksikäsitteinen.

Huomaa, että moodi voidaan määrätä myös sellaisille satunnaismuuttujille, joilla *ei ole odotusarvoa*.

Esimerkki 1. Binomijakauman moodi.



Kuva oikealla esittää **binomijakauman**
(lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**)

Bin(12,1/3)

pistetodennäköisyysfunktiota

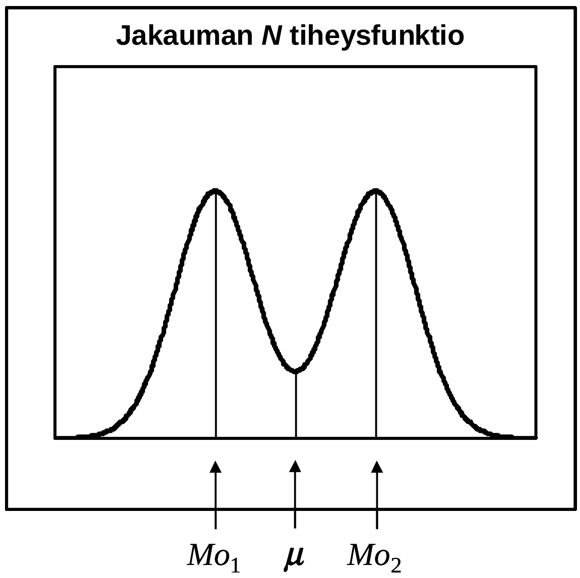
$$f(x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}$$

Jakauman *moodi Mo* on pisteessä

$$x = 4$$

Tämä merkitsee sitä, että tulosvaihtoehdon $x = 4$ todennäköisyys on *suurin*.

Esimerkki 2. Sekoitetun normaalijakauman moodit.



Kuva oikealla esittää erään ns. **sekoitetun normaalijakauman** *N tiheysfunktiota f*.

Kuvan sekoitettu normaalijakauma on saatu muodostamalla *lineaarikombinaatio* kahdesta normaalijakaumasta sopivin painokertoimin. Lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Kuvan tiheysfunktio on *kaksihuippuinen* ja *symmetrinen* pisteen

$$x = \mu$$

suhteen. Jakauman *N* todennäköisyysmassalla *on kaksi keskittymää x*-akselin suhteen.

On ilmeistä, että jakaumalla *N* on *kaksi lokaalia moodia* Mo_1 ja Mo_2 .

11.11. Suurten lukujen laki

Olkoon

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Tällöin pätee (heikko) **suurten lukujen laki**:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

Suurten lukujen lakia tarkastellaan lähemmin luvussa **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

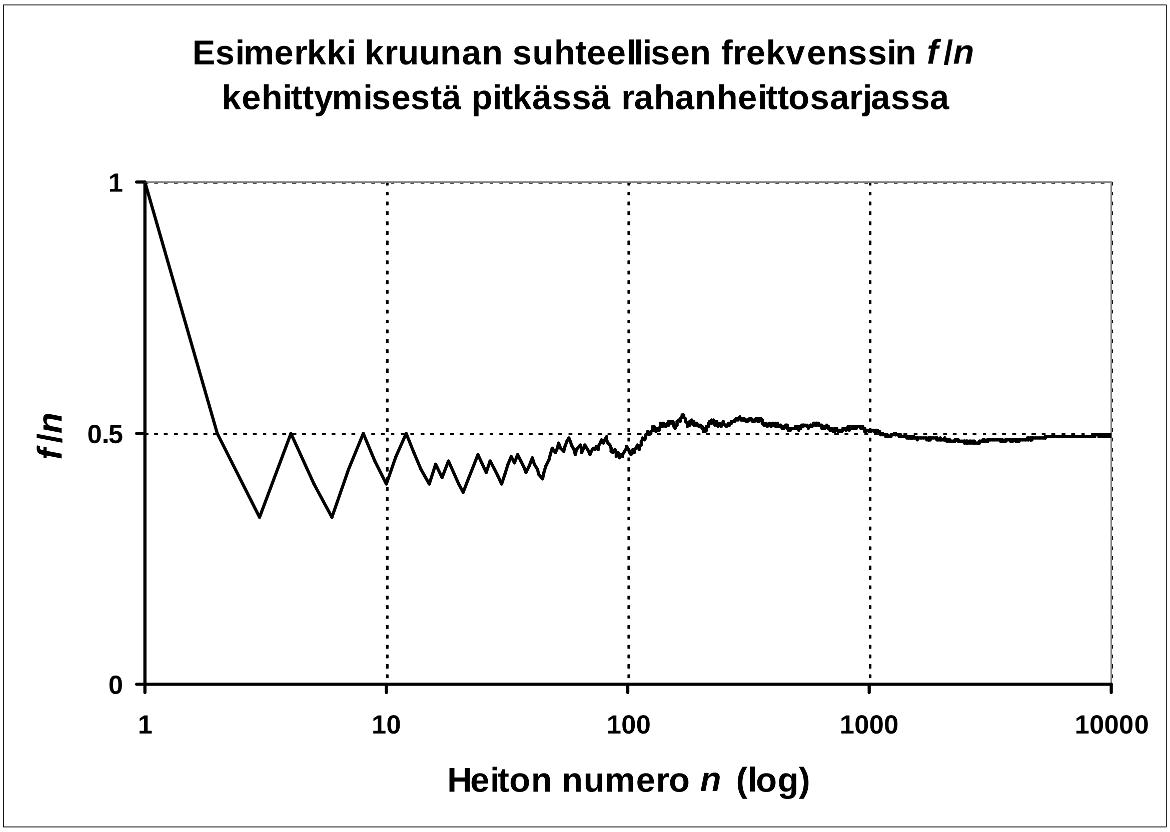
Suurten lukujen laki voidaan ilmaista sanoin seuraavasti: Samoin jakautuneiden satunnais-muuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* niin, että **poikkeamien todennäköisyys lähestyy lukua nolla sellaisella tavalla**, **että suuret poikkeamat tulevat yhä *harvinaisemmiksi***.

Suurten lukujen lakia voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle; ks. luvun **Johdanto** kappaletta **Satunnaisuus ja tilastollinen stabiliteetti**.

Esimerkki. Rahanheitto satunnaisilmiönä.

Heitetään *virheetöntä* rahaa toistuvasti ja pidetään kirjaa kruunien *frekvenssistä f* ja *suhteellisesta frekvenssistä* eli *osuudesta*, *f*/*n* jossa *n* on tehtyjen heittojen lukumäärä.

Alla oleva kuva esittää kruunan suhteellisen frekvenssin kehittymistä *eräässä* realisoituneessa heittosarjassa. Kruunien suhteellinen frekvenssi *vaihtelee heittokerrasta toiseen*, mutta *lähestyy* kuitenkin lukua 1/2 sellaisella tavalla, että *suuret poikkeamat* luvusta 1/2 tulevat yhä *epätodennäköisemmiksi* eli *harvinaisemmiksi*, kun heittojen lukumäärä *n* kasvaa.



Tapa, jolla kruunien suhteellinen frekvenssi f/n lähestyy lukua 1/2, on esimerkki *suurten lukujen laista*, koska kruunien suhteellinen frekvenssi f/n voidaan tulkita satunnais-muuttujien

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ , jos } i. \text{ rahanheitto antaa } \textit{kruunan} \\ 0 \text{ , jos } i. \text{ rahanheitto antaa } \textit{klaavan} \end{cases}$$

aritmeettiseksi keskiarvoksi:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{f}{n}$$

Tämä johtuu siitä, että ykkösten lukumäärä summassa

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

yhtyy kruunien frekvenssiin f .

Tässä formuloitua suurten lukujen lakia on tapana kutsua **heikoksi suurten lukujen laiksi**. Suurten lukujen lait koskevat satunnaismuuttujien jonojen **asymptoottista käyttäytymistä**. Satunnais-muuttujien jonojen asymptoottisen käyttäytymisen tuntemisella on suuri merkitys monilla **stokastiikan** ja **tilastotieteen** osa-alueilla.

Tässä formuloidussa heikossa suurten lukujen laissa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki ns. **stokastisesta konvergenssista**; ks. lukua **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

On hyvä tietää, että suurten lukujen laeista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa on eri tavoin lievennetty *samoinjakautuneisuus-* ja *riippumattomuusoletuksia*. Näillä yleisemmillä muodoilla on suuri merkitys kehitettäessä tilastollista teoriaa esimerkiksi sellaisille *riippuvien satunnais-muuttujien jonoille* kuten **stokastisille prosesseille** ja **aikasarjoille**.

12. Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja jakaumat

Tarkastelemme tässä luvussa *satunnaismuuttujien* ja *todennäköisyysjakaumien määrittelemistä* **kaksiulotteisessa** *tilanteessa*. Tällöin uutena ilmiönä (yksiulotteisiin tilanteisiin verrattuna) nousee esiin satunnaismuuttujien mahdollinen **riippuvuus**.

Keskeisiä kaksiulotteisiin todennäköisyysjakaumiin liittyvä käsitteitä ovat **yhteisjakauma** ja **reunajakaumat**, **kovarianssi** ja **korrelaatio**, **ehdolliset jakaumat** sekä ehdollisten jakaumien (**ehdolliset**) **odotusarvot** ja (**ehdolliset**) **varianssit**.

Vaikka tässä rajoitutaankin (muutamin poikkeuksin) ainoastaan kaksiulotteisten satunnais-muuttujien ja todennäköisyysjakaumien käsittelemiseen, esitetty teoria on suhteellisen helppoa laajentaa koskemaan *useampiulotteisia* tilanteita.

Avainsanat:

Diskreetti jakauma, Ehdollinen jakauma, Ehdollinen odotusarvo, Ehdollinen varianssi, Ennustaminen, Jatkuva jakauma, Kaksiulotteinen satunnaismuuttuja, Karteesinen tulo, Kertymäfunktio, Korrelaatio, Korreloimattomuus, Korreloituneisuus, Kovarianssi, Odotusarvo, Odotusarvon ominaisuudet, Pistetodennäköisyysfunktio, Regressiofunktio, Reunajakauma, Riippumattomuus, Riippuvuus, Satunnaismuuttuja, Standardipoikkeama, Tiheysfunktio, Varianssi, Yhteisjakauma

12.1. Johdanto

Yhden **satunnaismuuttujan todennäköisyysjakaumat kuvaavat useimpia satunnaisilmiötä vain rajoitetusti**. Useimpiin satunnaisilmiöihin liittyy **useita satunnaisia tekijöitä**, joiden väliset **riippuvuudet** ovat mielenkiinnon kohteina. Useiden satunnaisten tekijöiden välisten riippuvuuksien tarkastelu vaatii tekijöihin liittyvien satunnaismuuttujien **yhteisjakauman** tarkastelua.

Esimerkki 1. Esimerkkejä riippuvuustarkasteluista.

- Miten työttömyysaste Suomessa (% työvoimasta) *riippuu* bruttokansantuotteen kasvuvauhdista, viennin volyymista ja bruttokansantuotteen kasvuvauhdista muissa EU-maissa, Venäjällä ja USA:ssa?
- Miten alkoholin kokonaiskulutus (l *per capita* / vuosi) *riippuu* alkoholijuomien hintatasosta, käytettävissä olevista tuloista ja alkoholin saatavuudesta?
- Miten todennäköisyys sairastua keuhkosyöpään (p) *riippuu* tupakoinnin määrästä ja kestosta?
- Miten vehnän sato (t/ha) *riippuu* kesän keskilämpötilasta, sademäärästä, maan muokkauksesta, lannoituksesta ja tuholaisten torjunnasta?

Tarkastelemme tässä luvussa sitä miten yhdelle satunnaismuuttujalle esitetty teoria *laajennetaan* useamman (tarkemmin: kahden) satunnaismuuttujan tapaukseen ja mitä lisätarkasteluja laajennus vaatii.

12.2. Kaksiulotteiset satunnaismuuttujat

Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joiden otosavaruudet ovat R ja S. Tällöin

$$X : R \to$$
$$Y : S \to$$

Olkoon $R \times S$ otosavaruuksien R ja S *karteesinen tulo*:

$$R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *järjestetty pari* (X, Y) määrittelee **kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**:

$$(X, Y) : S \times R \to \quad ^2$$

12.3. Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat

Olkoot X ja Y **diskreettejä** satunnaismuuttujia. Tällöin järjestetty pari

$$(X, Y)$$

määrittelee **diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**. Diskreetti kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee *diskreetin kaksiulotteisen todennäköisyysjakauman*, jota kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakaumaksi**.

Reaaliarvoinen funktio

$$f_{XY} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$$

määrittelee *diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman* **pistetodennäköisyysfunktion**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(1) $f_{XY}(x,y) \geq 0$ kaikille x ja y

(2) $\Pr(X = x \text{ ja } Y = y) = f_{XY}(x,y)$

(3) $\sum_x \sum_y f_{XY}(x,y) = 1$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat ja tapahtumien todennäköisyyksien määrääminen

Olkoon

$$f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

diskreettien satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* ja olkoon

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

jokin *tapahtuma*. Tällöin

$$\Pr((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)} \sum_{\in A} f_{XY}(x,y)$$

Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat ja symmetriset todennäköisyyskentät

Olkoon

$$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

erillisten tason pisteiden muodostama *diskreetti* pistejoukko. Määritellään *diskreetin kaksiulotteisen jakauman pistetodennäköisyysfunktio* kaavalla

$$f_{XY}(x_i, y_i) = \Pr(X = x_i \text{ ja } Y = y_i) = \frac{1}{n}\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Tällöin kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee **symmetrisen todennäköisyyskentän**, jossa kaikki alkeistapahtumat

$$(x_i, y_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

ovat *yhtä todennäköisiä*.

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Oletetaan, että 2. heiton tulos on *riippumaton* 1. heiton tuloksesta (ja kääntäen).

Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Muodostetaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauma*.

Kahden nopanheiton tulosvaihtoehdot voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Tulos 1. nopan-heitosta = *x*	**Mahdollinen tulos 2. nopanheitosta = *y***					
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
4	1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	5	6
6	1	2	3	4	5	6

Siten satunnaismuuttujien X ja Y järjestetty pari (X, Y) määrittelee *diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan*, jonka arvoina on 36 lukuparia

$$(x, y) \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Koska noppa oletettiin *virheettömäksi* ja heittojen tulokset oletettiin *riippumattomiksi*, voimme olettaa, että kahden nopanheiton tulosten muodostamat 36 tulosparia

$$(x, y) \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

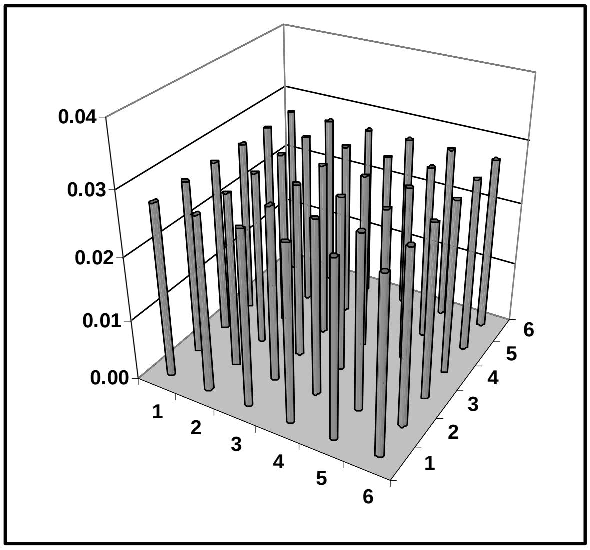
ovat *yhtä todennäköisiä*. Määritellään siksi satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman piste-todennäköisyysfunktio* kaavalla

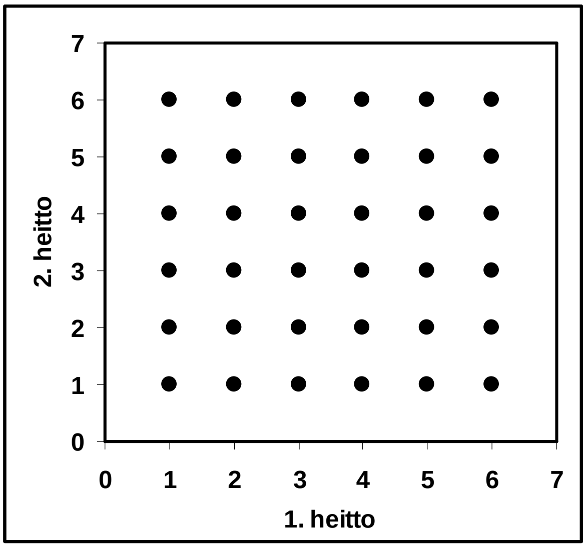
$$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36} \; ; \; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \; ; \; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Pr(*X* = *x*, *Y* = *y*)		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tulos 2. nopan-heitosta = *y*	**6**	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Kuva alla vasemmalla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktiota*. Kuvassa on 36 pylvästä, joista jokaisen korkeus 1/36. Koska kaksiulotteisen satunnaismuuttujan (X, Y) mahdolliset arvot ovat *yhtä todennäköisiä*, niiden *yhteisjakaumaa* voidaan havainnollistaa myös alla oikealla olevalla kuvalla. Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.





Esimerkki 2. Nopanheitto.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Oletetaan, että 2. heiton tulos on *riippumaton* 1. heiton tuloksesta (ja kääntäen).

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Z : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Määrätään satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauma*.

Muodostetaan ensin *summamuuttujan*

$$Z = X + Y$$

jakauma.

Alla oleva *aputaulukko* esittää kaikkia mahdollisia tapoja, joilla nopanheittojen silmälukujen summa $Z = X + Y$ voi syntyä:

Silmälukujen summa = *z*		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tulos 2. nopan-heitosta = *y*	**6**	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7

Koska noppa oletettiin *virheettömäksi* ja heittojen tulokset oletettiin *riippumattomiksi*, voimme olettaa, että kahden nopanheiton tulosten muodostamat 36 tulosparia

$$(x, y)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Siten voimme lukea yo. aputaulukosta 1. ja 2. nopanheiton silmälukujen *summan*

$$Z = X + Y$$

todennäköisyysjakauman:

Silmälukujen summa = *z*	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Pr(*Z* = *z*)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Esimerkki taulukon konstruoinnista:

Summa 5 *voi syntyä* kahden nopanheiton tuloksena 4:llä erilaisella tavalla:

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$$

joten todennäköisyys saada summaksi 5 on 4/36.

Satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ järjestetty pari (X, Z) määrittelee *diskreetin kaksiulotteisen satunnaismuuttujan*, jonka arvoina on 66 lukuparia

$$(x, z)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12$$

joista 36:lla on positiivinen todennäköisyys.

Koska noppa oletettiin *virheettömäksi* ja heittojen tulokset oletettiin *riippumattomiksi*, voimme olettaa, että 1. heiton tulos ja 1. ja 2. heiton tulosten *mahdollisten* summien muodostamat 36 tulosvaihtoehtoa

$$(x, z)\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = x + y\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

ovat *yhtä todennäköisiä*. Määritellään siksi satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* kaavalla

$$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = z \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36}\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = x + y\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujien X ja $Z = X + Y$ *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* voidaan esittää alla olevana taulukkona.

Esimerkkejä taulukon konstruoinnista:

Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 2. Tällöin silmälukujen summaksi *ei voi olla* 10, joten

$\Pr(X = 1 \textit{ ja } Z = 10) = 0$

Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 6. Tällöin silmälukujen summaksi *ei voi olla* 3, joten

$\Pr(X = 6 \textit{ ja } Z = 3) = 0$

Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 2. Tällöin silmälukujen summaksi *voi olla* 3, 4, 5, 6, 7 tai 8, joten

$\Pr(X = 1 \textit{ ja } Z = z) = 1/36\ ;\ z = 3, 4, 5, 6, 7, 8$

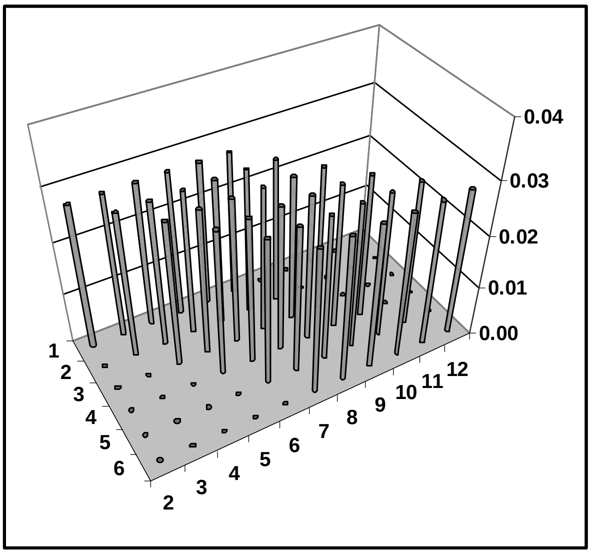
Oletetaan, että 1. nopalla on saatu 6. Tällöin silmälukujen summaksi *voi olla* 7, 8, 9, 10, 11 tai 12, joten

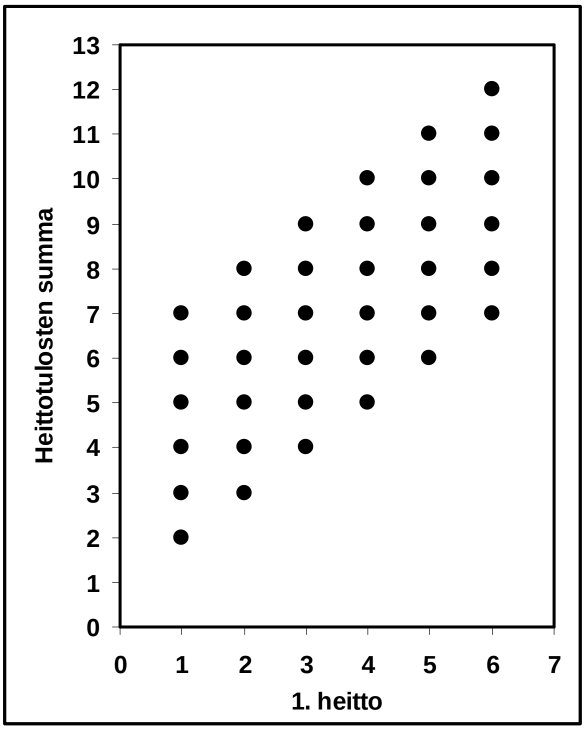
$\Pr(X = 6 \textit{ ja } Z = z) = 1/36\ ;\ z = 7, 8, 9, 10, 11, 12$

Pr(X = x, Z = z)		**Tulos 1. nopanheitosta = x**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Silmälukujen summa = z	**12**	0	0	0	0	0	1/36
	11	0	0	0	0	1/36	1/36
	10	0	0	0	1/36	1/36	1/36
	9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36
	8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
	4	1/36	1/36	1/36	0	0	0
	3	1/36	1/36	0	0	0	0
	2	1/36	0	0	0	0	0

Kuva alla vasemmalla esittää satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktiota*. Kuvassa on 36 pylvästä, joista jokaisen korkeus on 1/36.

Koska kaksiulotteisen satunnaismuuttujan (X, Z) mahdolliset arvot ovat *yhtä todennäköisiä*, niiden *yhteisjakaumaa* voidaan havainnollistaa myös alla oikealla olevalla kuvalla. Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.





12.4. Jatkuvat kaksiulotteiset jakaumat

Olkoot X ja Y **jatkuvia** satunnaismuuttujia. Tällöin järjestetty pari

$$(X, Y)$$

määrittelee **jatkuvan kaksiulotteisen satunnaismuuttujan**. Jatkuva kaksiulotteinen satunnaismuuttuja (X, Y) määrittelee *jatkuvan kaksiulotteisen todennäköisyysjakauman*, jota kutsutaan satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakaumaksi**.

Reaaliarvoinen funktio

$$f_{XY} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$$

määrittelee *jatkuvien satunnaismuuttujien* X ja Y *yhteisjakauman* **tiheysfunktion**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(1) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ kaikille x ja y

(2) $\Pr(a \leq X \leq b \text{ ja } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y)dydx$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dydx = 1$

Huomautus:

- Käytämme *kaksinkertaisten integraalien* yhteydessä seuraavaa sopimusta integrointi-järjestyksestä:

$$\int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy \right) dx$$

Jatkuvat kaksiulotteiset jakaumat ja tapahtumien todennäköisyyksien määrääminen

Olkoon

$$f_{XY} : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$$

jatkuvien satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* ja olkoon

$$A \subset \mathrm{R}^2$$

jokin *tapahtuma*. Tällöin

$$\Pr((X,Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)dydx$$

12.5. Kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktiot

Olkoon (X, Y) satunnaismuuttujien X ja Y muodostama *järjestetty pari*. Satunnaismuuttujien X ja Y **yhteisjakauman kertymäfunktio** F_{XY} määritellään kaavalla

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \le x \text{ ja } Y \le y)$$

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ **diskreetin** kaksiulotteisen jakauman **pistetodennäköisyysfunktio**. Jakauman **kertymäfunktio** saadaan kaavalla

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \le x \text{ ja } Y \le y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} f_{XY}(x_i, y_i)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ **jatkuvan** kaksiulotteisen jakauman **tiheysfunktio**. Jakauman **kertymäfunktio** saadaan kaavalla

$$F_{XY}(x,y) = \Pr(X \le x \text{ ja } Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dvdu$$

Olkoon $F_{XY}(x, y)$ *jatkuvan kaksiulotteisen jakauman kertymäfunktio*. Jos *derivaatta*

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x,y)$$

on olemassa ja on jatkuva, funktio $f_{XY}(x, y)$ on satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauman *tiheys-funktio*.

12.6. Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ **diskreetin** kaksiulotteisen jakauman **pistetodennäköisyysfunktio**.

Satunnaismuuttujan X **reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio** saadaan kaavalla

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

Satunnaismuuttujan Y **reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio** saadaan kaavalla

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

Satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat yhtyvät satunnaismuuttujien X ja Y todennäköisyys-jakaumiin.

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 1.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio*

$$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}\,;\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,;\; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Pr(*X* = *x*, *Y* = *y*)		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tulos 2. nopan-heitosta = *y*	**6**	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Määrätään satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumat*.

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_{y=1}^{6} f_{XY}(x, y) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\,;\; x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_{x=1}^{6} f_{XY}(x, y) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\,;\; y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

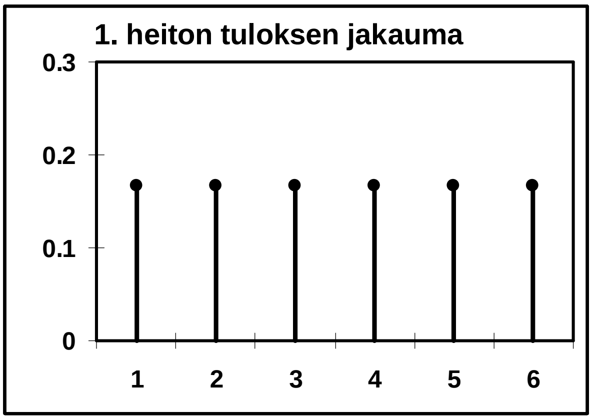
Siten satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot* saadaan määräämällä yhteisjakaumaa kuvaavassa taulukossa *rivi-* ja *sarakesummat*:

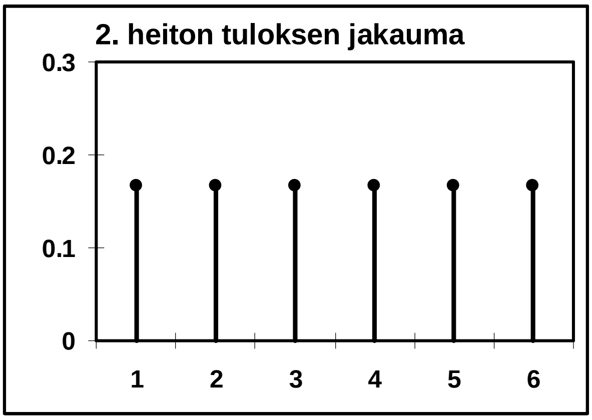
Pr(*X* = *x*, *Y* = *y*)		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***						**Summa Pr(*Y* = *y*)**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Tulos 2. nopan-heitosta = *y*	**6**	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
Summa Pr(*X* = *x*)		**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Kuvat alla esittävät satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktioita*:

X = Tulos 1. nopanheitosta

Y = Tulos 2. nopanheitosta





Esimerkki 2. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 2.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Z : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Määrätään satunnaismuuttujien X ja Z *reunajakaumat*.

Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36} \,;\; x = 1,2,3,4,5,6 \,;\; z = x + y \,;\; y = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot* saadaan määräämällä yhteisjakauman todennäköisyydet antavassa taulukossa *rivi*- ja *sarakesummat*:

Pr(*X* = *x*, *Z* = *z*)		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***						**Summa Pr(*Z* = *z*)**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Silmä-lukujen summa = *z*	**12**	0	0	0	0	0	1/36	**1/36**
	11	0	0	0	0	1/36	1/36	**2/36**
	10	0	0	0	1/36	1/36	1/36	**3/36**
	9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	**4/36**
	8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**5/36**
	7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**6/36**
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	**5/36**
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	**4/36**
	4	1/36	1/36	1/36	0	0	0	**3/36**
	3	1/36	1/36	0	0	0	0	**2/36**
	2	1/36	0	0	0	0	0	**1/36**
Summa Pr(*X* = *x*)		**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Esimerkkejä taulukon konstruoinnista:

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman* pistetodennäköisyys, kun $X = 4$:

$$f_X(4) = \sum_{z=1}^{12} f_{XZ}(4,z) = 0+0+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+0+0+0 = \frac{1}{6}$$

Satunnaismuuttujan Z *reunajakauman* pistetodennäköisyys, kun $Z = 10$:

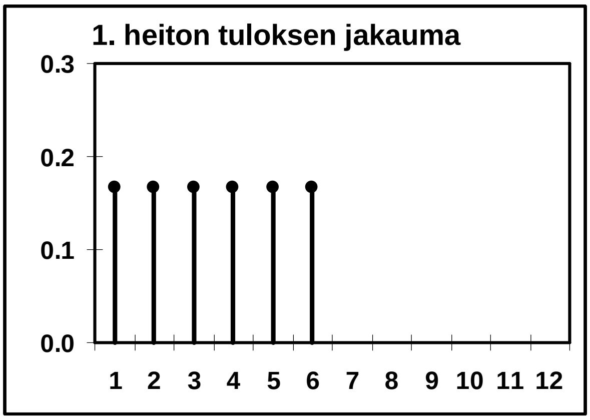
$$f_Z(10) = \sum_{x=1}^{6} f_{XZ}(x,10) = 0+0+0+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

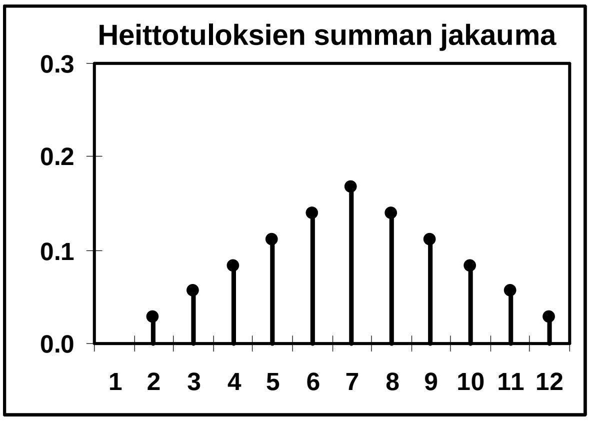
Kuvat alla esittävät satunnaismuuttujien X ja Z *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktioita*:

X = Tulos 1. nopanheitosta

Y = Tulos 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten summa





Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman reunajakaumat

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ *jatkuvan kaksiulotteisen jakauman tiheysfunktio*.

Satunnaismuuttujan X **reunajakauman tiheysfunktio** saadaan kaavalla

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

Satunnaismuuttujan Y **reunajakauman tiheysfunktio** saadaan kaavalla

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

Satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat yhtyvät satunnaismuuttujien X ja Y todennäköisyys-jakaumiin.

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

Määritellään satunnaismuuttujien riippumattomuus ensin *kahdelle* satunnaismuuttujalle X ja Y.

Annamme satunnaismuuttujien riippumattomuuden määritelmän ensin muuttujien yhteisjakauman ja reunajakaumien *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktioiden* avulla.

Olkoot $f_{XY}(x, y)$ satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*, $f_X(x)$ satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* ja $f_Y(y)$ satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuus voidaan määritellä myös muuttujien yhteisjakauman ja reunajakaumien *kertymäfunktioiden* avulla.

Olkoot $F_{XY}(x,y)$ satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman kertymäfunktio*, $F_X(x)$ satunnaismuuttujan X *reunajakauman kertymäfunktio* ja $F_Y(y)$ satunnaismuuttujan Y *reunajakauman kertymäfunktio*. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat **riippumattomia**, jos ja vain, jos

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Useamman satunnaismuuttujan riippumattomuus

Annetaan usean satunnaismuuttujan riippumattomuuden määritelmä ensin muuttujien yhteisjakauman ja reunajakaumien *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktioiden* avulla:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio

$$f(x_1, x_2, \dots , x_p)$$

(ii) Olkoot satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

reunajakaumien pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktiot

$$f(x_i)\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \dots , p$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos

$$f(x_1, x_2, \dots , x_p) = f(x_1)\times f(x_2)\times \cdots \times f(x_p)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus voidaan määritellä myös muuttujien yhteisjakauman ja reunajakaumien *kertymäfunktioiden* avulla:

(i) Olkoon satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

yhteisjakauman kertymäfunktio

$$F(x_1, x_2, \dots , x_p)$$

(ii) Olkoot satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

reunajakaumien kertymäfunktiot

$$F(x_i)\ ,\ i = 1, 2, \dots , p$$

Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , p$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos

$$F(x_1, x_2, \ldots , x_p) = F(x_1)\times F(x_2)\times \cdots \times F(x_p)$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus ja tapahtumien todennäköisyys

Palautetaan ensin mieleen se, että *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* mukaan

$$\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

jos tapahtumat A ja B ovat riippumattomia.

Oletetaan nyt, että *satunnaismuuttujat* X ja Y ovat *riippumattomia*. Tällöin

$$\Pr(a \le X \le b \text{ ja } c \le Y \le d) = \Pr(a \le X \le b)\Pr(c \le Y \le d)$$

Perustelu:

Esitetään perustelu *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y *riippumattomia*.

$$\begin{aligned}
&\Pr(a \le X \le b \text{ ja } c \le Y \le d) \\
&\quad = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x,y)dydx \\
&\quad = \int_a^b \int_c^d f_X(x) f_Y(y)dydx \\
&\quad = \int_a^b f_X(x)\int_c^d f_Y(y)dydx \\
&\quad = \int_a^b f_X(x)\Pr(c \le Y \le d)dx \\
&\quad = \Pr(c \le Y \le d)\int_a^b f_X(x)dx \\
&\quad = \Pr(c \le Y \le d)\Pr(a \le X \le b)
\end{aligned}$$

■

Esimerkki 3. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa esimerkille 1.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XY}(x,y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}\ ;\ x = 1,2,3,4,5,6\ ;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\ ;\ x = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \frac{1}{6}\ ;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

Koska

$$\Pr(X = x \text{ ja } Y = y) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \Pr(X = x)\Pr(Y = y)$$

kaikille

$$x = 1,2,3,4,5,6\ ;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

niin satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*.

Esimerkki 4. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa esimerkille 2.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Z : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36}\ ;\ x = 1,2,3,4,5,6\ ;\ z = x + y\ ;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

Koska esimerkiksi

$$\Pr(X = 1 \text{ ja } Z = 8) = 0 \neq \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{36} = \Pr(X = 1)\Pr(Z = 8)$$

niin satunnaismuuttujat X ja Z *eivät ole riippumattomia*.

12.7. Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman yleinen odotusarvo

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ **diskreettien** satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* ja olkoon

$$g : \ ^{2} \rightarrow$$

reaaliarvoinen funktio. Tällöin satunnaismuuttujan $g(X, Y)$ **odotusarvo** on *vakio*

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f_{XY}(x,y)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman yleinen odotusarvo

Olkoon $f_{XY}(x, y)$ **jatkuvien** satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* ja olkoon

$$g : \ ^{2} \rightarrow$$

jatkuva reaaliarvoinen funktio. Tällöin satunnaismuuttujan $g(X, Y)$ *odotusarvo* on *vakio*

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dy dx$$

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman reunajakaumien odotusarvot

Olkoon **diskreettien** satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_{XY}(x, y)$, satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_X(x)$ ja satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_Y(y)$.

Satunnaismuuttujan X **odotusarvo**

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_x \sum_y x f_{XY}(x,y) = \sum_x x \sum_y f_{XY}(x,y) = \sum_x x f_X(x)$$

Satunnaismuuttujan Y **odotusarvo**

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_x \sum_y y f_{XY}(x,y) = \sum_y y \sum_x f_{XY}(x,y) = \sum_y y f_Y(y)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman reunajakaumien odotusarvot

Olkoon **jatkuvien** satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$, satunnaismuuttujan X *reunajakauman tiheysfunktio* $f_X(x)$ ja satunnaismuuttujan Y *reunajakauman tiheysfunktio* $f_Y(y)$.

Satunnaismuuttujan X **odotusarvo**

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$

yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Satunnaismuuttujan Y *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakauman odotusarvoon*:

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy$$

12.8. Odotusarvon ominaisuudet

Odotusarvo painopisteenä

Satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvojen $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ ja $\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$ muodostama järjestetty pari

$$(\mu_X, \mu_Y)$$

määrää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **painopisteen**.

Summan ja erotuksen odotusarvot

Satunnaismuuttujien X ja Y **summan $X + Y$ odotusarvo** on niiden odotusarvojen summa:

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$$

Satunnaismuuttujien X ja Y **erotuksen $X - Y$ odotusarvo** on niiden odotusarvojen summa:

$$\mathrm{E}(X-Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)$$

Perustelut:

Esitetään satunnaismuuttujien summan ja erotuksen odotusarvoja koskevien tuloksien perustelut kahden *jatkuvan* satunnaismuuttujan tapauksessa.

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

ja X:n ja Y:n *reunajakaumien tiheysfunktiot* vastaavasti

$$f_X(x) \text{ ja } f_Y(y)$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \pm Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x \pm y) f_{XY}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[xf_{XY}(x,y) \pm yf_{XY}(x,y)\right]dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_{XY}(x,y)dydx \pm \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf_{XY}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dydx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} y\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \\
&= \mathrm{E}(X) \pm \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

Lineaarikombinaation odotusarvo

Olkoot satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , k *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

ja olkoot

$$a_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, k$$

(ei-satunnaisia) *vakioita*. Tällöin satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , k **lineaarikombinaation**

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k$$

odotusarvo on

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k) \\
&= a_1\,\mathrm{E}(X_1) + a_2\,\mathrm{E}(X_2) + \cdots + a_k\,\mathrm{E}(X_k) \\
&= a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_k\mu_k
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien riippumattomuus ja tulon odotusarvo

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin *tulon XY odotusarvo on satunnaismuuttujien X* ja *Y odotusarvojen tulo*:

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \mu_X\mu_Y$$

Perustelu:

Esitetään riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvoa koskevan tuloksen perustelu kahden *jatkuvan* satunnaismuuttujan tapauksessa.

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$$f_{XY}(x, y)$$

ja niiden *reunajakaumien tiheysfunktiot*

$f_X(x)$ ja $f_Y(y)$

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin riippumattomuuden määritelmän mukaan

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Siten

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{E}(Y)dx \\
&= \mathrm{E}(Y)\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \\
&= \mathrm{E}(Y)\mathrm{E}(X)
\end{aligned}$$

■

Huomautus:

- Käänteinen ei päde: Siitä, että

  $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

  ei seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

Yllä esitetty tulos kahden riippumattoman satunnaismuuttujan tulon odotusarvolle voidaan yleistää koskemaan useampaa riippumatonta satunnaismuuttujaa. Olkoot satunnaismuuttujien

$$X_i \,,\; i = 1, 2, \ldots, k$$

odotusarvot

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \,,\; i = 1, 2, \ldots, k$$

Jos satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{E}(X_1X_2 \cdots X_k) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)\cdots\mathrm{E}(X_k) = \mu_1\mu_2\cdots\mu_k$$

Huomautus:

- Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $$\mathrm{E}(X_1X_2 \cdots X_k) = \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2)\cdots\mathrm{E}(X_k)$$

  ei seuraa, että satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots, k$ ovat riippumattomia.

12.9. Kaksiulotteisten jakaumien varianssit ja standardipoikkeamat

Reunajakaumien varianssit

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$
$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

Satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** yhtyvät vastaavien *reunajakaumien variansseihin*:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 = \mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2]$$

Vaihtoehtoiset laskukaavat variansseille

Satunnaismuuttujien X ja Y varianssien kaavat voidaan kirjoittaa seuraaviin yhtäpitäviin muotoihin:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

$$\mathrm{D}^2(Y) = \mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2] = \mathrm{E}(Y^2) - \mu_Y^2 = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2$$

Perustelu:

Esitetään varianssin vaihtoehtoisen laskukaavan perustelu satunnaismuuttujalle X.

Koska odotusarvo $\mathrm{E}(X) = \mu_X$ on ei-satunnainen vakio, satunnaismuuttujan X *varianssi* on

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2(X) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] \\
&= \mathrm{E}[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(2\mu_X X) + \mathrm{E}(\mu_X^2) \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_X\, \mathrm{E}(X) + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2
\end{aligned}$$

■

Standardipoikkeamat

Satunnaismuuttujien X ja Y **standardipoikkeamat** yhtyvät vastaavien *reunajakaumien standardipoikkeamiin*:

$$\mathrm{D}(X) = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]}$$
$$\mathrm{D}(Y) = \sigma_Y = \sqrt{\mathrm{E}[(Y-\mu_Y)^2]}$$

Varianssin ja standardipoikkeaman tulkinta

Kaksiulotteisessa jakaumassa kummankin satunnaismuuttujan varianssi ja standardipoikkeama kuvaavat satunnaismuuttujan *reunajakauman todennäköisyysmassan* **vaihtelua** *satunnaismuuttujan odotusarvon ympärillä*:

(i) Mitä *pienempi* on reunajakauman varianssi tai standardipoikkeama, sitä voimakkaammin reunajakauman todennäköisyysmassa *keskittyy* reunajakauman odotusarvon ympärille.

(ii) Mitä *suurempi* on reunajakauman varianssi tai standardipoikkeama, sitä voimakkaammin reunajakauman todennäköisyysmassa *hajaantuu* reunajakauman odotusarvon ympärille.

Varianssin ja standardipoikkeaman dimensiot

Huomaa, että satunnaismuuttujalla, sen odotusarvolla ja standardipoikkeamalla on aina *sama* **dimensio** eli **laatu**. Sen sijaan satunnaismuuttujalla, sen odotusarvolla ja standardipoikkeamalla on *eri dimensio* eli *laatu* kuin satunnaismuuttujan varianssilla.

Esimerkki:

Jos satunnaismuuttujan laatuna on *metri* (m) niin myös sen odotusarvon ja standardipoikkeaman laatuna on *metri* (m), mutta sen varianssin laatuna on m^2.

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman varianssit

Olkoon **diskreetin** satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_X(x)$ ja **diskreetin** satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* $f_Y(y)$. Olkoot lisäksi satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$
$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** ovat *vakioita*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \sum\nolimits_x (x-\mu_X)^2 f_X(x)$$
$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 = \sum\nolimits_y (y-\mu_Y)^2 f_Y(y)$$

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 1.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XY}(x,y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}\,;\ x = 1,2,3,4,5,6\,;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\,;\ x = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \frac{1}{6}\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*, 2. *momentit*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{21}{6} = 3.5 = \mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{91}{6} = \mathrm{E}(Y^2)$$

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917 = \mathrm{D}^2(Y)$$

$$\mathrm{D}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}} \approx \sqrt{2.917} \approx 1.708 = \mathrm{D}(Y)$$

Esimerkki 2. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 2.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Z : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XZ}(x, z) = \Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36}\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\ ;\ z = x + y\ ;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\ ;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan Z *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Z(z) = \Pr(Z = z) = \begin{cases} \dfrac{z-1}{36} & ;\ z = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\[2ex] \dfrac{13-z}{36} & ;\ z = 7, 8, 9, 10, 11, 12 \end{cases}$$

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z *odotusarvot*, 2. *momentit*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat*:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x=1}^{6} x \Pr(X = x) = \frac{21}{6} = 3.5 = \mathrm{E}(Y)$$

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{z=1}^{12} z \Pr(Z = z) = \frac{252}{36} = 7$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2 \Pr(X = x) = \frac{91}{6} = \mathrm{E}(Y^2)$$

$$\mathrm{E}(Z^2) = \sum_{z=1}^{12} z^2 \Pr(Z = z) = \frac{1974}{36}$$

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{35}{12} \approx 2.917 = \mathrm{D}^2(Y)$$

$$\mathrm{D}(X) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{3}} \approx \sqrt{2.917} \approx 1.708 = \mathrm{D}(Y)$$

$$\mathrm{D}^2(Z) = \mathrm{E}(Z^2) - [\mathrm{E}(Z)]^2 = \frac{35}{6} \approx 5.833$$

$$\mathrm{D}(Z) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx \sqrt{5.833} \approx 2.415$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman varianssit

Olkoon **jatkuvan** satunnaismuuttujan X *reunajakauman tiheysfunktio* $f_X(x)$ ja **jatkuvan** satunnaismuuttujan Y *reunajakauman tiheysfunktio* $f_Y(y)$. Olkoot lisäksi satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$
$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y **varianssit** ovat *vakioita*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_Y)^2 f_Y(y)dy$$

jossa μ_X ja μ_Y ovat satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot.

12.10. Kovarianssi

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X$$
$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$

Satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \mathrm{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Huomaa, että satunnaismuuttujan kovarianssi itsensä kanssa yhtyy satunnaismuuttujan varianssiin. Siten

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = \sigma_X^2$$
$$\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{D}^2(Y) = \sigma_Y^2$$

Vaihtoehtoinen laskukaava kovarianssille

Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssin kaava voidaan kirjoittaa seuraaviin yhtäpitäviin muotoihin:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Perustelu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= \mathrm{E}[XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y] \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(\mu_X Y) - \mathrm{E}(\mu_Y X) + \mathrm{E}(\mu_X\mu_Y) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mu_X\,\mathrm{E}(Y) - \mu_Y\,\mathrm{E}(X) + \mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mu_X\mu_Y \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

Kovarianssin tulkinta

Satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$

kuvaa satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman todennäköisyysmassan* **yhteisvaihtelua** *satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvojen* E(X) *ja* E(Y) *määräämän yhteisjakauman todennäköisyysmassan painopisteen*

$$(\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(Y))$$

ympärillä.

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman kovarianssi

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat **diskreettejä**, satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y)$$

jossa μ_X ja μ_Y ovat satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot.

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman kovarianssi

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat **jatkuvia**, satunnaismuuttujien X ja Y **kovarianssi** on *vakio*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)(y-\mu_Y) f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

jossa μ_X ja μ_Y ovat satunnaismuuttujien X ja Y odotusarvot.

12.11. Kovarianssin ominaisuudet

Satunnaismuuttujien lineaarimuunnosten kovarianssi

Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y seuraavat *odotusarvot*, *varianssit* ja *kovarianssi*:

$$\mathrm{E}(X)=\mu_X \qquad \mathrm{E}(Y)=\mu_Y$$
$$\mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2 \qquad \mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\sigma_{XY}$$

Olkoot

$$W=a+bX$$
$$Z=c+dY$$

jossa a, b, c, d ovat ei-satunnaisia vakioita. Tällöin pätevät seuraavat kaavat:

$$\mathrm{E}(W)=a+b\,\mathrm{E}(X)=a+b\mu_X$$
$$\mathrm{E}(Z)=c+d\,\mathrm{E}(Y)=c+d\,\mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(W)=b^2\,\mathrm{Var}(X)=b^2\sigma_X^2$$
$$\mathrm{Var}(Z)=d^2\,\mathrm{Var}(Y)=d^2\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(W,Z)=bd\,\mathrm{Cov}(X,Y)=bd\sigma_{XY}$$

Perustelu:

Lineaarimuunnosten odotusarvoja ja variansseja koskevat kaavat on perusteltu jo aikaisemmin.

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y kovarianssi Cov(X,Y) ja olkoot

$$W=a+bX$$
$$Z=c+dY$$

jossa a, b, c, d ovat ei-satunnaisia vakioita. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(W,Z)&=\mathrm{E}[(W-\mathrm{E}(W))(Z-\mathrm{E}(Z))]\\&=\mathrm{E}[(a+bX-\mathrm{E}(a+bX))(c+dY-\mathrm{E}(c+dY))]\\&=\mathrm{E}[(bX-\mathrm{E}(bX))(dY-\mathrm{E}(dY))]\\&=bd\,\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]\\&=bd\,\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

■

Satunnaismuuttujien summan ja erotuksen varianssit

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit*

$$\mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2$$
$$\mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$$

ja kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}$$

Tällöin

$$\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2\pm 2\sigma_{XY}$$

Perustelu:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X\pm Y)&=\mathrm{E}[X\pm Y-\mathrm{E}(X\pm Y)]^2\\&=\mathrm{E}[X\pm Y-\mathrm{E}(X)\mp \mathrm{E}(Y)]^2\\&=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))\pm(Y-\mathrm{E}(Y))]^2\\&=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2+(Y-\mathrm{E}(Y))^2\pm 2(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]\\&=\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2]+\mathrm{E}[(Y-\mathrm{E}(Y))^2]\pm 2\,\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]\\&=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

■

Satunnaismuuttujien X ja Y summan ja erotuksen varianssin kaavasta seuraa:

(i) Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}<0$$

niin

$$\mathrm{Var}(X+Y)<\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X-Y)>\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

(ii) Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=0$$

niin

$$\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

(iii) Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}>0$$

niin

$$\mathrm{Var}(X+Y)>\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X-Y)<\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

Korreloimattomuus

Jos

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma_{XY}=0$$

niin sanomme, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat **korreloimattomia**. Nimityksen perustelu selviää kappaleessa **Korrelaatio**. Seuraavassa kohdassa näytetään, että *satunnaismuuttujat X* ja *Y ovat korreloimattomia, jos ne ovat riippumattomia*.

Satunnaismuuttujien riippumattomuus ja kovarianssi

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

Perustelu:

Todistus perustuu olennaiselta osaltaan seuraavaan tulokseen: Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

Ks. kappaletta **Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot**.

Siten

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)=0 \qquad \blacksquare$$

Huomautus:

- Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

  ei välttämättä seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y olisivat riippumattomia.

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan ja erotuksen varianssi

Olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *varianssit* $\mathrm{Var}(X)$ ja $\mathrm{Var}(Y)$. Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y lisäksi *riippumattomia*, jolloin

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

Tällöin satunnaismuuttujien summan ja erotuksen varianssеja koskevista yleisistä kaavoista seuraa, että

$$\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$$

Huomautus:

- *Riippumattomien* satunnaismuuttujien summan ja erotuksen varianssien kaavat on esitetty ilman perustelua ja kaavoja on sovellettu luvussa **Jakaumien tunnusluvut**.

12.12. Korrelaatio

Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y on seuraavat *odotusarvot*, *varianssit* ja *kovarianssi*:

$$\mathrm{E}(X)=\mu_X \qquad \mathrm{E}(Y)=\mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sigma_X^2 \qquad \mathrm{Var}(Y)=\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\sigma_{XY}$$

Satunnaismuuttujien X ja Y **korrelaatiokerroin** on *vakio*

$$\rho_{XY}=\mathrm{Cor}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Korrelaatiokertoimen dimensio

Huomaa, että korrelaatiokerroin on **dimensioton** eli **laaduton** suure.

12.13. Korrelaatiokertoimen ominaisuudet

Korrelaatio ja kovarianssi

Koska

$$\rho_{XY} = \mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

niin satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiolla ja kovarianssilla on aina *sama merkki*. Lisäksi pätee:

$$\rho_{XY} = 0$$

jos ja vain jos

$$\sigma_{XY} = 0$$

Satunnaismuuttujien lineaarimuunnosten korrelaatio

Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y seuraavat *odotusarvot*, *varianssit* ja *kovarianssi*:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X \qquad \mathrm{E}(Y) = \mu_Y$$
$$\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = \sigma_{XY}$$

Olkoot

$$W = a + bX$$
$$Z = c + dY$$

jossa a, b, c, d ovat ei-satunnaisia vakioita. Tällöin pätevät seuraavat kaavat:

$$\mathrm{E}(W) = a + b\,\mathrm{E}(X) = a + b\mu_X$$
$$\mathrm{E}(Z) = c + d\,\mathrm{E}(Y) = c + d\mu_Y$$

$$\mathrm{Var}(W) = b^2\,\mathrm{Var}(X) = b^2\sigma_X^2$$
$$\mathrm{Var}(Z) = d^2\,\mathrm{Var}(Y) = d^2\sigma_Y^2$$

$$\mathrm{Cov}(W,Z) = bd\,\mathrm{Cov}(X,Y) = bd\sigma_{XY}$$
$$\mathrm{Cor}(W,Z) = \mathrm{sgn}(bd)\,\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{sgn}(bd)\rho_{XY}$$

Satunnaismuuttujien W ja Z korrelaation kaavassa esiintyvä funktio $\mathrm{sgn}(\cdot)$ on ns. *merkkifunktio*:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{jos } x > 0 \\ 0, & \text{jos } x = 0 \\ -1, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

Perustelu:

Lineaarimuunnosten odotusarvoja, variansseja ja kovarianssia koskevat kaavat on perusteltu jo aikaisemmin.

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatio $\mathrm{Cor}(X,Y)$ ja olkoot

$$W = a + bX$$
$$Z = c + dY$$

jossa a, b, c, d ovat ei-satunnaisia vakioita. Tällöin

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cor}(W,Z) &= \frac{\mathrm{Cov}(W,Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)\,\mathrm{Var}(Z)}} \\
&= \frac{bd\,\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{b^2\,\mathrm{Var}(X)\,d^2\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \mathrm{sgn}(bd)\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \mathrm{sgn}(bd)\,\mathrm{Cor}(X,Y)
\end{aligned}$$

■

Korrelaatiokertoimen keskeiset ominaisuudet on koottu seuraaviin kahteen lauseeseen.

Lause 1.

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *korrelaatiokerroin* Cor(X,Y). Tällöin:

(i) $-1 \le \mathrm{Cor}(X,Y) \le +1$

(ii) Jos X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$$

(iii) $\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$

jos ja vain jos

$$Y = \alpha + \beta X$$

jossa α ja $\beta \neq 0$ ovat ei-satunnaisia vakioita. Lisäksi pätee seuraava:

Jos $\mathrm{Cor}(X,Y) = +1$, niin $\beta > 0$ ja jos $\mathrm{Cor}(X,Y) = -1$, niin $\beta < 0$.

Todistus:

(i) Väite:

$$-1 \le \mathrm{Cor}(X,Y) \le +1$$

Perustelu:

(1) Olkoot W ja Z satunnaismuuttujia ja olkoon a ei-satunnainen vakio.

(2) $W^2 \ge 0,\ Z^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(W^2) \ge 0,\ \mathrm{E}(Z^2) \ge 0$

(3) $(aW - Z)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(aW - Z)^2 \ge 0$

(4) Kohdasta (3) seuraa, että

$$\mathrm{E}(aW - Z)^2 = a^2\mathrm{E}(W^2) - 2a\mathrm{E}(WZ) + \mathrm{E}(Z^2) \ge 0$$

(5) Valitaan

$$a = \frac{\mathrm{E}(WZ)}{\mathrm{E}(W^2)}$$

(6) Kohdista (4) ja (5) seuraa, että

$$\mathrm{E}(aW - Z)^2 = -\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)} + \mathrm{E}(Z^2) \ge 0$$

(7) Koska kohta (2) pätee, kohdan (6) epäyhtälö on ekvivalentti epäyhtälön

$$\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)} \le 1$$

kanssa.

(8) Väite seuraa kohdan (7) epäyhtälöstä valitsemalla

$$W = X - \mathrm{E}(X)$$

$$Z = Y - \mathrm{E}(Y)$$

ja ottamalla saadusta epäyhtälöstä neliöjuuri, koska

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2\,\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}(Y))^2]}}$$

Huomautus:

- Kohdan (7) epäyhtälöstä seuraa eräs **Schwarzin epäyhtälön** monista muodoista:

$$[\mathrm{E}(WZ)]^2 \le \mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)$$

(ii) Väite: Jos X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$$

Perustelu:

Väite seuraa siitä, että

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

jos X ja Y ovat riippumattomia; ks. kappaletta **Kovarianssi**.

Huomautus:

- Käänteinen *ei päde*: *Siitä, että*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cor}(X,Y) = 0$$

ei välttämättä seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y *ovat riippumattomia*.

(iii) Väite:

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$$

jos ja vain jos

$$Y = \alpha + \beta X$$

jossa α ja $\beta \neq 0$ ovat ei-satunnaisia vakioita.

Oletetaan ensin, että

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$$

ja todistetaan, että

$$Y = \alpha + \beta X$$

jossa α ja $\beta \neq 0$ ovat ei-satunnaisia vakioita.

Perustelu:

(1) Ominaisuuden (i) perustelussa kohdan (4) epäyhtälön vasen puoli on 2. asteen polynomi muuttujan a suhteen:

$$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 = a^2\mathrm{E}(W^2) - 2a\mathrm{E}(WZ) + \mathrm{E}(Z^2)$$

(2) Ominaisuuden (i) perustelun kohdan (3) mukaan

$h(a) \geq 0$

kaikille a.

(3) 2. asteen yhtälön ominaisuuksien perusteella

$h(a) > 0$

kaikille a, jos ja vain jos yhtälön

$h(a) = 0$

diskriminantti

$$D = 4[\mathrm{E}(WZ)]^2 - 4\,\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2) < 0$$

(4) 2. asteen yhtälön ominaisuuksien perusteella on olemassa vain yksi a siten, että

$h(a) = 0$

jos ja vain jos yhtälön

$h(a) = 0$

diskriminantti

$$D = 4[\mathrm{E}(WZ)]^2 - 4\,\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2) = 0$$

(5) Kohdasta (4) seuraa, että

$h(a) = 0$

jos ja vain jos

$$\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)} = 1$$

(6) Kohdan (5) yhtälöstä

$$\frac{[\mathrm{E}(WZ)]^2}{\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2)} = 1$$

seuraa yhtälö

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))]}{\sqrt{\mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))^2\,\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}(Y))^2]}} = \pm 1$$

valitsemalla

$W = X - \mathrm{E}(X)$

$Z = Y - \mathrm{E}(Y)$

ja ottamalla saadusta yhtälöstä neliöjuuri.

(7) Edellä esitetyn mukaan

$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$

täsmälleen silloin, kun

$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 = 0$

(8) Koska kohdan (2) mukaan

$$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 \geq 0$$

kaikille a, niin

$$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 = 0$$

täsmälleen silloin, kun

$$\Pr((aW - Z)^2 = 0) = 1$$

mikä on totta täsmälleen silloin, kun

$$\Pr(aW - Z = 0) = 1$$

(9) Kohdasta (8) seuraa, että

$$Z = aW$$

todennäköisyydellä 1.

(10) Väite seuraa kohdasta 9 valitsemalla

$$W = X - \mathrm{E}(X)$$

$$Z = Y - \mathrm{E}(Y)$$

ja merkitsemällä

$$\beta = a$$
$$\alpha = \mathrm{E}(Y) - a\,\mathrm{E}(X)$$

Todistetaan lopuksi kohdan (ii) viimeinen väite:

Jos $\mathrm{Cor}(X, Y) = +1$, niin $\beta > 0$ ja jos $\mathrm{Cor}(X, Y) = -1$, niin $\beta < 0$.

Perustelu:

Edellä todistettiin, että

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \pm 1$$

täsmälleen silloin, kun 2. asteen yhtälöllä

$$h(a) = \mathrm{E}(aW - Z)^2 = a^2\mathrm{E}(W^2) - 2a\mathrm{E}(WZ) + \mathrm{E}(Z^2) = 0$$

on yksi juuri. Tämä juuri on 2. asteen yhtälön ratkaisukaavan mukaan

$$a = \frac{\mathrm{E}(WZ)}{\mathrm{E}(W^2)}$$

Sijoittamalla tähän

$$W = X - \mathrm{E}(X)$$

$$Z = Y - \mathrm{E}(Y)$$

voidaan juuri kirjoittaa muotoon

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)}$$

Koska

$$\beta = a$$

niin näemme, että kertoimella β ja satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiolla Cor(X, Y) on aina sama merkki, mikä oli todistettava.

Huomautus:

- Korrelaatiokertoimen ominaisuus (i) seuraa myös kohdan (3) epäyhtälöstä

$$D = 4[\mathrm{E}(WZ)]^2 - 4\,\mathrm{E}(W^2)\,\mathrm{E}(Z^2) < 0$$

Oletetaan nyt, että

$$Y = \alpha + \beta X$$

jossa α ja $\beta \neq 0$ ovat ei-satunnaisia vakioita ja todistetaan, että

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$$

Perustelu:

Koska

$$Y = \alpha + \beta X$$

niin satunnaismuuttujien lineaarimuunnosten korrelaatiota koskevan kohdan mukaan

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{Cor}(X,\alpha + \beta X) = \mathrm{sgn}(\beta)\,\mathrm{Cor}(X,X) = \mathrm{sgn}(\beta) = \pm 1$$

Satunnaismuuttujien W ja Z korrelaation kaavassa esiintyvä funktio sgn(·) on ns. *merkkifunktio*:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & \text{jos } x > 0 \\ 0, & \text{jos } x = 0 \\ -1, & \text{jos } x < 0 \end{cases}$$

■

Korrelaatiokertoimen tulkinta

Lauseesta 1 seuraa, että satunnaismuuttujien X ja Y korrelaatiokertoimelle

Cor(X,Y)

voidaan antaa seuraava tulkinta: Korrelaatiokerroin Cor(X,Y) mittaa satunnaismuuttujien X ja Y **lineaarisen riippuvuuden voimakkuutta**:

(i) Mitä *suurempi* on

|Cor(X,Y)|

sitä *voimakkaampaa* on satunnaismuuttujien X ja Y välinen lineaarinen riippuvuus.

(ii) Mitä *pienempi* on

|Cor(X,Y)|

sitä *heikompaa* on satunnaismuuttujien X ja Y välinen lineaarinen riippuvuus.

Korreloimattomuus

Jos

$$\mathrm{Cor}(X,Y)=\rho_{XY}=0$$

niin sanomme, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat **korreloimattomia**. Lauseen 1 mukaan *satunnaismuuttujat X* ja *Y ovat korreloimattomia, jos ne ovat riippumattomia*.

Huomautus:

- Käänteinen *ei päde*: Siitä, että

  $$\mathrm{Cor}(X,Y)=0$$

  ei välttämättä seuraa, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

Palautetaan vielä mieleen seuraava tosiasia: Koska

$$\rho_{XY}=\mathrm{Cor}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Y)}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

niin $\rho_{XY}=0$, jos ja vain jos $\sigma_{XY}=0$.

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 1.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat X* ja *Y*:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XY}(x,y)=\Pr(X=x,Y=y)=\frac{1}{36}\,;\ x=1,2,3,4,5,6\,;\ y=1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x)=\Pr(X=x)=\frac{1}{6}\,;\ x=1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y)=\Pr(Y=y)=\frac{1}{6}\,;\ y=1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujien X ja Y *odotusarvot*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat* (laskettu aikaisemmin kappaleissa **Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot** ja **Kaksiulotteisten jakaumien varianssit ja standardipoikkeamat**):

$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 21/6 = 3.5$

$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{D}^2(Y) = 35/12 = 2.917$

$\mathrm{D}(X) = \mathrm{D}(Y) = 1.708$

Koska olemme todenneet kappaleessa **Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus**, että satunnaismuuttujat X ja Y *ovat riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

Esimerkki 2. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 2.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36}\,;\ x = 1,2,3,4,5,6\,;\ z = x + y\,;\ y = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\,;\ x = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan Z *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Z(z) = \Pr(Z = z) = \begin{cases} \dfrac{z-1}{36} & ;\ z = 2,3,4,5,6,7 \\ \dfrac{13-z}{36} & ;\ z = 7,8,9,10,11,12 \end{cases}$$

Satunnaismuuttujien X ja Z *odotusarvot*, *varianssit* ja *standardipoikkeamat* (laskettu aikaisemmin kappaleissa **Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot** ja **Kaksiulotteisten jakaumien varianssit ja standardipoikkeamat**):

$\mathrm{E}(X) = 21/6 = 3.5$ $\quad$ $\mathrm{E}(Z) = 252/36 = 7$

$\mathrm{D}^2(X) = 35/12 = 2.917$ $\quad$ $\mathrm{D}^2(Z) = 210/36 = 5.833$

$\mathrm{D}(X) = 1.708$ $\quad$ $\mathrm{D}(Z) = 2.415$

Olemme todenneet kappaleessa **Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat ja riippumattomuus**, että satunnaismuuttujat X ja Z *eivät ole riippumattomia*.

Lasketaan ensin satunnaismuuttujien X ja Z *kovarianssi*:

$$\mathrm{E}(XZ) = \sum_{x=1}^{6}\sum_{z=2}^{12} xz \Pr(X = x, Z = z) = \frac{987}{36}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{E}(XZ) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z) = \frac{987}{36} - \frac{21}{6}\cdot\frac{42}{6} = \frac{105}{36} = 2.917$$

Siten *korrelaatiokertoimen* arvoksi saadaan:

$$\mathrm{Cor}(X,Z) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\mathrm{D}(X)\,\mathrm{D}(Z)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

12.14. Ehdolliset jakaumat

Ehdollinen todennäköisyys

Palautetaan mieleen *ehdollisen todennäköisyyden määritelmä*: Olkoot A ja B otosavaruuden S tapahtumia ja olkoon $\Pr(B) \neq 0$. Tapahtuman A **ehdollinen todennäköisyys** tapahtuman B suhteen on

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Ehdollisen jakauman määritelmä mukailee ehdollisen todennäköisyyden määritelmää.

Ehdolliset jakaumat

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyys-* tai *tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$ ja olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyys-* tai *tiheysfunktiot* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.

Satunnaismuuttujan X **ehdollinen jakauma** satunnaismuuttujan Y suhteen (ehdolla $Y = y$) on

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \text{ jos } f_Y(y) > 0$$

Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen jakauma** satunnaismuuttujan X suhteen (ehdolla $X = x$) on

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}, \text{ jos } f_X(x) > 0$$

Ehdolliset jakaumat ja ehtomuuttuja

Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma

$$f_{X|Y}(x \mid y)$$

satunnaismuuttujan Y suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan Y arvoista*.

Satunnaismuuttujan Y ehdollinen jakauma

$$f_{Y|X}(y \mid x)$$

satunnaismuuttujan X suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan X arvoista*.

Ehdolliset jakaumat ja riippumattomuus

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyys-* tai *tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$ ja olkoot satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien pistetodennäköisyys-* tai *tiheysfunktiot* $f_X(x)$ ja $f_Y(y)$.

Riippumattomuuden määritelmän mukaan satunnaismuuttujat X ja Y ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Suoraan ehdollisten jakaumien määritelmistä nähdään:

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, jos ja vain jos satunnaismuuttujan X *ehdollinen jakauma* satunnaismuuttujan Y suhteen yhtyy satunnaismuuttujan X *reunajakaumaan*:

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = f_X(x)\ ,\ \text{jos } f_Y(y) > 0$$

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, jos ja vain, jos satunnaismuuttujan Y *ehdollinen jakauma* satunnaismuuttujan X suhteen yhtyy satunnaismuuttujan Y *reunajakaumaan*:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = f_Y(y)\ ,\ \text{jos } f_X(x) > 0$$

12.15. Ehdolliset odotusarvot ja varianssit

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y **diskreettejä**.

Satunnaismuuttujan X **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y = y) = \mu_{X|Y} = \sum_x x f_{X|Y}(x\,|\,y)$$

Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(Y\,|\,X = x) = \mu_{Y|X} = \sum_y y f_{Y|X}(y\,|\,x)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman ehdolliset odotusarvot

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y **jatkuvia**.

Satunnaismuuttujan X **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y = y) = \mu_{X|Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x\,|\,y)\,dx$$

Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen odotusarvo** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman odotusarvo:

$$\mathrm{E}(Y\,|\,X = x) = \mu_{Y|X} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y\,|\,x)\,dy$$

Ehdolliset odotusarvot ja ehtomuuttujat

Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo

$$\mathrm{E}(X\,|\,Y = y)$$

satunnaismuuttujan Y suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan Y arvoista*.

Satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

satunnaismuuttujan X suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan X arvoista x*.

Ehdolliset odotusarvot ja riippumattomuus

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, ehdolliset odotusarvot *yhtyvät* niiden *reuna-jakaumien odotusarvoihin*. Jos siis X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \mathrm{E}(Y)$$
$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \mathrm{E}(X)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujan Y suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan Y arvoista ja satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujan X suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan X arvoista.

Diskreetin kaksiulotteisen jakauman ehdolliset varianssit

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y **diskreettejä**.

Satunnaismuuttujan X **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman varianssi:

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \sigma_{X|Y}^2 = \sum_x (x - \mu_{X|Y})^2 f_{X|Y}(x \mid y)$$

Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman varianssi:

$$\mathrm{Var}(Y \mid X = x) = \sigma_{Y|X}^2 = \sum_y (y - \mu_{Y|X})^2 f_{Y|X}(y \mid x)$$

Jatkuvan kaksiulotteisen jakauman ehdolliset varianssit

Olkoot satunnaismuuttujat X ja Y **jatkuvia**.

Satunnaismuuttujan X **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan Y suhteen on satunnaismuuttujan X ehdollisen jakauman varianssi:

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \sigma_{X|Y}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X|Y})^2 f_{X|Y}(x \mid y)dx$$

Satunnaismuuttujan Y **ehdollinen varianssi** satunnaismuuttujan X suhteen on satunnaismuuttujan Y ehdollisen jakauman varianssi:

$$\mathrm{Var}(Y \mid X = x) = \sigma_{Y|X}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_{Y|X})^2 f_{Y|X}(y \mid x)dy$$

Ehdolliset varianssit ja ehtomuuttujat

Satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y)$$

satunnaismuuttujan Y suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan Y arvoista*.

Satunnaismuuttujan Y ehdollinen varianssi

$$\mathrm{Var}(Y \mid X = x)$$

satunnaismuuttujan X suhteen *riippuu yleensä ehtomuuttujan X arvoista x*.

Ehdolliset varianssit ja riippumattomuus

Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, ehdolliset varianssit *yhtyvät* niiden *reuna-jakaumien variansseihin*. Jos siis X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$\mathrm{Var}(Y \mid X = x) = \mathrm{Var}(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = \mathrm{Var}(X)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan Y suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan Y arvoista ja satunnaismuuttujan Y ehdollinen varianssi satunnaismuuttujan X suhteen *ei riipu* ehtomuuttujan X arvoista.

Iteroidun odotusarvon lait

Ehdollinen odotusarvo voidaan tulkita *satunnaismuuttujaksi* ehtomuuttujan suhteen. Voimme siksi puhua *ehdollisen odotusarvon odotusarvosta*.

Satunnaismuuttujan Y *ehdollisen odotusarvon odotusarvo* (satunnaismuuttujan X suhteen) on

$$\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}(Y \mid X)\right] = \mathrm{E}(Y)$$

Satunnaismuuttujan X *ehdollisen odotusarvon odotusarvo* (satunnaismuuttujan Y suhteen) on

$$\mathrm{E}_Y\left[\mathrm{E}(X \mid Y)\right] = \mathrm{E}(X)$$

Näitä kaavoja on tapana kutsua **iteroidun odotusarvon laeiksi**.

Perustelu:

Todistetaan ensimmäinen kaavoista *jatkuvien* satunnaismuuttujien tapauksessa.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}(Y \mid X)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}(Y \mid X) f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)dy\right] f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x)dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x, y)dy\right] dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

Regressiofunktiot ja -käyrät

Tarkastellaan satunnaismuuttujan X *ehdollista odotusarvoa*

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y)$$

ehtomuuttujan Y arvojen y *funktiona*. Tätä funktiota kutsutaan satunnaismuuttujan X **regressiofunktioksi** satunnaismuuttujan Y suhteen.

Satunnaismuuttujan X regressiofunktio muuttujan Y suhteen määrittelee **regressiokäyrän**

$$x = g_Y(y) = \mathrm{E}(X \mid Y = y)$$

Tarkastellaan satunnaismuuttujan Y *ehdollista odotusarvoa*

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

ehtomuuttujan X arvojen x *funktiona*. Tätä funktiota kutsutaan satunnaismuuttujan Y **regressiofunktioksi** satunnaismuuttujan X suhteen.

Satunnaismuuttujan Y regressiofunktio muuttujan X suhteen määrittelee **regressiokäyrän**

$$y = g_X(x) = \mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

Huomaa, että vaikka *regressiokäyrät*

$$x = g_Y(y)$$
$$y = g_X(x)$$

ovat funktioina täysin määrättyjä, niin *sattuma määrää mikä funktioiden arvoista realisoituu*.

Regressiofunktiot ja ennustaminen

Oletetaan, että satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f_{XY}(x, y)$ tunnetaan.

Tehtävä 1:

(i) Haluamme *ennustaa* satunnaismuuttujan X arvon satunnaismuuttujan Y saaman arvon perusteella.

(ii) Olkoon ennustettu arvo $d(X \mid Y)$.

(iii) Miten ennuste $d(X \mid Y)$ valitaan *optimaalisella tavalla*?

Ratkaisu:

Valitaan ennuste $d(X \mid Y)$ siten, että *ennusteen* **keskineliövirhe**

$$\mathrm{E}([X - d(X \mid Y)]^2 \mid Y)$$

minimoituu. Voidaan osoittaa, että keskineliövirhe minimoituu valinnalla

$$d(X \mid Y) = \mathrm{E}(X \mid Y)$$

Siten *ehdollinen odotusarvo* eli *regressiofunktio* $\mathrm{E}(X \mid Y)$ antaa *keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennusteen* satunnaismuuttujan X saamille arvoille.

Tehtävä 2:

(i) Haluamme *ennustaa* satunnaismuuttujan Y arvon satunnaismuuttujan X saaman arvon perusteella.

(ii) Olkoon ennustettu arvo $d(Y \mid X)$.

(iii) Miten ennuste $d(Y \mid X)$ valitaan *optimaalisella tavalla*?

Ratkaisu:

Valitaan ennuste $d(Y \mid X)$ siten, että *ennusteen* **keskineliövirhe**

$$\mathrm{E}([Y - d(Y \mid X)]^2 \mid X)$$

minimoituu. Voidaan osoittaa, että keskineliövirhe minimoituu valinnalla

$$d(Y \mid X) = \mathrm{E}(Y \mid X)$$

Siten *ehdollinen odotusarvo* eli *regressiofunktio* $\mathrm{E}(Y \mid X)$ antaa *keskineliövirheen mielessä optimaalinen ennusteen* satunnaismuuttujan Y saamille arvoille.

Havainnollistuksia

Esimerkki 1. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 1.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X ja Y:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Satunnaismuuttujien X ja Y mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y) = \Pr(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}\,;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6}\,;\ x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Satunnaismuuttujan Y *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \frac{1}{6}\,;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Kuten olemme kappaleessa **Reunajakaumat ja riippumattomuus** nähneet, satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* ja *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Pr(*X* = *x*, *Y* = *y*)		Tulos 1. nopanheitosta = *x*						Summa Pr(*Y* = *y*)
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Tulos 2. nopanheitosta = *y*	**6**	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
	1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**1/6**
Summa Pr(*X* = *x*)		**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

(i) Tarkastellaan satunnaismuuttujan *X* *ehdollisia jakaumia* ja *ehdollisia odotusarvoja* satunnaismuuttujan *Y* suhteen.

Satunnaismuuttujan *X* *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan *Y* suhteen saadaan jakamalla yhteisjakauman pistetodennäköisyydet satunnaismuuttujan *Y* *reunajakauman todennäköisyyksillä*.

Esimerkki:

$$f_{X|Y}(x\,|\,Y=3) = \frac{f_{XY}(x,3)}{f_Y(3)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\,;\; x = 1,2,3,4,5,6$$

Kaikki satunnaismuuttujan *X* *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan *Y* arvojen suhteen voidaan esittää seuraavana taulukkona, jossa ehdolliset jakaumat ovat taulukon *riveinä*:

Pr(*X* = *x* |*Y* = *y*)		Tulos 1. nopanheitosta = *x*						Summa
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Tulos 2. nopanheitosta = *y*	**6**	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
	5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
	4	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
	3	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
	2	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**
	1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	**1**

Satunnaismuuttujan X *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan Y suhteen voidaan määrätä helposti tästä taulukosta.

Esimerkki:

$$\mathrm{E}(X \mid Y=3)=\sum_{x=1}^{6} x f_{X|Y}(x \mid Y=3)=\frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x=\frac{21}{6}=3.5$$

Kaikki satunnaismuuttujan X *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan Y suhteen voidaan esittää seuraavana taulukkona:

	Tulos 2. nopanheitosta = *y*					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
E(*X* |*Y* = *y*)	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5

Satunnaismuuttujan X ehdollinen odotusarvo muodostaa ehtomuuttujan Y arvojen funktiona satunnaismuuttujan X *regressiofunktion* satunnaismuuttujan Y suhteen.

Yllä olevasta taulukosta nähdään, että tässä tapauksessa satunnaismuuttujan X regressiofunktio satunnaismuuttujan Y suhteen *on vakio*. Siten *satunnaismuuttujan Y saaman arvon tunteminen ei auta ennustamaan satunnaismuuttujan X saamaa arvoa*. Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että satunnaismuuttujat X ja Y *ovat riippumattomia*.

(ii) Tarkastellaan satunnaismuuttujan Y *ehdollisia jakaumia* ja *ehdollisia odotusarvoja* satunnaismuuttujan X suhteen.

Satunnaismuuttujan Y *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan X suhteen saadaan jakamalla yhteisjakauman pistetodennäköisyydet satunnaismuuttujan X *reunajakauman toden näköisyyksillä*.

Esimerkki:

$$f_{Y|X}(y \mid X=4)=\frac{f_{XY}(x,4)}{f_X(4)}=\frac{1/36}{1/6}=\frac{1}{6}\,;\; y=1,2,3,4,5,6$$

Kaikki satunnaismuuttujan Y *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan X arvojen suhteen voidaan esittää seuraavana taulukkona, jossa ehdolliset jakaumat ovat taulukon *sarakkeina*:

Todennäköisyys Pr(*Y* = *y* |*X* = *x*)		**Tulos 1. nopanheitosta = *x***					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tulos 2. nopan-heitosta = *y*	**6**	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	5	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	4	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	3	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	2	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Summa		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Satunnaismuuttujan Y *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan X suhteen voidaan määrätä helposti tästä taulukosta.

Esimerkki:

$$\mathrm{E}(Y \mid X=4)=\sum_{y=1}^{6} y f_{Y|X}(y \mid X=4)=\frac{1}{6} y=\frac{21}{6}=3.5$$

Kaikki satunnaismuuttujan Y *ehdolliset odotusarvot* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

	Tulos 1. nopanheitosta = *x*					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
E(*Y* |*X* = *x*)	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5

Satunnaismuuttujan Y ehdollinen odotusarvo muodostaa ehtomuuttujan X arvojen funktiona satunnaismuuttujan Y *regressiofunktion* satunnaismuuttujan X suhteen.

Yllä olevasta taulukosta nähdään, että tässä tapauksessa satunnaismuuttujan Y regressiofunktio satunnaismuuttujan X suhteen *on vakio*. Siten *satunnaismuuttujan X saaman arvon tunteminen ei auta ennustamaan satunnaismuuttujan Y saamaa arvoa*. Tämä on sopu soinnussa sen kanssa, että satunnaismuuttujat Y ja X *ovat riippumattomia*.

Tarkastellaan vielä satunnaismuuttujan

Y = Tulos 1. nopanheitosta

regressiofunktiota satunnaismuuttujan

X = Tulos 2. nopanheitosta

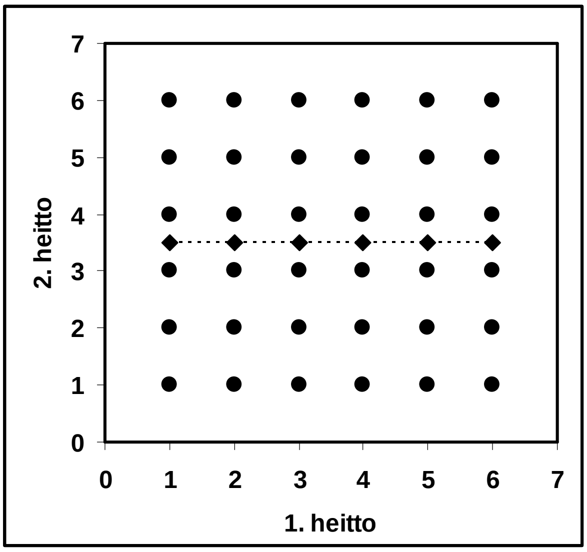
suhteen *graafisesti*.

Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakaumaa.

Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.

Satunnaismuuttujan Y ehdollisia odotusarvoja satunnaismuuttujan X arvojen suhteen on merkitty katkoviivan yhdistämillä *vinoneliöillä*.

Kuva havainnollistaa sitä, että 1. *nopanheiton tuloksen tuntemisesta ei ole tässä tapauksessa hyötyä* 2. *nopanheiton tuloksen ennustamisessa*.



Esimerkki 2. Nopanheitto.

Tämä esimerkki on jatkoa kappaleen **Diskreetit kaksiulotteiset jakaumat** esimerkille 2.

Heitetään *virheetöntä* noppaa kaksi kertaa ja määritellään *satunnaismuuttujat* X, Y ja Z seuraavasti:

X = Tulos (silmäluku) 1. nopanheitosta

Y = Tulos (silmäluku) 2. nopanheitosta

Z = $X + Y$ = Heittotulosten (silmälukujen) summa

Satunnaismuuttujien X, Y ja Z mahdolliset arvot:

X : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y : {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Z : {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Satunnaismuuttujien X ja Z *yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_{XZ}(x,z) = \Pr(X = x \text{ ja } Z = z) = \frac{1}{36} \; ; \; x = 1,2,3,4,5,6 \; ; \; z = x + y \; ; \; y = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan X *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{6} \; ; \; x = 1,2,3,4,5,6$$

Satunnaismuuttujan Z *reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_Z(z) = \Pr(Z = z) = \begin{cases} \dfrac{z-1}{36} & ; \; z = 2,3,4,5,6,7 \\ \dfrac{13-z}{36} & ; \; z = 7,8,9,10,11,12 \end{cases}$$

Kuten olemme kappaleessa **Reunajakaumat ja riippumattomuus** nähneet, satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* ja *reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

Pr(X = x, Z = z)		**Tulos 1. nopanheitosta = x**						**Summa Pr(Z = z)**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
Silmä-lukujen summa = z	**12**	0	0	0	0	0	1/36	**1/36**
	11	0	0	0	0	1/36	1/36	**2/36**
	10	0	0	0	1/36	1/36	1/36	**3/36**
	9	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	**4/36**
	8	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**5/36**
	7	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	**6/36**
	6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	**5/36**
	5	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	**4/36**
	4	1/36	1/36	1/36	0	0	0	**3/36**
	3	1/36	1/36	0	0	0	0	**2/36**
	2	1/36	0	0	0	0	0	**1/36**
Summa Pr(X = x)		**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1**

Tarkastellaan satunnaismuuttujan Z ehdollista jakaumaa ja odotusarvoa satunnaismuuttujan X suhteen.

Satunnaismuuttujan Z *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan X suhteen saadaan jakamalla yhteisjakauman pistetodennäköisyydet satunnaismuuttujan X *reunajakauman todennäköisyyksillä*.

Esimerkkejä:

$$\Pr(Z=8 \mid X=3) = f_{Z|X}(8 \mid X=3) = \frac{f_{ZX}(8,3)}{f_X(3)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

$$\Pr(Z=10 \mid X=3) = f_{Z|X}(10 \mid X=3) = \frac{f_{ZX}(10,3)}{f_X(3)} = \frac{0}{1/6} = 0$$

Kaikki satunnaismuuttujan Z *ehdolliset jakaumat* satunnaismuuttujan X arvojen suhteen voidaan esittää seuraavana taulukkona, jossa ehdolliset jakaumat ovat taulukon *sarakkeina*:

Pr($Z = z$ | $X = x$)		**Tulos 1. nopanheitosta = x**					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Silmä-lukujen summa = z	**12**	0	0	0	0	0	1/6
	11	0	0	0	0	1/6	1/6
	10	0	0	0	1/6	1/6	1/6
	9	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6
	8	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	7	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
	6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0
	5	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0
	4	1/6	1/6	1/6	0	0	0
	3	1/6	1/6	0	0	0	0
	2	1/6	0	0	0	0	0
Summa		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Satunnaismuuttujan Z *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan X suhteen voidaan määrätä helposti tästä taulukosta.

Esimerkki:

$$\mathrm{E}(Z \mid X = 3) = \sum_{z=2}^{12} z f_{Z|X}(z \mid X = 3) = \frac{1}{6}\sum_{z=4}^{9} z = \frac{39}{6} = 6.5$$

Kaikki satunnaismuuttujan X *ehdolliset odotusarvot* satunnaismuuttujan Y suhteen voidaan esittää seuraavana taulukkona:

	Tulos 1. nopanheitosta = x					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
E(Z |X = x)	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5

Satunnaismuuttujan Z ehdollinen odotusarvo ehtomuuttujan X arvojen funktiona muodostaa satunnaismuuttujan Z *regressiofunktion* satunnaismuuttujan X suhteen.

Yllä olevasta taulukosta nähdään, että tässä tapauksessa satunnaismuuttujan Z regressiofunktio satunnaismuuttujan X suhteen *ei ole vakio*. Siten *satunnaismuuttujan Y saaman arvon tunteminen auttaa ennustamaan satunnaismuuttujan X saamaa arvoa*. Tämä on sopusoinnussa sen kanssa, että satunnaismuuttujat X ja Y *eivät ole riippumattomia*.

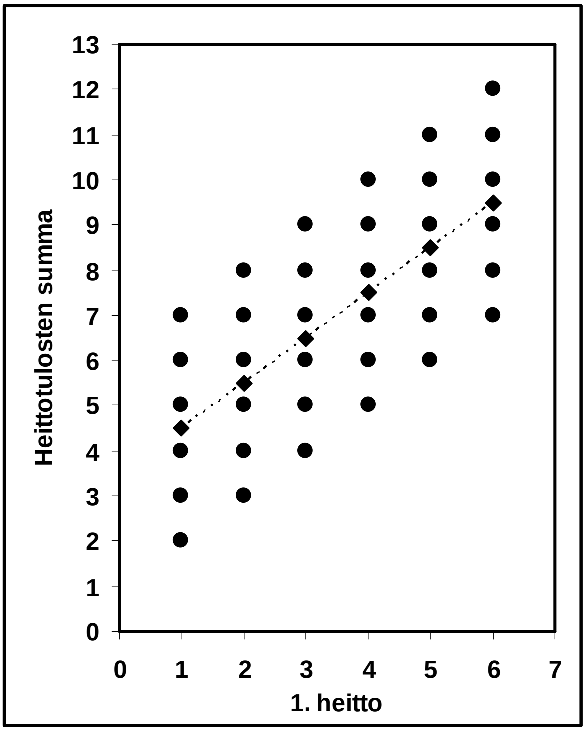
Tarkastellaan vielä satunnaismuuttujan

$$Z = \text{Heittotulosten summa}$$

regressiofunktiota satunnaismuuttujan

$$X = \text{Tulos 1. nopanheitosta}$$

suhteen *graafisesti*.



Kuva oikealla havainnollistaa satunnaismuuttujien Z ja X yhteisjakaumaa.

Kuvassa on 36 pistettä, joista jokaisen todennäköisyys on 1/36.

Satunnaismuuttujan Z *ehdollisia odotusarvoja* satunnaismuuttujan X arvojen suhteen on merkitty katkoviivan yhdistämillä *vinoneliöillä*.

Kuva havainnollistaa sitä, että 1. *nopanheiton tuloksen tuntemisesta on tässä tapauksessa hyötyä heittotulosten summan ennustamisessa*.

Esimerkki 3. Janan jatkuva jako.

Valitaan luvut X ja Y *satunnaisesti* väliltä (0, 1) kahdessa vaiheessa:

(1) Valitaan *ensin* luku X *satunnaisesti* väliltä (0, 1) jatkuvan tasaisen jakauman mukaan.

Siten

$$X \quad \text{Uniform}(0,1)$$

Olkoon valittu luku x.

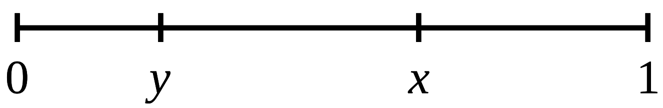
(2) Valitaan *sitten* luku Y *satunnaisesti* väliltä (0, x) jatkuvan tasaisen jakauman mukaan.

Siten

$$(Y \mid X = x) \quad \text{Uniform}(0, x)$$

Olkoon valittu luku y.

Valintoja voidaan havainnollistaa alla olevalla kuviolla:



Alla konstruoidaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio*

$f_{XY}(x, y)$

satunnaismuuttujan Y *reunajakauman tiheysfunktio*

$$f_Y(x)$$

satunnaismuuttujan Y *odotusarvo*

$$\mathrm{E}(Y)$$

sekä satunnaismuuttujan Y *regressiofunktio*

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x)$$

satunnaismuuttujan X suhteen.

Satunnaismuuttujan X (*reuna*-) *jakauman tiheysfunktio* on

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan Y *ehdollisen jakauman tiheysfunktio* ehdolla $X = x$ on

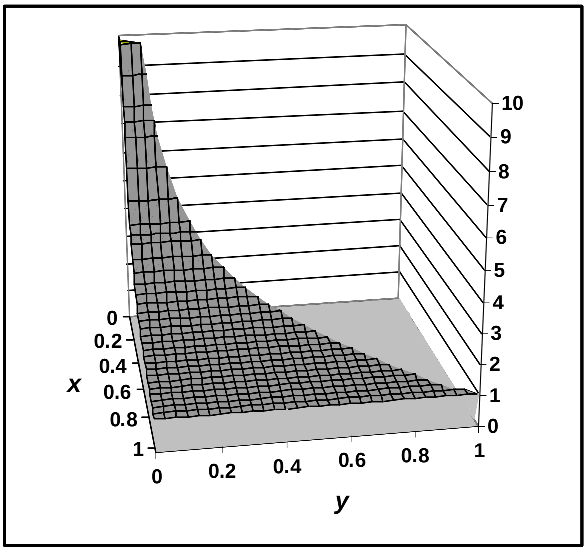
$$f_{Y|X}(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Ehdollisen jakauman määritelmän mukaan satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y \mid x) f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Siten satunnaismuuttujan Y *reunajakaumaksi* saadaan

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^1 f_{XY}(x, y)\,dx \\ &= \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx \\ &= \left[\log x\right]_y^1 \\ &= -\log y \end{aligned}$$



Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktiota*

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kuva oikealla esittää satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman tiheysfunktion tasa-arvokäyriä*

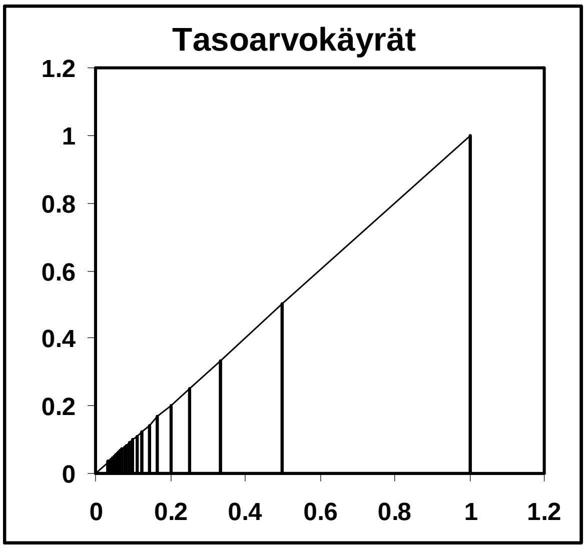
$$x = \frac{1}{k}\,,\ 0 < y < x < 1$$

kun

$$k = 1, 2, \ldots , 30.$$

Kuvaan on merkitty myös suora

$$y = x\,,\ 0 < x < 1$$

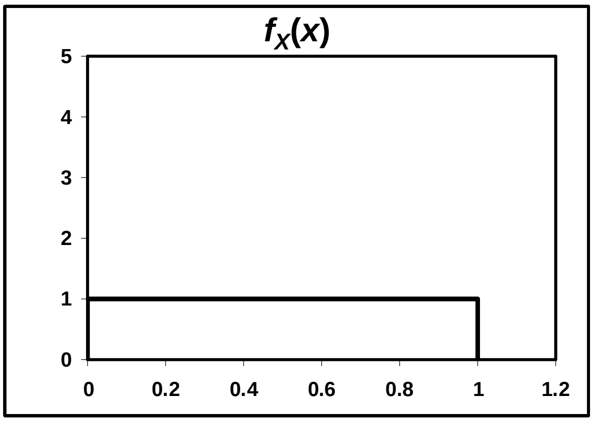


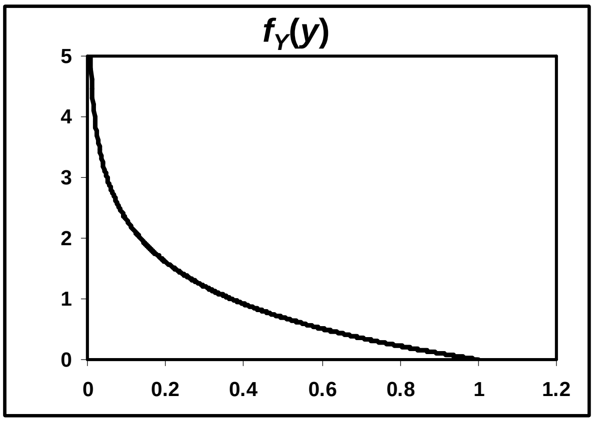
Kuvat alla esittävät satunnaismuuttujien X ja Y *reunajakaumien tiheysfunktioita*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ , 0 < x < 1 \\ 0\ , \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$f_Y(y) = -\log y$$





Johdetaan seuraavaksi satunnaismuuttujan Y *odotusarvo*. Koska

$$X \quad \text{Uniform}(0,1)$$

ja

$$(Y \mid X = x) \quad \text{Uniform}(0, x)$$

niin

$$\text{E}(X) = \frac{1}{2}$$

ja

$$\text{E}(Y \mid X = x) = \frac{1}{2}x$$

Satunnaismuuttujan Y *ehdollisen odotusarvon* $\mathrm{E}(Y|X)$ *odotusarvo* satunnaismuuttujan X suhteen on *iteroidun odotusarvon lain* mukaan

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}(Y|X)] = \mathrm{E}_X[\tfrac{1}{2}X] = \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_X[X] = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Koska toisaalta

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y f_Y(y)dy$$

ja

$$f_Y(y) = -\log(y)$$

olemme todistaneet seuraavan integraalikaavan:

$$-\int_0^1 y\log(y)dy = \tfrac{1}{4}$$

Tarkastellaan lopuksi satunnaismuuttujan Y *regressiofunktiota* satunnaismuuttujan X suhteen.

Koska

$$(Y \mid X = x) \quad \text{Uniform}(0, x)$$

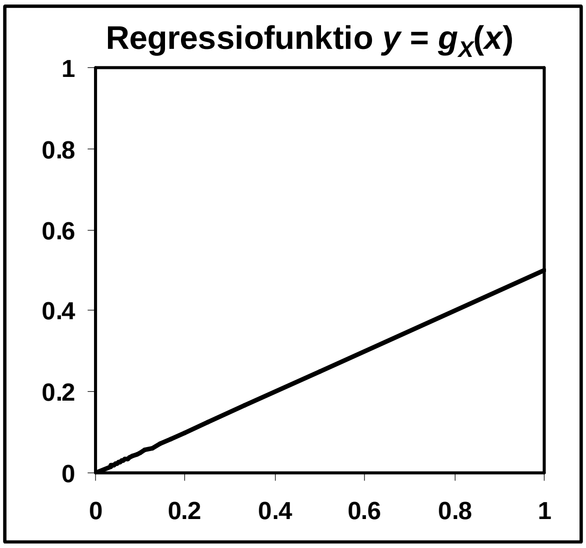
niin satunnaismuuttujan Y *ehdollinen odotusarvo* satunnaismuuttujan X suhteen on

$$\mathrm{E}(Y \mid X = x) = \frac{1}{2}x$$

Siten satunnaismuuttujan y *regressiofunktiota* vastaava *regressiokäyrä* muuttujan x suhteen on muotoa

$$y = g_X(x) = \mathrm{E}(Y \mid X = x) = \frac{1}{2}x$$

Ks. kuvaa oikealla.



Huomaa, että *satunnaismuuttujan X saaman arvon tuntemisesta on tässä tapauksessa hyötyä satunnaismuuttujan Y saaman arvon ennustamisessa.*

13. Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio

13.1. Momenttiemäfunktio

13.2. Karakteristinen funktio

Tarkastelemme tässä luvussa kahta tärkeätä *todennäköisyyslaskennan* ja *matemaattisen tilastotieteen apuvälinettä*, **momenttiemäfunktiota** ja **karakteristista funktiota**.

Useimmissa tilanteissa jakaumien **momentit** kuten esimerkiksi **odotusarvot** ja **varianssit** on helpointa johtaa jakauman momenttiemäfunktion avulla. Myös *samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien* **summan** tai **aritmeettisen keskiarvon** jakauma saadaan monissa tilanteissa helposti selville momenttiemäfunktion avulla.

Eräs *todennäköisyyslaskennan* ja *matemaattisen tilastotieteen* tärkeimmistä tuloksista on **keskeinen raja-arvolause**. Se selittää sen, miksi *normaalijakaumalla* on niin keskeinen asema teoreettisessa ja soveltavassa tilastotieteessä. Keskeisen raja-arvolauseen perusmuodon todistuksessa voidaan nojata tekniikkaan, jossa sovelletaan momenttiemäfunktiota; ks. luvun **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet** kappaletta **Keskeinen raja-arvolause**.

Karakteristista funktiota voidaan soveltaa samoihin ongelmiin kuin momenttiemäfunktiota. Karakteristisella funktiolla on se teoreettinen etu momenttiemäfunktioon nähden, että se voidaan määrätä kaikille satunnaismuuttujille toisin kuin momenttiemäfunktio. Toisaalta karakteristiseen funktioon liittyvä teoria on vaikeampaa. Siksi tässä esityksessä rajoitutaan vain karakteristisen funktion perusominaisuuksien esittelemiseen.

Avainsanat:

Aritmeettinen keskiarvo, Diskreetti jakauma, Emäfunktio, Inversioteoreema, Jatkuva jakauma, Karakteristinen funktio, Kolmiojakauma, Lineaarimuunnos, Momentit generoiva funktio, Momenttiemäfunktio, Odotusarvo, Satunnaismuuttujien summa, Taylorin sarja, Varianssi, Yksikäsitteisyys

13.1. Momenttiemäfunktio

Olkoon X satunnaismuuttuja. Jos on olemassa $h > 0$ siten, että odotusarvo

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

on olemassa kaikille

$$t \in (-h, +h)$$

niin sanomme, että $m_X(t)$ on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **momenttiemäfunktio** eli **momentit generoiva funktio**. Huomaa, että satunnaismuuttujan X *momenttiemäfunktio riippuu vain funktion argumentista t*.

Jos $m_X(t)$ on momenttiemäfunktio, niin

$$m_X(0) = \mathrm{E}(e^0) = \mathrm{E}(1) = 1$$

Momenttiemäfunktion olemassaolo

Kaikilla satunnaismuuttujilla *ei ole* momenttiemäfunktiota. Momenttiemäfunktion

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

olemassaololla tarkoitetaan sitä, että odotusarvo

$$\mathrm{E}(e^{tX})$$

on *äärellinen*.

Esimerkki 1. Cauchy-jakauma.

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **Cauchy-jakaumaa**; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**. Tällöin satunnaismuuttujalla X ei ole momenttiemäfunktiota.

Huomautus:

- Cauchy-jakaumalla *ei ole momentteja* – ei edes *odotusarvoa*.

Diskreetin jakauman momenttiemäfunktio

Olkoon satunnaismuuttuja X **diskreetti** ja sen *pistetodennäköisyysfunktio*

$$f(x) = \Pr(X = x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X **momenttiemäfunktio** saadaan kaavalla

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

Luvussa **Diskreettejä jakaumia** johdetaan seuraavien diskreettien jakaumien momentti-emäfunktiot:

- **Diskreetti tasainen jakauma.**
- **Bernoulli-jakauma.**
- **Binomijakauma.**
- **Geometrinen jakauma.**

- **Negatiivinen binomijakauma.**
- **Poisson-jakauma.**

Jatkuvan jakauman momenttiemäfunktio

Olkoon satunnaismuuttuja *X* **jatkuva** ja sen *tiheysfunktio*

$$f(x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan *X* *momenttiemäfunktio* saadaan kaavalla

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Luvussa **Jatkuvia jakaumia** johdetaan seuraavien jatkuvien jakaumien momenttiemäfunktiot:

- **Jatkuva tasainen jakauma.**
- **Eksponenttijakauma.**
- **Normaalijakauma.**
- **Log-normaalijakauma.**
- **Gamma-jakauma.**
- **Beta-jakauma.**
- **Weibull-jakauma**.

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyys

Jos satunnaismuuttujan *X* momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

on olemassa jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä, **se on yksikäsitteinen ja määrää täysin satunnaismuuttujan *X* todennäköisyysjakauman**. Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että jos kahdella satunnaismuuttujalla *U* ja *V* on *sama* momenttiemäfunktio, niin ne noudattavat *samaa* jakaumaa.

Momenttiemäfunktion yksikäsitteisyyttä käytetään tavallisesti hyväksi seuraavalla tavalla: Haluamme määrätä satunnaismuuttujan *U* jakauman. Oletetaan, että voimme osoittaa, että satunnaismuuttujan *U* momenttiemäfunktio

$$m_U(t)$$

yhtyy pisteen $t = 0$ ympäristössä satunnaismuuttujan *V* momenttiemäfunktioon

$$m_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*. Tällöin *momenttiemäfunktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että* **satunnaismuuttuja *U* noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja *V***.

Momenttiemäfunktio ja satunnaismuuttujan momentit

Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio eli momentit generoiva funktio. Satunnaismuuttujan X **k. origomomentti**

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

saadaan määräämällä momenttiemäfunktion $m_X(t)$ k. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k) = \left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Perustelu:

Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio. Tällöin

$$\left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k}{dt^k}\mathrm{E}(e^{tX})\right|_{t=0} = \left.\mathrm{E}\left(\frac{d^k}{dt^k}e^{tX}\right)\right|_{t=0} = \left.\mathrm{E}(X^k e^{tX})\right|_{t=0} = \mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

Huomaa, että todistuksessa on oletettu implisiittisesti, että derivoinnin ja odotusarvon oton järjestystä saa vaihtaa.

■

Momenttiemäfunktio on saanut nimensä juuri tästä ominaisuudesta: Jos satunnaismuuttujalla on yksikäsitteinen momenttiemäfunktio, sen momentit saadaan määräämällä funktion derivaatat pisteessä $t = 0$.

Esimerkiksi satunnaismuuttujan X *odotusarvo* ja *varianssi* saadaan satunnaismuuttujan X kahdesta ensimmäisestä momentista α_1 ja α_2 (olettaen, että ne ovat olemassa) kaavoilla

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \alpha_1$$
$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Käytämme tätä hyväksi luvuissa **Diskreettejä jakaumia** ja **Jatkuvia jakaumia** johtamalla tavallisten diskreettien ja jatkuvien jakaumien odotusarvot ja varianssit niiden momenttiemäfunktioiden avulla.

Momenttiemäfunktion Taylorin sarjakehitelmä

Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio $m_X(t)$ voidaan kehittää *Taylorin sarjaksi*

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{E}(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\alpha_k$$

jossa

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

on satunnaismuuttujan X *k. momentti*.

Perustelu:

Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio. Kehitetään eksponenttifunktio e^{tX} *Taylorin sarjaksi*:

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}$$

Ottamalla tästä sarjakehitelmästä odotusarvo saadaan:

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \alpha_k$$

Huomaa, että todistuksessa on oletettu implisiittisesti, että äärettömän summan ja odotusarvon oton järjestystä saa vaihtaa.

■

Olkoon

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathrm{E}(X^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_j$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktion $m_X(t)$ *Taylorin sarjakehitelmä*. *Derivoidaan* sarjakehitelmä termeittäin t:n suhteen:

$$\frac{d^k m_X(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathrm{E}(X^{j+k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \alpha_{j+k} \text{ , } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Valitsemalla tässä $t = 0$, saadaan edellä esitetty tulos:

$$\left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \mathrm{E}(X^k) = \alpha_k \text{ , } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Huomaa, että olemme olettaneet implisiittisesti, että ääretön summa voidaan derivoida termeittäin.

Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen momenttiemäfunktio

Olkoon

$$m_X(t)$$

satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio ja olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja b ovat ei-satunnaisia vakioita.

Tällöin satunnaismuuttujan Y momenttiemäfunktio on

$$m_Y(t) = e^{at} m_X(bt)$$

Perustelu:

Momenttiemäfunktion määritelmästä seuraa, että

$$m_Y(t) = \mathrm{E}[e^{(a+bX)t}] = \mathrm{E}[e^{at}e^{bXt}] = e^{at}\,\mathrm{E}[e^{bXt}] = e^{at}m_X(bt)$$

■

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktiot ovat

$$m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$$

Tällöin *summan*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ momenttiemäfunktioiden tulo:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Perustelu:

Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktiot* ovat

$$m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Käytetään hyväksi sitä, että *riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on tulon tekijöiden odotusarvojen tulo*; ks. luvun **Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat** kappaletta **Kaksiulotteisten jakaumien odotusarvot**.

Siten

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathrm{E}[\exp(tX)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(t(X_1 + X_2 + \cdots + X_n))] \\ &= \mathrm{E}[\exp(tX_1 + tX_2 + \cdots + tX_n)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(tX_1)\exp(tX_2) \cdots \exp(tX_n)] \\ &= \mathrm{E}[\exp(tX_1)]\mathrm{E}[\exp(tX_2)] \cdots \mathrm{E}[\exp(tX_n)] \\ &= m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t) \end{aligned}$$

■

Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio

Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktio on

$$m(t)$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *summan*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on muotoa

$$m_X(t) = [m(t)]^n$$

Perustelu:

Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktio* on

$$m(t)$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevasta yleisestä tuloksesta seuraa välittömästi, että

$$m_X(t) = \mathrm{E}[\exp(tX)] = \underbrace{m(t)m(t)\cdots m(t)}_{n\ \text{kpl}} = [m(t)]^n$$

■

Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisen keskiarvon momenttiemäfunktio

Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktio on

$$m(t)$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *aritmeettisen keskiarvon*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

momenttiemäfunktio on muotoa

$$m_{\bar{X}}(t) = [m(t/n)]^n$$

Perustelu:

Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden *momenttiemäfunktio* on

$$m(t)$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Koska

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

niin satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen momenttiemäfunktiota ja riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktiota koskevista tuloksista seuraa, että

$$m_{\bar{X}}(t) = [m(t/n)]^n$$

■

Momenttiemäfunktioiden konvergenssi

Seuraavaa tulos on usein käyttökelpoinen, kun halutaan tutkia *satunnaismuuttujien jonojen konvergenssia*.

Olkoon

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

satunnaismuuttujien jono. Olkoot

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$$

vastaavat *kertymäfunktiot* ja

$$m_1(x), m_2(x), m_3(x), \ldots$$

vastaavat *momenttiemäfunktiot*. Olkoon lisäksi X satunnaismuuttuja, jonka *kertymäfunktio* on $F_X(x)$ ja *momenttiemäfunktio* on $M_X(t)$.

Oletetaan, että kaikille t jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä pätee, että

$$\lim_{i\to\infty} M_i(t) = M_X(t)$$

Tällöin

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F_X(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa kertymäfunktio $F_X(x)$ on jatkuva. Lisäksi momenttiemäfunktio $M_X(t)$ määrää tällöin kertymäfunktion $F_X(x)$ yksikäsitteisesti. Siten siitä, että momenttiemäfunktioiden jono konvergoi jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä, seuraa vastaavien kertymäfunktioiden konvergenssi.

Tässä tavattavaa konvergenssin muotoa kutsutaan **jakaumakonvergenssiksi**; lisätietoja satunnaismuuttujien jonojen konvergenssista: ks. **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

Esimerkki 2. Binomijakauma ja Poisson-jakauma.

Diskreetti satunnaismuuttuja X noudattaa *binomijakaumaa* parametrein n ja p, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ , } 0 < p < 1 \text{ , } x = 0,1,2,\ldots,n$$

Voidaan osoittaa, että binomijakauman momenttiemäfunktio on muotoa

$$m_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

Lisätietoja binomijakaumasta: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Diskreetti satunnaismuuttuja Y noudattaa *Poisson-jakaumaa* parametrilla λ, jos sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\,,\ \lambda > 0\,,\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

Voidaan osoittaa, että Poisson-jakauman momenttiemäfunktio on muotoa

$$m_Y(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Lisätietoja Poisson-jakaumasta: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

Olkoon nyt

$$\lambda = np$$

Tällöin binomijakauman momenttiemäfunktio voidaan kirjoittaa muotoihin

$$m_X(t) = \left[1 - p + pe^t\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n}(e^t - 1)(np)\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n}(e^t - 1)\lambda\right]^n$$

Eksponenttifunktion ominaisuuksista seuraa, että

$$m_X(t) \to m_Y(t)$$

jos $n \to \infty$.

Siten binomijakauma parametrein n ja p konvergoi kohti Poisson-jakaumaa parametrilla λ, jos

$$n \to \infty$$

ja

$$p \to 0$$

siten, että

$$np = \lambda$$

Huomatuksia:

- Tuloksen mukaan binomitodennäköisyyksiä voidaan *approksimoida* Poisson-todennäköisyyksillä, jos p on ”pieni” ja n on ”suuri”.
- Tulos johdetaan käyttämättä apuna momenttiemäfunktiota luvun **Diskreettejä jakaumia** kappaleessa **Poisson-jakauma**.

13.2. Karakteristinen funktio

Olkoon X *satunnaismuuttuja*. Tällöin odotusarvo

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,, \; i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X ja sen jakauman **karakteristinen funktio**. Huomaa, että satunnaismuuttujan *X karakteristinen funktio riippuu vain funktion argumentista t*.

Karakteristisen funktion olemassaolo

Karakteristinen funktio *on* – toisin kuin momenttiemäfunktio – *aina olemassa*.

Perustelu:

Karakteristisen funktion olemassaolo kaikille satunnaismuuttujille X seuraa siitä, että

$$\mathrm{E}(|e^{itX}|) = \mathrm{E}(1) = 1 < \infty$$

kaikille satunnaismuuttujille X. Todistuksessa on käytetty hyväksi sitä, että

$$e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$$

josta seuraa, että

$$|e^{itX}|^2 = \cos^2(tX) + \sin^2(tX) = 1$$

■

Inversioteoreema

Olkoon

$$F_X(x) = \Pr(X \le x)$$

satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* ja

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,, \; i = \sqrt{-1}$$

sen *karakteristinen funktio* ja oletetaan, että

$$(a - h, a + h)$$

sellainen reaaliakselin väli, että kertymäfunktio $F_X(x)$ on *jatkuva välin päätepisteissä*. Tällöin

$$F_X(a+h) - F_X(a-h) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} \frac{\sin(ht)}{t} e^{-ita} \varphi_X(t)\,dt$$

Jos jakauman *karakteristinen funktio tunnetaan, voidaan* jakauman *kertymäfunktio* (ainakin periaatteessa) *määrätä* inversioteoreemassa määritellyn rajaprosessin avulla. Myös *karakteristisen funktion yksikäsitteisyys* voidaan todistaa inversioteoreeman avulla.

Diskreetin satunnaismuuttujan karakteristinen funktio

Olkoon X **diskreetti** satunnaismuuttuja, jonka *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f_X(x) = \Pr(X = x)$$

Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f_X(x) \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan karakteristinen funktio

Olkoon X **jatkuva** satunnaismuuttuja, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio saadaan kaavalla

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio ja oletetaan, että

$$|\varphi_X(t)|$$

on *integroituva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$. Tällöin satunnaismuuttuja X on *jatkuva* ja sen *tiheysfunktio* $f_X(x)$ saadaan kaavalla

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)dt \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

Huomaa, että *jatkuvan satunnaismuuttujan X* karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)dx \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

on satunnaismuuttujan X tiheysfunktion **Fourier-muunnos** ja

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)dt \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

on sen **käänteinen Fourier-muunnos**.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyys

Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \text{ , } i = \sqrt{-1}$$

on yksikäsitteinen ja määrää täysin satunnaismuuttujan *X* todennäköisyysjakauman. Karakteristisen funktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että jos kahdella satunnaismuuttujalla U ja V on *sama* karakteristinen funktio, niin ne noudattavat *samaa* jakaumaa.

Karakteristisen funktion yksikäsitteisyyttä käytetään tavallisesti hyväksi seuraavalla tavalla: Haluamme määrätä satunnaismuuttujan U jakauman. Oletetaan, että voimme todistaa, että satunnaismuuttujan U karakteristinen funktio

$$\varphi_U(t)$$

yhtyy satunnaismuuttujan V karakteristiseen funktioon

$$\varphi_V(t)$$

jonka todennäköisyysjakauma *tunnetaan*. Tällöin *karakteristisen funktion yksikäsitteisyydestä seuraa, että* **satunnaismuuttuja *U* noudattaa samaa jakaumaa kuin satunnaismuuttuja *V*.**

Karakteristinen funktio ja momenttiemäfunktio

Jos satunnaismuuttujalla X on *momenttiemäfunktio*

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

niin satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,,\ i = \sqrt{-1}$$

saadaan momenttiemäfunktiosta $m_X(t)$ sijoituksella

$$t \to it \,,\ i = \sqrt{-1}$$

Karakteristisen funktion ominaisuudet

Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,,\ i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio. Tällöin:

(i) $\varphi_X(0) = \mathrm{E}(e^0) = \mathrm{E}(1) = 1$

(ii) $|\varphi_X(t)| \le 1$ kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

(iii) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi}_X(t)$

(iv) $\varphi_X(t)$ on *tasaisesti jatkuva* kaikille $t \in (-\infty, +\infty)$.

Kohdan (iii) merkintä $\overline{z}$ tarkoittaa kompleksiluvun

$$z = a + ib \,,\ i = \sqrt{-1}$$

konjugaattia eli

$$\overline{z} = a - ib$$

Karakteristinen funktio ja satunnaismuuttujan momentit

Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \,,\ i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio ja oletetaan, että satunnaismuuttujan X ***r*. (origo-) momentti**

$$\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$$

on olemassa. Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun r saakka* ja

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left. \frac{d^k \varphi_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}, \ i = \sqrt{-1}, \ k = 1, 2, \ldots, r$$

Oletetaan, että satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ on *differentioituva kertalukuun* r. Tällöin *momentit*

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k), \ k = 1, 2, \ldots, r$$

ovat olemassa, jos r on *parillinen* ja *momentit*

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k), \ k = 1, 2, \ldots, r-1$$

ovat olemassa, jos r on *pariton*.

Karateristisen funktion Taylorin sarjakehitelmä

Olkoon

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}), \ i = \sqrt{-1}$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio ja oletetaan, että satunnaismuuttujan X **r. origo-momentti**

$$\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$$

on olemassa.

Tällöin karakteristinen funktio $\varphi_X(t)$ voidaan kehittää **Taylorin sarjaksi**

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(it)^k}{k!} \mathrm{E}(X^k) + o(t^r) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(it)^k}{k!} \alpha_k + o(t^r)$$

jossa

$$o(t^r)/t^r \to 0, \ \text{jos } t \to 0$$

Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen karakteristinen funktio

Olkoon

$$\varphi_X(t)$$

satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio ja olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja b ovat ei-satunnaisia ja reaalisia vakioita. Tällöin satunnaismuuttujan Y karakteristinen funktio on

$$m_Y(t) = e^{iat} \varphi_X(bt)$$

Perustelu:

Karakteristisen funktion määritelmästä seuraa, että

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}[e^{i(a+bX)t}] = \mathrm{E}[e^{iat} e^{ibXt}] = e^{iat}\,\mathrm{E}[e^{ibXt}] = e^{iat} \varphi_X(bt)$$

■

Riippumattomien satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio

Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden *karakteristiset funktiot* ovat

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots , \varphi_n(t)$$

Tällöin **summan**

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

karakteristinen funktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ karakterististen funktioiden *tulo*:

$$\varphi_X(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) \cdots \varphi_n(t)$$

Tämä tulos voidaan todistaa samalla tavalla kuin vastaava tulos momenttiemäfunktioille.

Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien summan karakteristinen funktio

Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_n$$

riippumattomia ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden karakteristinen funktio on

$$\varphi(t)$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *summan*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

karakteristinen funktio on muotoa

$$\varphi_X(t) = [\varphi(t)]^n$$

Tämä tulos voidaan todistaa samalla tavalla kuin vastaava tulos momenttiemäfunktioille.

Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisen keskiarvon karakteristinen funktio

Olkoot

$$X_1, X_2, \dots , X_n$$

riippumattomia ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden karakteristinen funktio on

$$\varphi(t)$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots , X_n$ *aritmeettisen keskiarvon*

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

karakteristinen funktio on muotoa

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = [\varphi(t/n)]^n$$

Tämä tulos voidaan todistaa samalla tavalla kuin vastaava tulos momenttiemäfunktioille.

Karakterististen funktioiden konvergenssi

Olkoon

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

satunnaismuuttujien jono. Olkoot

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$$

vastaavat *kertymäfunktiot* ja

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots$$

vastaavat *karakteristiset* funktiot. Olkoon lisäksi X satunnaismuuttuja, jonka *kertymäfunktio* on $F_X(x)$ ja *karakteristinen* funktio on $\varphi_X(t)$.

Tällöin

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(t) = \varphi_X(t)$$

jos ja vain jos

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F_X(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa kertymäfunktio $F_X(x)$ on jatkuva.

Tässä tavattavaa konvergenssin muotoa kutsutaan **jakaumakonvergenssiksi**; lisätietoja satunnaismuuttujien jonojen konvergenssista: ks. **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

14. Satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Tarkastelemme tässä luvussa **satunnaismuuttujien muunnosten jakaumia**.

Yksiulotteisten satunnaismuuttujien tapauksessa käsitellään sekä **satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksien** että **yleisten monotonisten muunnosten jakaumia**. Ei-monotonisista muunnoksista käsitellään esimerkkinä normaalijakautuneen satunnaismuuttujan **toisen potenssin** jakaumaa.

Kaksiulotteisten satunnaismuunnosten tapauksessa käsittelemme sellaisia **satunnaismuuttujien muunnoksia**, **joilla on käänteismuunnos**. Sovelluksena esitetylle teorialle tarkastelemme mm. *riippumattomien satunnaismuuttujien* **summan** ja **osamäärän** jakaumia. Useampiulotteisista tilanteista käsittelemme *samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien* **minimin** ja **maksimin** jakaumia.

Esimerkkeinä johdamme mm. *tilastollisessa päättelyssä* keskeisten $\boldsymbol{\chi^2}$**-**, $\boldsymbol{F}$**-** ja $\boldsymbol{t}$**-jakaumien tiheysfunktiot**.

Avainsanat:

Boxin ja Müllerin muunnos, Cauchy-jakauma, Ei-monotoninen muunnos, Eksponenttijakauma, F-jakauma, Jacobin determinantti, Jatkuva tasainen jakauma, Kaksiulotteisten satunnaismuuttujan muunnos, χ^2-jakauma, Lineaarimuunnos, Maksimi, Minimi, Monotoninen muunnos, Muunnos, Normaalijakauma, Osamäärän jakauma, Summan jakauma, t-jakauma, Yhteisjakauma

14.1. Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma

Olkoon X *jatkuva satunnaismuuttuja*, jonka *tiheysfunktio* on

$$f_X(x)$$

Muodostetaan satunnaismuuttujan X *lineaarimuunnos* kaavalla

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat *vakioita*. Tällöin satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Perustelu:

Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio*

$$f_X(x)$$

ja olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat ei-satunnaisia *vakioita*. Määrätään satunnaismuuttujan Y *kertymäfunktio*, josta satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio* saadaan derivoimalla.

Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

Tapaus 1: $b < 0$

ja

Tapaus 2: $b > 0$

Tapaus 1: $b < 0$

Jos $b < 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(a + bX \leq y) &= \Pr\left(X \geq \frac{y-a}{b}\right)\\ &= 1 - \Pr\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right)\\ &= 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\end{aligned}$$

Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) = -\frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Tapaus 2: $b > 0$

Jos $b > 0$, satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *kertymäfunktio* on

$$F_Y(y) = \Pr(Y \le y) = \Pr(a + bX \le y) = \Pr\left(X \le \frac{y-a}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Derivoimalla satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) = \frac{1}{b}f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Tapauksien 1 ja 2 tiheysfunktioiden kaavaat voidaan yhdistää yhdeksi kaavaksi: Satunnaismuuttujan $Y = a + bX$ *tiheysfunktio* on

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|}f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

kaikille $b \neq 0$.

■

Yllä esitetyn mukaan satunnaismuuttujan X lineaarimuunnoksen $Y = a + bX$ jakauma *on aina samaa tyyppiä* kuin satunnaismuuttujan X jakauma.

Esimerkki 1. Tasainen jakauma.

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä (0,1) (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \quad \mathrm{Uniform}(0,1)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ , 0 \le x \le 1 \\ 0\ , \text{muulloin} \end{cases}$$

Olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b > 0$ ovat ei-satunnaisia *vakioita*. Satunnaismuuttujan Y tiheysfunktioksi saadaan

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, \ a \le y \le a + b \\ 0\ , \text{muulloin} \end{cases}$$

Siten satunnaismuuttuja Y noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä $(a, a + b)$:

$$Y \quad \mathrm{Uniform}(a, a+b)$$

Esimerkki 2. Standardoitu normaalijakauma.

Oletetaan, että satunnaismuuttuja Z noudattaa ns. **standardoitua normaalijakaumaa** (lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$Z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

Tällöin satunnaismuuttujan Z tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\}$$

Olkoon

$$X = \mu + \sigma Z$$

jossa μ ja $\sigma > 0$ ovat ei-satunnaisia *vakioita*. Satunnaismuuttujan X *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

joten X noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$:

$$X \quad \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Esimerkki 3. Normaalijakauma.

Oletetaan nyt, että satunnaismuuttuja X noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ (lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \quad \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

Olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa a ja $b \neq 0$ ovat ei-satunnaisia *vakioita*. Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{y-a-b\mu}{b\sigma} \right)^2 \right\}$$

joten Y noudattaa **normaalijakaumaa** parametrein $\mathrm{E}(X) = a + b\mu$ ja $\mathrm{Var}(X) = b^2\sigma^2$:

$$Y \quad \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Yleistämme tässä kappaleessa esitetyn teorian seuraavassa kappaleessa koskemaan kaikkia *monotonisia muunnoksia*.

14.2. Satunnaismuuttujan monotonisen muunnoksen jakauma

Olkoon satunnaismuuttujan X *jakauman* tiheysfunktio

$$f_X(x)$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$U = h(X)$$

jossa muunnos

$$u = h(x)$$

on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva*. Tällöin satunnaismuuttujan U **tiheysfunktio** saadaan kaavalla

$$f_U(u) = f_X(h^{-1}(u))\left|\frac{dh^{-1}(u)}{du}\right|$$

Perustelu:

Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio*

$$f_X(x)$$

ja olkoon

$$Y = h(X)$$

jossa h on *aidosti monotoninen* ja *jatkuvasti derivoituva* funktio. Muodostetaan satunnais- muuttujan *Y kertymäfunktio*, josta satunnaismuuttujan *Y tiheysfunktio* saadaan derivoimalla.

Jaetaan tarkastelu *kahteen osaan*:

Tapaus 1: Funktio h on *aidosti vähenevä*.

ja

Tapaus 2: Funktio h on *aidosti kasvava*.

Tapaus 1: Funktio h on *aidosti vähenevä*.

Koska funktio h oletettiin aidosti väheneväksi, sillä on *käänteisfunktio* h^{-1}, joka myös on aidosti vähenevä. Siten satunnaismuuttujan *Y kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned}F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(h(X) \le y)\\ &= \Pr(h^{-1}(h(X)) \ge h^{-1}(y))\\ &= \Pr(X \ge h^{-1}(y))\\ &= 1 - \Pr(X \le h^{-1}(y))\\ &= 1 - F_X(h^{-1}(y))\end{aligned}$$

Derivoimalla satunnaismuuttujan Y kertymäfunktion lauseke saadaan satunnais- muuttujan *Y tiheysfunktioksi*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X(h^{-1}(y)) = -f_X(h^{-1}(y))\left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right)$$

Koska funktion h käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti väheneväksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} < 0$$

Siten voimme kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

Tapaus 2: Funktio *h* on *aidosti kasvava*.

Koska funktio *h* oletettiin *aidosti kasvavaksi*, sillä on *käänteisfunktio* h^{-1}, joka myös on aidosti kasvava. Siten satunnaismuuttujan *Y kertymäfunktio* on

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(h(X) \le y) \\
&= \Pr(h^{-1}(h(X)) \le h^{-1}(y)) \\
&= \Pr(X \le h^{-1}(y)) \\
&= F_X(h^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

Derivoimalla satunnaismuuttujan *Y* kertymäfunktion lauseke saadaan satunnaismuuttujan *Y tiheysfunktioksi*

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(h^{-1}(y)) = f_X(h^{-1}(y))\left(\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right)$$

Koska funktion *h* käänteisfunktio h^{-1} oletettiin aidosti kasvavaksi, niin

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} > 0$$

Siten voimme kirjoittaa:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

Tapauksien 1 ja 2 tiheysfunktioiden kaavat voidaan yhdistää yhdeksi kaavaksi: Satunnaismuuttujan $Y = h(X)$ *tiheysfunktio* on

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$$

■

Seuraavassa näytetään, että edellisessä kappaleessa esitetty *satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakaumaa koskeva tulos saadaan erikoistapauksena tässä kappaleessa käsitellystä satunnaismuuttujan monotonisen muunnoksen jakaumaa koskevasta tuloksesta*.

Lineaarimuunnoksen jakauma

Olkoon *jatkuvan satunnaismuuttujan X tiheysfunktio* $f_X(x)$ ja olkoon

$$Y = a + bX$$

jossa *a* ja $b \neq 0$ ovat ei-satunnaisia *vakioita*. Tällöin

$$y = h(x) = a + bx\,,\ b \neq 0$$

$$x = h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$$

$$\frac{dh(x)}{dx} = b$$

joten

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{|b|} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

Cauchy-jakauma

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa **jatkuvaa tasaista jakaumaa** välillä $(-\pi/2,+\pi/2)$ (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$X \quad \text{Uniform}(-\pi/2,+\pi/2)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le +\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \;, \text{muulloin} \end{cases}$$

Muodostetaan satunnaismuuttujan X *muunnos*

$$Y = \tan(X)$$

Satunnaismuuttujan Y *tiheysfunktio* on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

Satunnaismuuttujan Y jakaumaa kutsutaan **Cauchy-jakaumaksi** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**).

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä $(-\pi/2,+\pi/2)$, jolloin sen tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, -\dfrac{\pi}{2} \le x \le +\dfrac{\pi}{2} \\ 0 \;, \text{muulloin} \end{cases}$$

Olkoon

$$Y = h(X) = \tan(X)$$

Muunnos

$$y = h(x) = \tan(x)$$

on *aidosti kasvava* ja sen käänteismuunnoksen

$$x = h^{-1}(y) = \arctan(y)$$

derivaatta on

$$\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\arctan(y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

Siten satunnaismuuttujan $Y = \tan(X)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

mikä on **Cauchy-jakauman** tiheysfunktio.

■

Voidaan osoittaa, että Cauchy-jakauma on sama kuin ***t*-jakauma yhdellä vapausasteella** (lisätietoja *t*-jakaumasta: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**).

Huomautus:

- Cauchy-jakaumalla *ei ole momentteja* – ei edes *odotusarvoa*.

14.3. Satunnaismuuttujan ei-monotonisten muunnosten jakaumat

Ei ole mahdollista esittää yleistä ei-monotonisen muunnoksen jakaumaa ja sen tiheysfunktiota koskevaa tulosta. Siten ei-monotonisten muunnosten jakaumien tarkastelu joudutaan tekemään tapauskohtaisesti.

Tarkastellaan seuraavassa esimerkkinä **χ^2(1)-jakauman** (lisätietoja χ^2(1)-jakaumasta; ks. luvun **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion johtoa*.

χ^2(1)-jakauman tiheysfunktio

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \quad \mathrm{N}(0,1)$$

Tällöin satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on muotoa

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = X^2$$

Tällöin satunnaismuuttuja Y noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa yhdellä vapausasteella**:

$$Y \sim \chi^2(1)$$

Satunnaismuuttujan Y **tiheysfunktio** on

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}$$

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttuja X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X \quad \mathrm{N}(0,1)$$

χ^2-jakauman määritelmän mukaan

$$Y = X^2 \sim \chi^2(1)$$

Olkoon $\Phi(\cdot)$ standardoidun normaalijakauman N(0,1) *kertymäfunktio*.

Satunnaismuuttujan $Y = X^2$ *kertymäfunktio* on

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \Pr(Y \le y) &= \Pr(X^2 \le y) \\ &= \Pr(|X| \le \sqrt{y}) \\ &= \Pr(-\sqrt{y} \le X \le +\sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{aligned}$$

Standardoidun normaalijakauman N(0,1) tiheysfunktio on

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

jossa $\Phi(\cdot)$ on standardoidun normaalijakauman N(0,1) kertymäfunktio.

Siten satunnaismuuttujan $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ *tiheysfunktioksi* saadaan

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[2\Phi(\sqrt{y}) - 1\right] = \Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

■

Kappaleessa **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma** johdetaan χ^2-jakauman tiheysfunktion lauseke, kun jakauman vapausasteiden lukumäärä $n > 1$.

14.4. Kaksiulotteisten satunnaismuuttujien muunnosten jakaumat

Olkoon satunnaismuuttujien X ja Y *yhteisjakauman* tiheysfunktio

$$f_{XY}(x,y)$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = g(X,Y)$$

$$V = h(X,Y)$$

Oletetaan, että muunnoksella

$$(*) \qquad \begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$$

on seuraavat ominaisuudet:

(i) Muuttujat x ja y *voidaan ratkaista yksikäsitteisesti* yhtälöryhmästä $(*)$.

(ii) Funktioilla g ja h on *jatkuvat osittaisderivaatat* muuttujien x ja y suhteen.

(iii) Muunnoksen $(*)$ *Jacobin determinantti*

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \ne 0$$

kaikille x ja y, joille

$$f_{XY}(x,y) \ne 0$$

Tällöin satunnaismuuttujien U ja V **yhteisjakauman tiheysfunktio** saadaan kaavasta

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

jossa x ja y ratkaistaan yhtälöryhmästä $(*)$.

Normaalijakautuneiden satunnaislukujen generointi

Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) välillä (0,1):

$$X \sim \text{Uniform}(0,1)\ ,\ Y \sim \text{Uniform}(0,1)\ ,\ X \perp Y$$

Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktiot ovat muotoa

$$f_X(x) = \begin{cases} 1\ ,\ 0 \le x \le 1 \\ 0\ ,\ \text{muulloin} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0\ ,\ \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$
$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

Tällöin satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia* ja noudattavat ns. **standardoitua normaalijakaumaa** (lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**):

$$U \sim \text{N}(0,1)\ ,\ V \sim \text{N}(0,1)\ ,\ U \perp V$$

Satunnaismuuttujien U ja V tiheysfunktiot ovat muotoa

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}$$

$$f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}$$

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja noudattavat *jatkuvaa tasaista jakaumaa* välillä (0,1):

$$X \sim \text{Uniform}(0,\ 1)\ ,\ Y \sim \text{Uniform}(0,\ 1)\ ,\ X \perp Y$$

Olkoot

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$
$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

Tarkastellaan *yhtälöryhmää*

$$(*)\qquad \begin{cases} u = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \\ v = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)} \end{cases}$$

Yhtälöryhmän (∗) *ratkaisut* muuttujien x ja y suhteen saadaan yhtälöistä

$$\begin{cases} \cos(2\pi x) = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ \sin(2\pi x) = \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ y = \exp\left\{-\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)\right\} \end{cases}$$

Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left[-2\pi\sin(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\times\left[\frac{-\sin(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$-\left[2\pi\cos(2\pi x)\sqrt{-2\log(y)}\right]\times\left[\frac{-\cos(2\pi x)}{y\sqrt{-2\log(y)}}\right]$$

$$= \frac{2\pi}{y}$$

Koska $y > 0$, niin

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* on muotoa

$$f_{XY}(x, y) = 1 \,,\ 0 < x < 1 \,,\ 0 < y < 1$$

Siten satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \frac{y}{2\pi} \,,\ 0 < x < 1 \,,\ 0 < y < 1$$

Sijoittamalla tähän x ja y lausuttuna muuttujien u ja v funktiona saadaan

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}$$

Nyt

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}$$

$$(**) \qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}$$

$$= f_U(u)\,f_V(v)$$

jossa $f_U(u)$ ja $f_V(v)$ ovat standardoidun normaalijakauman N(0,1) tiheysfunktioita.

Koska satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktio on voitu esittää satunnaismuuttujien U ja V reunajakaumien tiheysfunktioiden tulona, niin satunnaismuuttujat U ja V ovat *riippumattomia*.

■

Muunnosta

$$U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

$$V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\log(Y)}$$

on tapana kutsua **Boxin ja Müllerin muunnokseksi**. Boxin ja Müllerin muunnos tarjoaa erään keinon *generoida normaalijakautuneita satunnaislukuja* tasaista jakaumaa välillä (0,1) noudattavista satunnaisluvuista.

14.5. Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma

Olkoot X ja Y *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joiden *tiheysfunktiot* ovat

$$f_X(x) \text{ ja } f_Y(y)$$

Tällöin **summan**

$$U = X + Y$$

tiheysfunktio on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(u-x)\,f_X(x)\,dx$$

Perustelu:

Koska satunnaismuuttujat X ja Y on oletettu *riippumattomiksi*, niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x,y)$ voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktioiden tulona:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

Olkoot

$$U = X + Y$$

$$V = X$$

Muodostetaan satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauma*.

Tarkastellaan siksi muunnosta

(∗) $$\begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases}$$

jonka käänteismuunnos on

$$\begin{cases} y = u - v \\ x = v \end{cases}$$

Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 1\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1 \neq 0$$

Siten satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = f_X(x)f_Y(y)\,|-1| = f_X(v)f_Y(u-v)$$

Summan $U = X + Y$ tiheysfunktio saadaan satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktion lausekkeesta satunnaismuuttujan U *reunajakauman* tiheysfunktiona:

$$f_u(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)f_Y(u-v)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx$$

■

χ^2(*n*)-jakauman tiheysfunktio

Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena **χ^2-jakauman** (lisätietoja: ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{N}(0,1)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Tällöin satunnaismuuttujien X_i tiheysfunktiot ovat muotoa

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

Satunnaismuuttuja Y_n noudattaa χ^2-jakauman määritelmän mukaan **χ^2-jakaumaa *n*:llä vapausasteella**:

$$Y_n \sim \chi^2(n)$$

Satunnaismuuttujan Y_n **tiheysfunktio** on

$$f_n(y) = C_n\, y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Normeerausvakio C_n saadaan kaavasta

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gamma-funktio*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

Gamma-funktiolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!\,,\ n \in$

(iii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Satunnaismuuttujan Y_n jakaumaa koskevan tuloksen perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$X_1, X_2, \ldots, X_n$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$

$X_i \sim \mathrm{N}(0,1)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Tällöin

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

Käytetään satunnaismuuttujan Y_n tiheysfunktion lausekkeen

$$f_n(y) = C_n\, y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

jossa

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

perustelemiseen *induktiota* ja yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakaumalle.

Olkoon $n = 1$.

Olemme todenneet kappaleessa **Satunnaismuuttujan ei-monotonisten muunnosten jakaumat**, että

$$Y_1 = X_1^2 \quad \chi^2(1)$$

ja satunnaismuuttujan Y_1 *tiheysfunktio* on

$$f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Koska

$$C_1 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee, kun $n = 1$.

Tarkastellaan ennen yleisen induktioaskeleen tekemistä tapausta $n = 2$.

Olkoon $n = 2$.

Koska satunnaismuuttujat X_1 ja X_2 on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat X_1^2 ja X_2^2 ovat riippumattomia.

Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \quad \chi^2(2)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z) f_1(z)dz = C_2' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} dz$$

$$= C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

jossa C_2' on muuttujan y suhteen vakio.

Sijoituksella

$$z = yt$$

integraali

$$f_2(y) = C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

voidaan muokata muotoon

$$f_2(y) = C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{-\frac{1}{2}} ydt = C_2' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = C_2 e^{-\frac{1}{2}y}$$

jossa

$$C_2 = C_2' \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

on muuttujan y suhteen vakio. Siten satunnaismuuttujan

$$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \qquad \chi^2(2)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n\, y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee, kun $n = 2$.

Yleinen induktio-askel $n - 1 \rightarrow n$.

Induktio-oletus: Satunnaismuuttujan

$$Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 \qquad \chi^2(n-1)$$

tiheysfunktio on

$$f_{n-1}(y) = C_{n-1} y^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

Koska satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on oletettu riippumattomiksi, myös satunnaismuuttujat $Y_{n-1} = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2$ ja X_n^2 ovat riippumattomia.

Siten voimme soveltaa satunnaismuuttujaan

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n-1}^2 + X_n^2 \qquad \chi^2(n)$$

riippumattomien satunnaismuuttujien summan tiheysfunktion kaavaa:

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-z) f_{n-1}(z)\, dz = C_n' \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y-z)} z^{\frac{1}{2}(n-1)-1} e^{-\frac{1}{2}z} dz \\ &= C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz \end{aligned}$$

jossa C' on muuttujan y suhteen vakio.

Sijoituksella

$$z = yt$$

integraali

$$f_n(y) = C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dz$$

voidaan muokata muotoon

$$\begin{aligned} f_n(y) &= C_n' e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (y-yt)^{-\frac{1}{2}} (yt)^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} y\, dz = C_n' y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt \\ &= C_n\, y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

jossa

$$C_n = C_n' \int_0^{\infty} (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}} dt$$

on muuttujan y suhteen vakio.

Yhdistämällä edelliset tulokset nähdään, että satunnaismuuttujan

$$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \quad \chi^2(n)$$

tiheysfunktion lauseke

$$f_n(y) = C_n \, y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

pätee kaikille n = 1, 2, 3, …

Määrätään vielä *normeerausvakio* C_n .

Todetaan ensin, että tiheysfunktio f_n toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\int_0^{\infty} f_n(y)\,dy = C_n \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy = 1$$

Sijoituksella

$y = 2t$

tämä integraali voidaan muokata muotoon

$$2^{\frac{1}{2}n} C_n \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}n-1} e^{-t} dt = 1$$

Siten normeerausvakion C_n arvoksi saadaan

$$C_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gammafunktio*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

■

14.6. Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakauma

Olkoot X ja Y *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joiden *tiheysfunktiot* ovat

$f_X(x)$ ja $f_Y(y)$

Tällöin **osamäärän**

$U = X / Y$

tiheysfunktio on

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(uy) f_Y(y) dy$$

Perustelu:

Koska satunnaismuuttujat X ja Y on oletettu *riippumattomiksi*, niiden *yhteisjakauman tiheysfunktio* $f_{XY}(x,y)$ voidaan esittää satunnaismuuttujien X ja Y tiheysfunktioiden tulona:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Olkoot

$$U = X / Y$$

$$V = Y$$

Muodostetaan satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauma*.

Tarkastellaan siksi muunnosta

$$(*) \qquad \begin{cases} u = x / y \\ v = y \end{cases}$$

jonka käänteismuunnos on

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

Muunnoksen (∗) *Jacobin determinantti* on

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot 1 - \left(-\frac{x}{y^2} \right) \cdot 1 = 1 / y \neq 0$$

Siten satunnaismuuttujien U ja V *yhteisjakauman tiheysfunktio* on

$$f_{UV}(u,v) = f_{XY}(x,y) \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|^{-1} = f_X(x) f_Y(y) y = v f_X(uv) f_Y(v)$$

Osamäärän $U = X / Y$ tiheysfunktio saadaan satunnaismuuttujien U ja V yhteisjakauman tiheysfunktion lausekkeesta satunnaismuuttujan U *reunajakauman* tiheysfunktiona:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{UV}(u,v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_X(uv) f_Y(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(uy) f_Y(y) dy$$

■

F-jakauman tiheysfunktio

Tarkastellaan riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumaa koskevan yleisen tuloksen sovelluksena ***F*-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_m ; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

$X_1, X_2, \ldots , X_m \,;\, Y_1, Y_2, \ldots , Y_n \perp$

$X_i \sim \mathrm{N}(0, 1)\,,\; i = 1, 2, \ldots , m$

$Y_i \sim \mathrm{N}(0, 1)\,,\; i = 1, 2, \ldots , n$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2$$
$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2$$

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia* ja χ^2-jakauman määritelmän mukaan X noudattaa *χ^2-jakaumaa m*:llä vapausasteella ja Y noudattaa *χ^2-jakaumaa n*:llä vapausasteella:

$$X \perp Y$$
$$X \quad \chi^2(m)$$
$$Y \quad \chi^2(n)$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$F = \frac{X/m}{Y/n} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

Satunnaismuuttuja F noudattaa F-jakauman määritelmän mukaan ***F*-jakaumaa vapausastein *m* ja *n***:

$$F \sim F(m, n)$$

Satunnaismuuttujan F **tiheysfunktio** on

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gamma-funktio*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Gamma-funktiolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!\,,\; n \in$

(iii) $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Satunnaismuuttujan *F* jakaumaa koskevan tuloksen perustelu:

Olkoon

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \quad \chi^2(m)\,,\, Y \quad \chi^2(n)\,,\, X \perp Y$$

Tällöin

$$F \sim F(m,\, n)$$

Käytetään satunnaismuuttujan F tiheysfunktion lausekkeen

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

perustelemiseen yleistä tulosta riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän jakaumalle.

Määritellään satunnaismuuttuja

$$Z = \frac{X}{Y}$$

jossa

$$X \quad \chi^2(m)\,,\, Y \quad \chi^2(n)\,,\, X \perp Y$$

$\chi^2(k)$-jakauman tiheysfunktio on muotoa (ks. tämän luvun kappaletta **Riippumattomien satunnaismuuttujien summan jakauma**):

$$f_k(y) = C_k y^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$C_k = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}k}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien osamäärän tiheysfunktion kaavan mukaan satunnais-muuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktio on

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(zy) f_Y(y)dy = C_m C_n \int_0^\infty y(zy)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}zy} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} dy$$

$$= C_m C_n \int_0^\infty y(zy)^{\frac{m}{2}-1} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1+z)y} dy$$

Kun tässä integraalissa tehdään sijoitus

$$(1+y)z = t$$

saadaan

$$f_Z(z) = C_m C_n \int_0^\infty \frac{t}{1+z}\left(z\frac{t}{1+z}\right)^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{t}{1+z}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t}\frac{1}{1+z}dt$$

$$= C_m C_n\, z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

Satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktion lausekkeen

$$f_Z(z) = C_m C_n z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integraalin

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

integroitava on $\chi^2(m + n)$-jakauman tiheysfunktion *ydin*. Siten

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(m+m)-1} e^{-\frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{C_{m+n}}$$

Sijoittamalla vakioiden

C_m , C_m ja C_{m+n}

lausekkeet paikoilleen saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktioksi

$$f_Z(z) = \frac{C_m C_n}{C_{m+n}} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} z^{\frac{m}{2}-1}(1+z)^{-\frac{m+n}{2}}$$

Satunnaismuuttujan

$$F = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{Y} \quad F(m,n)$$

saadaan satunnaismuuttujan $Z = X/Y$ tiheysfunktiosta *lineaarimuunnoksella*

$$F = \frac{n}{m} Z$$

Soveltamalla satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen tiheysfunktion kaavaa (ks. tämän luvun kappaletta **Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen jakauma**) satunnaismuuttujaan Z jakauman $F(m, n)$ tiheysfunktioksi saadaan lopulta:

$$f_F(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}-1} \left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

■

t-jakauman tiheysfunktio

Tarkastellaan ***t*-jakauman** (ks. lukua **Normaalijakaumasta johdettuja jakaumia**) *tiheysfunktion lausekkeen johtoa*.

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

X ; Y_1, Y_2, … , Y_n

ovat *riippumattomia* ja noudattavat *standardoitua normaalijakaumaa*:

X_1 ; Y_1, Y_2, … , Y_n ⊥

$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$

$Y_i \sim \mathrm{N}(0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$Y = Y_1^2 + Y_2^2 + \mathrm{L} + Y_n^2$$

Satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, X noudattaa *standardoitua normaalijakaumaa* ja χ^2-jakauman määritelmän mukaan Y noudattaa χ^2*-jakaumaa* n:llä vapausasteella:

$X \perp Y$

$X \quad \mathrm{N}(0,1)$

$Y \quad \chi^2(n)$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

Satunnaismuuttuja t noudattaa t-jakauman määritelmän mukaan ***t*-jakaumaa vapausastein *n***:

$t \sim t(n)$

Satunnaismuuttujan t **tiheysfunktio** on

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

jossa $\Gamma(\cdot)$ on *Eulerin gamma-funktio*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Gamma-funktiolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)!\,,\ n \in$

(iii) $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Satunnaismuuttujan *t* jakaumaa koskevan tuloksen perustelu:

Olkoon

$$t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} = \sqrt{n} \cdot \frac{X}{\sqrt{Y}}$$

jossa

$X \quad \mathrm{N}(0,1)\,,\ Y \quad \chi^2(n)\,,\ X \perp Y$

Käytetään satunnaismuuttujan t tiheysfunktion lausekkeen

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

perustelemisessa hyväksi sitä, että

$$t^2 \sim F(1, n)$$

Jakauman $F(1, n)$ tiheysfunktio on edellä esitetyn mukaan

$$f_F(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}-1} \left(1 + \frac{1}{n} z\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{1}{n} z\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Koska

$$t = \sqrt{F}$$

jossa

$$F \sim F(1, n)$$

pätee seuraava tulos, kun $y > 0$:

$$\begin{aligned}
\Pr(0 \le t \le y) &= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le |t| \le y) \\
&= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le t^2 \le y^2) \\
&= \tfrac{1}{2}\Pr(0 \le F \le y^2) \\
&= \tfrac{1}{2}F_F(y^2)
\end{aligned}$$

jossa F_F on jakauman $F(1, n)$ *kertymäfunktio*. Derivoimalla yhtälö

$$\Pr(0 \le t \le y) = \tfrac{1}{2}F_F(y^2)$$

saadaan satunnaismuuttujan t tiheysfunktioksi, kun $y > 0$:

$$f_t(y) = y f_F(y^2)$$

Siten jakauman $t(n)$ tiheysfunktioksi saadaan lopulta

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{n} y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

■

14.7. Riippumattomien satunnaismuuttujien minimin ja maksimin jakaumat

Riippumattomien satunnaismuuttujien minimin jakauma

Olkoot satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

riippumattomia ja *samaa jakaumaa* noudattavia satunnaismuuttujia ja olkoon satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yhteinen *tiheysfunktio*

$$f(x)$$

ja yhteinen *kertymäfunktio*

$$F(x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

tiheysfunktio on

$$f_{(1)}(x) = n[1-F(x)]^{n-1} f(x)$$

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

ovat riippumattomia ja noudattavat samaa jakaumaa, jonka kertymäfunktio on $F(x)$:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Olkoon

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää*, *komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavaa* ja satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

kertymäfunktioksi $F_{(1)}(x)$ saadaan:

$$\begin{aligned}
F_{(1)}(x) &= \Pr(X_{(1)} \le x) \\
&= 1 - \Pr(X_{(1)} > x) \\
&= 1 - \Pr(X_1 > x \text{ ja } X_2 > x \text{ ja } \ldots \text{ ja } X_n > x) \\
&= 1 - \Pr(X_1 > x)\Pr(X_2 > x) \cdots \Pr(X_n > x) \\
&= 1 - [1-\Pr(X_1 \le x)][1-\Pr(X_2 \le x)] \cdots [1-\Pr(X_n \le x)] \\
&= 1 - [1-F(x)][1-F(x)] \cdots [1-F(x)] \\
&= 1 - [1-F(x)]^n
\end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \dots, X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) &= \frac{d}{dx}\{1-[1-F(x)]^n\} \\ &= -n[1-F(x)]^{n-1}[-F'(x)] \\ &= n[1-F(x)]^{n-1} f(x) \end{aligned}$$

■

Esimerkki 1. Samaa eksponenttijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien minimin jakauma.

Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \ \perp$$

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)\ ,\ i = 1, 2, \dots, n$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_n$ *kertymäfunktio* on muotoa

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

ja niiden *tiheysfunktio* on muotoa

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Edellä esitetyn mukaan satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *kertymäfunktio* on

$$F_{(1)}(x) = 1-[1-F(x)]^n = 1-[1-(1-e^{-\lambda x})]^n = 1-e^{-n\lambda x}$$

ja satunnaismuuttujan $X_{(1)}$ *tiheysfunktio* on

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}(1-e^{-n\lambda x}) = n\lambda e^{-n\lambda x}$$

Siten *samaa* eksponenttijakaumaa $\mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattavien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_n$ *minimi* $X_{(1)}$ *noudattaa* **eksponenttijakaumaa** parametrinaan $n\lambda$:

$$X_{(1)} \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$$

Riippumattomien satunnaismuuttujien maksimin jakauma

Olkoot satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots , X_n$$

riippumattomia ja *samaa jakaumaa* noudattavia satunnaismuuttujia ja olkoon satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_n$ yhteinen *tiheysfunktio*

$$f(x)$$

ja yhteinen *kertymäfunktio*

$$F(x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots , X_n\}$$

tiheysfunktio on

$$f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots , X_n$$

ovat riippumattomia ja noudattavat samaa jakaumaa, jonka kertymäfunktio on $F(x)$:

$$X_1, X_2, \ldots , X_n \perp$$

$$X_i \sim F(x) \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

Olkoon

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots , X_n\}$$

Soveltamalla *kertymäfunktion määritelmää* ja satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_n$ *riippumattomuutta* satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots , X_n\}$$

kertymäfunktioksi saadaan:

$$\begin{aligned} F_{(n)}(x) &= \Pr(X_{(n)} \le x) \\ &= \Pr(X_1 \le x \ ja\ X_2 \le x \ ja \ldots ja\ X_n \le x) \\ &= \Pr(X_1 \le x)\Pr(X_2 \le x) \cdots \Pr(X_n \le x) \\ &= F(x)F(x) \cdots F(x) \\ &= [F(x)]^n \end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujat $X_1, X_2, \ldots , X_n$ ovat *jatkuvia* ja niiden tiheysfunktio on

$$f(x) = F'(x)$$

Tällöin satunnaismuuttujan

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots , X_n\}$$

tiheysfunktio saadaan derivoimalla satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ kertymäfunktion lauseke:

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]^n = n[F(x)]^{n-1}F'(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

■

Esimerkki 2. Samaa eksponenttijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien maksimin jakauma.

Oletetaan, että riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

noudattavat *samaa* **eksponenttijakaumaa** (lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**) parametrinaan λ:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Tällöin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kertymäfunktio* on muotoa

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

ja niiden *tiheysfunktio* on muotoa

$$f(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

Edellä esitetyn mukaan satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *kertymäfunktio* on

$$F_{(n)}(x) = [F(x)]^n = (1 - e^{-\lambda x})^n$$

ja satunnaismuuttujan $X_{(n)}$ *tiheysfunktio* on

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-\lambda x})^n = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$$

Siten *samaa* eksponenttijakaumaan Exp(λ) noudattavien satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *maksimi* $X_{(n)}$ *ei noudata mitään tavanomaista jakaumaa* toisin kuin niiden *minimi* $X_{(1)}$, joka *noudattaa eksponenttijakaumaa* parametrinaan $n\lambda$; ks. tämän kappaleen esimerkkiä 1.

15. Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet

Tarkastelemme tässä luvussa **stokastiikan konvergenssikäsitteitä** ja **raja-arvolauseita**.

Stokastiikan raja-arvolauseilla on keskeinen merkitys *teoreettisessa tilastotieteessä* tilanteissa, joissa on tarpeen tutkia *otossuureiden* ja *todennäköisyysjakauman parametrien estimaattoreiden käyttäytymistä*, kun *otoskoon annetaan kasvaa rajatta*; lisätietoja: ks. monistetta **Tilastolliset menetelmät**.

Todistamme tässä luvussa sekä (heikon) **suurten lukujen lain** että **keskeisen raja-arvolauseen**.

Avainsanat:

Approksimatiivinen jakauma, Aritmeettinen keskiarvo, Jakaumakonvergenssi, Kertymäfunktio, Keskeinen raja-arvolause, Konvergenssikäsitteet, Kvadraattinen konvergenssi, Melkein varma konvergenssi, Normaalijakauma, Odotusarvo, Standardipoikkeama, Standardointi, Stokastinen konvergenssi, Summan jakauma, Suurten lukujen laki, Varianssi, Varma konvergenssi

15.1. Satunnaismuuttujien jonot

Olemme määritelleet **satunnaismuuttujan** luvun **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat** kappaleessa **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat: Määritelmät** seuraavalla tavalla:

Olkoon

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

todennäköisyyskenttä ja olkoon X (mitallinen) *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon:

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Tällöin sanomme, että funktio X on **satunnaismuuttuja**.

Jos haluamme erityisesti korostaa sitä, että satunnaismuuttuja on *otosavaruuden S kuvaus reaalilukujen joukkoon*, merkitsemme

$$X(s) \in \mathbb{R} \text{ , } s \in S$$

Huomaa, että vaikka *satunnaismuuttuja* on *funktiona* täysin *määrätty*, niin *sattuma määrää* mikä funktion arvoista *realisoituu*. Satunnaismuuttuja *kuvaa* satunnaisilmiön *tulosvaihtoehtoja numeerisessa muodossa* ja liittää siten jokaiseen satunnaisilmiön *tulosvaihtoehtoon reaaliluvun* (*numeerisen koodin*).

Tarkastelemme tässä luvussa satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

muodostamia **jonoja** ja niiden *konvergenssia*.

On syytä huomata, että satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostamat jonot *eivät ole* lukujonoja tavanomaisessa mielessä, vaan jokainen satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostama jono on itse asiassa *lukujonojen joukko*.

Tämä nähdään siitä, että satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ muodostamassa jonossa *jokaiseen* otosavaruuden alkioon $s \in S$ liittyy lukujono

$$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \ldots$$

Lukujono

$$X_1(s), X_2(s), X_3(s), \ldots$$

voi *konvergoida*, kun

$$s \in A \subset S$$

ja *hajaantua*, kun

$$s \in A^c \subset S$$

Tämä havainto muodostaa toisen lähtökohdan todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteiden tarkastelulle. Toisen lähtökohdan muodostaa satunnaismuuttujiin $X_1, X_2, X_3, \ldots$ liittyvien *jakaumien konvergenssin* tarkastelu.

15.2. Varma konvergenssi

Satunnaismuuttujien

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

muodostama jono **konvergoi varmasti** kohti satunnaismuuttujaa X, jos

$$\lim_{i\to\infty} X_i(s) = X(s) \text{, kaikille } s \in S$$

Huomautus:

- Todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä varma konvergenssi on konvergenssin muotona tavallisesti aivan liian rajoittava ja sitä käytetään siksi hyvin harvoin satunnaismuuttujien jonojen rajakäyttäytymisen tutkimiseen.

15.3. Melkein varma konvergenssi

Satunnaismuuttujien

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

muodostama jono **konvergoi melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujaa X, jos

$$\Pr(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

Merkitään tätä:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad \text{(a.s.)}$$

tai

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} X$$

jossa

a.s. = *<u>a</u>lmost <u>s</u>urely*

Jos satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ jono *konvergoi melkein varmasti* kohti satunnaismuuttujaa X, *niiden otosavaruuden S pisteiden joukko, jossa konvergenssia ei tapahdu on nollamittainen*:

$$\Pr(s \in S \mid \lim_{n\to\infty} X_n(s) \neq X(s)) = 0$$

Esimerkki. Melkein varma konvergenssi.

Liitetään *otosavaruuden*

$S = [0,1]$

osaväleihin todennäköisyydet seuraavalla tavalla:

$\Pr[a, b] = b - a$, $0 \le a \le b \le 1$

Määritellään *satunnaismuuttuja X* otosavaruudessa S kaavalla

$X(s) = s$, $s \in S$

Funktio $X(\cdot)$ on *identtinen kuvaus*.

Määritellään satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … jono seuraavasti:

$$X_i(s) = \begin{cases} 1 & \text{, kun } s = 0 \\ \left(1 - \dfrac{1}{i}\right)s & \text{, kun } 0 < s < 1 \\ 0 & \text{, kun } s = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

Satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … muodostama jono konvergoi indeksin i kasvaessa rajatta kohti *rajamuuttujaa*

$$X = \lim_{i \to \infty} X_i(s) = \begin{cases} 1 \text{ , kun } s = 0 \\ s \text{ , kun } 0 < s < 1 \\ 0 \text{ , kun } s = 1 \end{cases}$$

Olkoon joukko

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\}$$

niiden otosavaruuden S = [0,1] alkioiden (pisteiden) s joukko, joissa satunnaismuuttujien

$$X_i(s) \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

muodostama jono *ei konvergoi* kohti satunnaismuuttujan $X(s)$ arvoa.

Satunnaismuuttujien $X_i(s)$, i = 1, 2, 3, … muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $0 < s < 1$, mutta *ei konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$, jos $s = 0$ tai $s = 1$. Siten

$$A = \{s \in S \mid \lim X_i(s) \neq X(s)\} = \{0,1\}$$

Koska

$$\Pr(A) = 0$$

satunnaismuuttujien $X_i(s)$, i = 1, 2, 3, … muodostama jono *konvergoi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$ muualla paitsi *nollamittaisessa* joukossa A.

Siten olemme todistaneet, että satunnaismuuttujien $X_i(s)$, i = 1, 2, 3, … muodostama jono *konvergoi melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä yksi* kohti satunnaismuuttujaa $X(s)$:

$$\lim_{i \to \infty} X_i \to X \quad \text{(a.s.)}$$

15.4. Kvadraattinen konvergenssi

Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

muodostama jono **konvergoi kvadraattisesti** (tai neliöllisesti) kohti satunnaismuuttujaa X, jos

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

Merkitään tätä:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad \text{(q.m.)}$$

tai

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{q.m.}} X$$

jossa

q.m. = *in quadratic mean*

Sovellus: Riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien aritmeettisten keskiarvojen muodostaman jonon kvadraattinen konvergenssi

Olkoon

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Määritellään satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Koska satunnaismuuttujat $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ oletettiin riippumattomiksi ja niillä on sama odotusarvo ja varianssi, niin niiden *aritmeettinen keskiarvon* $\overline{X}_n = \sum X_i / n$ *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(\overline{X}_n) = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Koska

$$\mathrm{E}[(\overline{X}_n - \mu)^2] = \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

niin satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ aritmeettisten keskiarvojen $\overline{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono

$$\overline{X}_n\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

konvergoi kvadraattisesti kohti satunnaismuuttujien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ yhteistä odotusarvoa μ:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \to \mu \quad (\text{q.m.})$$

15.5. Stokastinen konvergenssi

Satunnaismuuttujien

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

muodostama jono **konvergoi stokastisesti** kohti satunnaismuuttujaa X, jos kaikille $\varepsilon > 0$ pätee, että

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Merkitään tätä:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad \text{(P)}$$

tai

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} X$$

jossa

P = *in probabaility*

Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan perusteella, satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … jono *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujaa X, jos kaikille $\varepsilon > 0$ pätee, että

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1$$

Sovellus: Riippumattomien samaa normaalijakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien aritmeettisten keskiarvojen muodostaman jonon stokastinen konvergenssi.

Olkoon

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia* ja *samaa normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ noudattavia satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Lisätietoja normaalijakaumasta: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Määritellään satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n *aritmeettinen keskiarvo* kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\ ,\ n = 1,2,3,\ldots$$

Tällöin

$$\bar{X}_n \quad \mathrm{N}(\mu,\sigma^2/n)$$

Olkoon

$$\Phi(z)$$

standardoidun normaalijakauman N(0,1) *kertymäfunktio*.

On helppo nähdä, että kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\begin{aligned}\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= 1 - \Pr(\mu - \varepsilon < \bar{X}_n < \mu + \varepsilon) \\ &= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \Pr\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_n < +\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \\
&= 1 - \left[\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] \\
&\to 0 \text{ , kun } n \to \infty
\end{aligned}
$$

jossa

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \mathrm{N}(0,1) \text{ , } n = 1, 2, 3, \mathrm{K}$$

Koska kaikille $\varepsilon > 0$ pätee

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \to 0 \text{ , kun } n \to \infty$$

niin satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n aritmeettisten $\bar{X}_n = \sum X_i / n$ muodostama jono

$$\bar{X}_n \text{ , } n = 1, 2, 3, \mathrm{K}$$

konvergoi stokastisesti kohti satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … yhteistä odotusarvoa μ:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad \text{(P)}$$

15.6. Jakaumakonvergenssi

Olkoon

X_1, X_2, X_3, …

jono satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktiot ovat

$F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, …

Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … muodostama jono **konvergoi jakaumaltaan** kohti satunnaismuuttujaa X, jonka kertymäfunktio on $F_X(x)$, jos

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F_X(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa $F_X(x)$ on jatkuva.

Merkitään tätä:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad \text{(L)}$$

tai

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{L}} X$$

jossa

L = *in* (*probability*) *law*

Kirjaimen *L* tilalla käytetään usein kirjainta *D*:

D = *in distribution*

Esimerkki. Jakaumakonvergenssi.

Olkoon

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

jono *satunnaismuuttujia*, joiden *kertymäfunktiot* ovat

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & , \text{kun } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{i}\right)^i & , \text{kun } 0 \le x \le i \\ 0 & , \text{kun } x > i \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

Koska eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella

$$\lim_{i \to \infty} \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = e^{-x}$$

niin

$$\lim_{i \to \infty} F_i(x) = 1 - e^{-x} \text{ , } x \ge 0$$

Funktio

$$F(x) = 1 - e^{-x} \text{ , } x \ge 0$$

on *eksponenttijakauman* Exp(1) *kertymäfunktio*; lisätietoja: ks. lukua **Jatkuvia jakaumia**.

Siten satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan* eli *heikosti* kohti satunnaismuuttujaa

$X \sim \text{Exp}(1)$

eli

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X \quad \text{Exp}(1) \quad (\text{L})$$

Momenttiemäfunktioiden konvergenssi ja jakaumakonvergenssi

Luvussa **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio** todettiin seuraavaa:

Olkoon

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

satunnaismuuttujien jono. Olkoot

$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$

vastaavat *kertymäfunktiot* ja

$m_1(x), m_2(x), m_3(x), \ldots$

vastaavat *momenttiemäfunktiot*. Olkoon lisäksi X satunnaismuuttuja, jonka *kertymäfunktio* on $F_X(x)$ ja *momenttiemäfunktio* on $M_X(t)$.

Oletetaan, että kaikille t jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä pätee, että

$$\lim_{i\to\infty} M_i(t) = M_X(t)$$

Tällöin

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F_X(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa kertymäfunktio $F_X(x)$ on jatkuva. Lisäksi momenttiemäfunktio $M_X(t)$ määrää tällöin kertymäfunktion $F_X(x)$ yksikäsitteisesti. Siten momenttiemäfunktioiden konvergenssista jossakin origon ympäristössä seuraa vastaavien satunnaismuuttujien jakauma-konvergenssi.

Karakterististen funktioiden konvergenssi ja jakaumakonvergenssi

Luvussa **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio** todettiin seuraava:

Olkoon

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

satunnaismuuttujien jono. Olkoot

$$F_1(x), F_2(x), F_3(x), \ldots$$

vastaavat *kertymäfunktiot* ja

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t), \ldots$$

vastaavat *karakteristiset funktiot*. Olkoon lisäksi X satunnaismuuttuja, jonka *kertymäfunktio* on $F_X(x)$ ja *karakteristinen funktio* on $\varphi_X(t)$.

Tällöin

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_i(t) = \varphi_X(t)$$

jos ja vain jos

$$\lim_{i\to\infty} F_i(x) = F_X(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa kertymäfunktio $F_X(x)$ on jatkuva. Siten karakterististen funktioiden konvergenssi on yhtäpitävää vastaavien satunnaismuuttujien jakaumakonvergenssin kanssa.

15.7. Stokastiikan konvergenssikäsitteiden yhteydet

Voidaan osoittaa, että todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteillä on seuraavat yhteydet:

(i) **Melkein varma konvergenssi (a.s.) implikoi stokastisen konvergenssin (P)**.

(ii) **Kvadraattinen konvergenssi (q.m.) implikoi stokastisen konvergenssin (P)**.

(iii) **Stokastinen konvergenssi (P) implikoi jakaumakonvergenssin eli heikon konvergenssin (L)**.

(iv) Melkein varman ja kvadraattisen konvergenssin yhteydestä ei voida sanoa mitään yleistä.

Todistetaan konvergenssikäsitteiden yhteyksistä seuraavassa se, että **kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin**.

Perustelu:

Oletetaan, että satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

muodostama jono *konvergoi kvadraattisesti* kohti satunnaismuuttujaa X, jolloin

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{E}[(X_i - X)^2] = 0$$

Tarkastellaan todennäköisyyttä

$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon)$$

Markovin epäyhtälöstä (ks. luvun **Jakaumien tunnusluvut** kappaletta **Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt**) ja *kvadraattisen konvergenssin määritelmästä* seuraa, että

$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}[(X_i - X)^2] \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

Koska

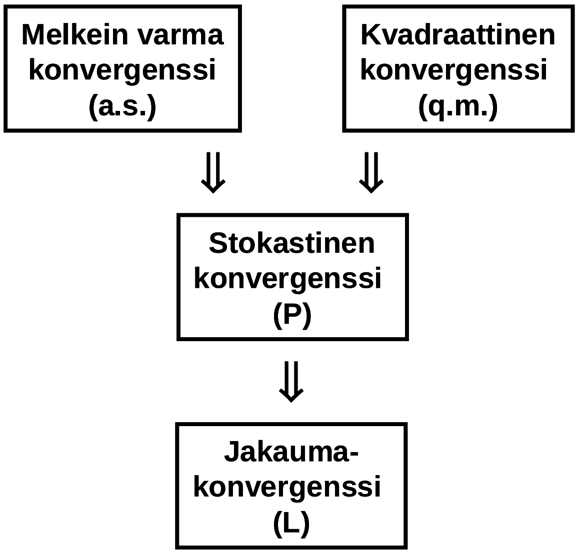
$$\Pr(|X_i - X| > \varepsilon) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

niin satunnaismuuttujien

$$X_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

muodostama jono *konvergoi stokastisesti* kohti satunnaismuuttujaa X suoraan stokastisen konvergenssin määritelmän perusteella.

■



15.8. Suurten lukujen lait

Vahva suurten lukujen laki

Olkoon

X_i , i = 1, 2, 3, …

jono *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo:

$\mathrm{E}(X_i) = \mu$, i = 1, 2, 3, …

Määritellään satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Tällöin pätee **vahva suurten lukujen laki**: Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n aritmeettisten keskiarvojen muodostama jono $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ konvergoi **melkein varmasti** eli **todennäköisyydellä yksi** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \mu$$

Vahva suurten lukujen laki voidaan ilmaista sanoin seuraavasti: Samoin jakautuneiden satunnais-muuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa rajatta muuttujien yhteistä odotusarvoa melkein kaikkialla* eli se otosavaruuden S osajoukko, jossa konvergenssia ei tapahdu on *nollamittainen*.

Heikko suurten lukujen laki

Olkoon

X_i , i = 1, 2, 3, …

jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$\mathrm{E}(X_i) = \mu$, i = 1, 2, 3, …

$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2$, i = 1, 2, 3, …

Määritellään satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Tällöin pätee **heikko suurten lukujen laki**: Satunnaismuuttujien X_1, X_2, X_3, … , X_n aritmeettisten keskiarvojen muodostama jono $\bar{X}_n = \Sigma X_i / n$ konvergoi **stokastisesti** kohti satunnaismuuttujien yhteistä odotusarvoa μ:

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} \mu$$

Perustelu:

Olkoon

X_i , i = 1, 2, 3, …

jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joilla on *sama* odotusarvo ja varianssi:

$\mathrm{E}(X_i) = \mu$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Määritellään satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Tshebyshevin epäyhtälön (ks. luvun **Jakaumien tunnusluvut** kappaletta **Markovin ja Tshebyshevin epäyhtälöt**) mukaan

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Koska epäyhtälön oikea puoli $\to 0$, kun $n \to \infty$, niin

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \mu$$

■

Heikko suurten lukujen laki voidaan ilmaista sanoin seuraavasti: Samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien *aritmeettinen keskiarvo lähestyy muuttujien lukumäärän kasvaessa muuttujien yhteistä odotusarvoa* sellaisella tavalla, että **suuret poikkeamat satunnaismuuttujien yhteisestä odotusarvosta tulevat yhä *harvinaisemmiksi***.

Suurten lukujen lait: Kommentteja

Suurten lukujen lait ovat esimerkkejä satunnaismuuttujien jonojen **asymptoottisesta käyttäytymisestä**. Suurten lukujen lakeja voidaan pitää matemaattisena formulointina **tilastollisen stabiliteetin** käsitteelle.

Koska melkein varma konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin, *vahva suurten lukujen laki implikoi heikon suurten lukujen lain*.

Suurten lukujen laeista on olemassa *yleisempiä muotoja*, joissa voidaan eri tavoin lieventää *samoinjakautuneisuus-* ja *riippumattomuusoletuksia*. Tällä on suuri merkitys **stokastisten prosessien** ja **aikasarja-analyysin** teoriassa.

Suurten lukujen laki: Suhteellisen frekvenssin asymptoottinen käyttäytyminen

Olkoon A otosavaruuden S jokin *tapahtuma* ja oletetaan, että

$$\Pr(A) = p$$

Tällöin

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A) = 1 - p = q$$

Määritellään *diskreetti satunnaismuuttuja* X:

$$X = \begin{cases} 1 \text{ , jos } A \text{ tapahtuu} \\ 0 \text{ , jos } A \text{ ei tapahdu} \end{cases}$$

Satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* on

$$f(x) = \Pr(X = x) = p^x q^{1-x} \text{ , } 0 < p < 1 \text{ , } q = 1 - p \text{ , } x = 0,1$$

Satunnaismuuttuja X noudattaa **Bernoulli-jakaumaa** parametrilla p (ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

Voidaan osoittaa, että

$$\text{E}(X) = p$$

Toistetaan edellä määriteltyä *Bernoulli-koetta* n kertaa ja oletetaan, että koetoistot ovat *riippumattomia* sekä tarkastellaan tapahtuman A sattumista koetoistojen aikana.

Oletuksien mukaan

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

Määritellään *diskreetit satunnaismuuttujat* X_i , $i = 1, 2, \dots , n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ , jos } A \text{ tapahtuu kokeessa } i \\ 0 \text{ , jos } A \text{ ei tapahdu kokeessa } i \end{cases}$$

Satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \dots , n$ ovat *riippumattomia* ja noudattavat *samaa* Bernoulli-jakaumaa Bernoulli(p):

$$X_1, X_2, \dots , X_n \perp$$

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ , } i = 1, 2, \dots , n$$

Voidaan osoittaa, että

$$\text{E}(X_i) = p \text{ , } i = 1, 2, \dots , n$$

Olkoon

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , n$ *summa*.

Koska luku 1 esiintyy summassa $\sum X_i$ *täsmälleen* yhtä monta kertaa kuin tapahtuma A sattuu koetoistojen aikana, satunnaismuuttuja $Y_n = \sum X_i$ kuvaa tapahtuman A esiintymisten *frekvenssiä* eli lukumäärää n-kertaisessa Bernoulli-kokeessa.

Voidaan osoittaa, että satunnaismuuttuja $Y_n = \sum X_i$ noudattaa **binomijakaumaa** parametrein n ja p (lisätietoja: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**):

$$Y_n = \sum X_i \sim \text{Bin}(n,p)$$

Voidaan osoittaa, että

$$\text{E}(Y_n) = np$$

Satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, \dots , n$ *aritmeettinen keskiarvo*

$$\bar{X}_n = \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

kuvaa tapahtuman A esiintymisten *suhteellista frekvenssiä* eli *suhteellista lukumäärää* n-kertaisessa Bernoulli-kokeessa.

Tilastotieteessä satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ tulkitaan *havainnoiksi* saman Bernoulli-kokeen toistoista. Tällöin suhteelliselle frekvenssille Y_n/n käytetään tavallisesti merkintää

$$\hat{p}_n = \frac{f_n}{n}$$

jossa f_n on tapahtuman A *havaittu frekvenssi*, kun tarkastelun kohteena oleva satunnaisilmiö on toistunut n kertaa.

Vahvan suurten lukujen lain mukaan suhteellinen frekvenssi $\hat{p}_n = f_n / n$ konvergoi *melkein varmasti* eli *todennäköisyydellä yksi* kohti tapahtuman A todennäköisyyttä p:

$$\hat{p}_n = f_n / n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} p = \Pr(A)$$

Koska vahva suurten lukujen laki *implikoi* heikon suurten lukujen lain, tiedämme, että tapahtuman A suhteellinen frekvenssi *konvergoi* myös *stokastisesti* kohti tapahtuman A todennäköisyyttä:

$$\hat{p}_n = f_n / n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} p = \Pr(A)$$

Koska tapahtuman A havaittu suhteellinen frekvenssi

$$\hat{p}_n = f_n / n$$

konvergoi kohti tapahtuman A todennäköisyyttä

$$\Pr(A) = p$$

jos havaintojen X_i lukumäärän n annetaan kasvaa rajatta, sanomme, että *suhteellinen frekvenssi* **tarkentuu** *havaintojen lukumäärän kasvaessa kohden tapahtuman A todennäköisyyttä*.

15.9. Keskeinen raja-arvolause

Olkoon

$$X_i\ , \ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia, samaa normaalijakaumaa* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ *noudattavia satunnaismuuttujia* (lisätietoja: ks. luvun **Jatkuvia jakaumia** kappaletta **Normaalijakauma**). Tällöin *satunnaismuuttujien* $X_1, X_2, \ldots , X_n$ *summa*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

noudattaa normaalijakaumaa parametrein $n\mu$ ja $n\sigma^2$:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

Kysymys: Mitä voidaan sanoa *riippumattomien, samaa jakaumaa noudattavien satunnaismuuttujien summan jakaumasta*, jos ko. satunnaismuuttujat *eivät noudata normaalijakaumaa*?

Vastaus: *Ei-normaalisten* satunnaismuuttujien summa *ei yleensä ole* normaalinen.

Mutta: Jos yhteenlaskettavia on ”tarpeeksi paljon”, *satunnaismuuttujien summa on kuitenkin* (hyvin yleisin ehdoin) **approksimatiivisesti normaalinen**. Tämä on **keskeisen raja-arvolauseen** olennainen sisältö.

Koska monia satunnaismuuttujia voidaan pitää *usean riippumattoman tekijän summana*, keskeinen raja-arvolause antaa selityksen sille *empiiriselle havainnolle*, että monia satunnaismuuttujia voidaan pitää (ainakin approksimatiivisesti) normaalisena.

Keskeisestä raja-arvolauseesta on useita erilaisia muotoja. Tarkastelemme ensin ns. **Lindebergin ja Levyn lausetta**, joka koskee *riippumattomia* ja *samoin jakautuneita* satunnaismuuttujia.

Lindebergin ja Levyn lause

Olkoon

$$X_i \,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*, joiden odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Olkoon

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, … , n *summa*. Summan Y_n odotusarvo ja varianssi ovat

$$\mathrm{E}(Y_n) = n\mu$$

$$\mathrm{D}^2(Y_n) = n\sigma^2$$

Standardoidaan summa Y_n :

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Annetaan $n \to \infty$. Tällöin *satunnaismuuttujan* Z_n *jakauma konvergoi kohden standardoitua normaalijakaumaa* N(0,1) eli

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0,1) *kertymäfunktio*.

Perustelu:

Olkoon

$$X_i \,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia*, joiden *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2 \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Olkoon satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … **momenttiemäfunktio** (lisätietoja: ks. luvun **Momenttiemäfunktio ja karakteristinen funktio** kappaletta **Momenttiemäfunktio**) olemassa jossakin origon ympäristössä.

Olkoon

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … *summa*. Summamuuttujan Y_n *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(Y_n) = n\mu$$
$$\mathrm{D}^2(Y_n) = n\sigma^2$$

Standardoidaan summamuuttuja Y_n:

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Standardoidun satunnaismuuttujan Z_n *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(Z_n) = 0$$
$$\mathrm{D}^2(Z_n) = 1$$

Siirrytään tarkastelemaan *keskistettyjä satunnaismuuttujia*

$$T_i = X_i - \mu \,,\; i = 1, 2, 3 \ldots$$

Keskistettyjen satunnaismuuttujien T_i *odotusarvo* ja *varianssi* ovat

$$\mathrm{E}(T_i) = 0 \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\mathrm{D}^2(T_i) = \sigma^2 \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Keskistettyjen muuttujien T_i avulla standardoitu muuttuja Z_n voidaan kirjoittaa muotoon

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

Satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … momenttiemäfunktion olemassaolosta jossakin origon ympäristössä seuraa keskitettyjen muuttujien

$$T_i = X_i - \mu \,,\; i = 1, 2, 3 \ldots$$

momenttiemäfunktion olemassaolo jossakin origon ympäristössä.

Olkoon

$$m(t) = \mathrm{E}(e^{tT_i})$$

satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteinen *momenttiemäfunktio*.

Koska *riippumattomien satunnaismuuttujien summan momenttiemäfunktio on summan tekijöiden momenttiemäfunktioiden tulo*, niin satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

momenttiemäfunktio $m_n(t)$ voidaan esittää muodossa

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

jossa $m(t)$ on siis satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteinen momenttiemäfunktio.

Satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteisellä momenttiemäfunktiolla $m(t)$ on jossakin pisteen $t = 0$ ympäristössä voimassa sarjakehitelmä

$$m(t) = 1 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2}t^2 + t^2\eta(t)$$

jossa

$$\alpha_k = \mathrm{E}(T_i^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

on satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … k. (origo-) momentti ja

$$\eta(t) \to 0, \text{ kun } t \to 0$$

Koska

$$\alpha_1 = \mathrm{E}(T_i) = 0\,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\alpha_2 = \mathrm{E}(T_i^2) = \mathrm{D}^2(T_i) = \sigma^2\,,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

niin

$$m(t) = 1 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{2}t^2 + t^2\eta(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2\eta(t)$$

Sijoitetaan satunnaismuuttujien T_i , i = 1, 2, 3, … yhteisen momenttiemäfunktion $m(t)$ sarjakehitelmä

$$m(t) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}t^2 + t^2\eta(t)$$

satunnaismuuttujan

$$Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(T_1 + T_2 + \cdots + T_n)$$

momenttiemäfunktion lausekkeeseen

$$m_n(t) = \left[m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Saamme sijoituksen tuloksena lausekkeen

$$m_n(t) = \left[1 + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right]^n = \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{\sigma^2}\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right) \right]^n$$

jossa

$$\lim_{n\to\infty}\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=0$$

jokaiselle kiinteälle t.

Eksponenttifunktion ominaisuuksien perusteella

$$m_n(t)=\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{\sigma^2}\eta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{t^2/2}$$

Koska

$$e^{t^2/2}$$

on *standardoidun normaalijakauman* N(0,1) *momenttiemäfunktio*, satunnaismuuttujien

$$Z_n=\frac{Y_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

muodostama jono *konvergoi jakaumaltaan* eli *heikosti* kohden standardoitua normaalijakaumaa N(0,1):

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}} Z \quad \mathrm{N}(0,1)$$

■

Lindebergin ja Levyn lause: Kommentteja

Lindebergin ja Levyn lauseen konvergenssitulosta kirjoitetaan usein seuraavaan muotoon:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad {}_a\ \mathrm{N}(0,1)$$

jossa

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

on satunnaismuuttujien

$$X_i\,,\ i=1,2,3,\ldots,n$$

aritmeettinen keskiarvo. Tällöin Lindebergin ja Levyn lauseen konvergenssitulokseen viitataan sanomalla, että satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … , n aritmeettinen keskiarvo $\overline{X}_n$ on **asymptoottisesti normaalinen** parametrein μ ja σ^2/n.

Tämä on kuitenkin siinä mielessä harhaanjohtavaa, että satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … , n aritmeettisen keskiarvon $\overline{X}_n$ jakauma konvergoi yhden pisteen jakaumaa kohti, jossa jakauman koko todennäköisyysmassa keskittyy pisteeseen μ, kun $n \to \infty$.

Siksi olisi parempi sanoa vain, että satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … , n aritmeettinen keskiarvo $\bar{X}_n$ on Lindebergin ja Levyn lauseen ehtojen pätiessä suurille (mutta äärellisille) n **approksimatiivisesti normaalinen** parametrein μ ja σ^2/n.

On hyvä tietää, että keskeisestä raja-arvolauseesta on Lindebergin ja Levyn lausetta *yleisempiä muotoja*, joissa on eri tavoin lievennetty *samoinjakautuneisuus*- ja *riippumattomuusoletuksia*. Näillä yleisemmillä muodoilla on suuri merkitys esimerkiksi **stokastisten prosessien** ja **aikasarja-analyysin** teoriassa.

Liapunovin lause

Kuten edellä on todettu keskeisestä raja-arvolauseesta on yleisempiä muotoja, joissa on eri tavoin lievennetty *samoinjakautuneisuusoletusta*. Eräs näistä yleisimmistä muodoista on ns. **Liapunovin lause**.

Olkoon

$$X_i \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia, joiden odotusarvot ja varianssit ovat

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma_i^2 \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Oletetaan lisäksi, että satunnaismuuttujien X_i *kolmannet absoluuttiset momentit* odotusarvojen μ_i suhteen ovat olemassa kaikille i eli

$$\tau_i^3 = \mathrm{E}(|X_i - \mu_i|^3) < \infty \,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Olkoot

$$\mu_{(n)} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

$$\sigma_{(n)}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

ja

$$\tau_{(n)}^3 = \tau_1^3 + \tau_2^3 + \cdots + \tau_n^3$$

Jos ehto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = 0$$

pätee, niin summa

$$X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

on **asymptoottisesti normaalinen** parametrein $\mu_{(n)}$ ja $\sigma_{(n)}^2$ eli

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{X_{(n)} - \mu_{(n)}}{\sigma_{(n)}} \le z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0,1) *kertymäfunktio*.

Liapunovin lause: Kommentteja

Jos satunnaismuuttujat

$$X_i \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

noudattavat *samaa* jakaumaa, niin tällöin ehto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = 0$$

pätee, koska tällöin

$$\mu_i = \mu \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

ja

$$\tau_i^3 = \tau^3 \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

jolloin

$$\frac{\tau_{(n)}}{\sigma_{(n)}} = \frac{\tau}{\sqrt[6]{n}\sigma} \to 0$$

jos

$$n \to \infty$$

On kuitenkin syytä huomata, että **Lindebergin ja Levyn lause** *ei ole erikoistapaus* **Liapunovin lauseesta**, koska **Lindebergin ja Levyn lauseessa** ei edellytetä satunnaismuuttujien kolmansien absoluuttisten momenttien olemassaoloa.

Lindebergin ja Fellerin lause

Välttämättömät ja *riittävät ehdot* sille, että keskeinen raja-arvolause pätee *riippumattomille* satunnaismuuttujille esitetään ns. **Lindebergin ja Fellerin lauseessa**.

Olkoon

$$X_i \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

jono *riippumattomia* satunnaismuuttujia. Olkoot satunnaismuuttujien X_i , $i = 1, 2, 3, \ldots$ kertymäfunktiot

$$F_i(x) \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

sekä odotusarvot ja varianssit

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu_i \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$
$$\mathrm{D}^2(X_i) = \sigma_i^2 \text{ , } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Olkoot

$$\mu_{(n)} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$$

$$\sigma_{(n)}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2$$

Tällöin ehto

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \frac{\sigma_i}{\sigma_{(n)}} = 0$$

pätee ja summa

$$X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

on **asymptoottisesti normaalinen** parametrein $\mu_{(n)}$ ja $\sigma^2_{(n)}$ eli

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{X_{(n)} - \mu_{(n)}}{\sigma_{(n)}} \le z \right) = \Phi(z)$$

jossa Φ on *standardoidun normaalijakauman* N(0,1) *kertymäfunktio*, jos ja vain jos

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2_{(n)}} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-\mu_i| > \varepsilon\sigma_{(n)}} (x-\mu_i)^2 \, dF_i(x) = 0$$

kaikille $\varepsilon > 0$.

Ehdon (∗) mukaan yhdenkään satunnaismuuttujan X_i , i = 1, 2, 3, … vaihtelu *ei saa dominoida* muiden vaihtelua. Ehtoa (∗∗) kutsutaan tavallisesti **Lindebergin ehdoksi**. Sen mukaan satunnaismuuttujien X_i , i = 1, 2, 3, … jakaumien häntäalueilla *ei saa olla* ”liikaa” *todennäköisyysmassaa*. Todettakoon lopuksi, että Lindebergin ehdossa esiintyvä integraali on ns. *Stieltjes-integraali*.

Keskeinen raja-arvolause: Kommentteja

Keskeinen raja-arvolause koskee satunnaismuuttujien jonojen **asymptoottista käyttäytymistä**. Keskeisen raja-arvolauseen mukaan usean satunnaismuuttujan *summa on* (*tietyin ehdoin*) *approksimatiivisesti normaalinen* (*lähes*) *riippumatta yhteenlaskettavien jakaumasta*.

Huomautus:

- Yhteenlaskettavien ei tarvitse olla edes *jatkuvia*, vaan ne voivat olla jopa *diskreettejä*.

Approksimaation *hyvyys riippuu* yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien lukumäärästä, niiden jakaumasta ja erityisesti niiden jakauman *vinoudesta*. Approksimaation *hyvyys paranee*, kun yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien *lukumäärä kasvaa*. Jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on *symmetrinen*, approksimaatio on hyvä jo suhteellisen pienillä yhteenlaskettavien lukumäärillä. Sen sijaan, jos yhteenlaskettavien satunnaismuuttujien jakauma on voimakkaasti *epäsymmetrinen*, hyvä approksimaatio vaatii selvästi enemmän yhteenlaskettavia.

Keskeisessä raja-arvolauseessa esiintyvä *rajakäyttäytymisen muoto* on esimerkki **jakaumakonvergenssista** eli **heikosta konvergenssista**.

Keskeinen raja-arvolause sekä binomijakauman, hypergeometrisen jakauman ja Poisson-jakauman asymptoottiset jakaumat

Luvun **Jatkuvia jakaumia** kappaleessa **Keskeinen raja-arvolause** tarkastellaan seuraavia keskeisen raja-arvolauseen sovelluksia:

(i) **Binomijakauma** lähestyy asymptoottisesti **normaalijakaumaa.**

(ii) **Hypergeometrinen jakauma** lähestyy asymptoottisesti **normaalijakaumaa.**

(iii) **Poisson-jakauma** lähestyy asymptoottisesti **normaalijakaumaa.**

Lisätietoja binomijakaumasta, hypergeometrisesta jakaumasta ja Poisson-jakaumasta: ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.