# Todennäköisyyslaskenta: Todennäköisyys ja sen laskusäännöt

# *Sisällys*

# 1. Johdanto



**Todennäköisyyslaskenta** kehittää *matemaattisia malleja* **satunnaisilmiöille**. Mallien avulla yritetään *kuvata* ja *erottaa satunnaisilmiöiden systemaattiset* ja *satunnaiset piirteet*.

Tarkastelemme tässä luvussa ensin sitä, mitkä tekijät tekevät reaalimaailman ilmiöistä **deterministisiä** ja mitkä **satunnaisia** sekä sitä, mitä satunnaisuudella tarkoitetaan. Samalla yritämme perustella myös sen, että satunnaisilmiön tuloksissa havaittava **satunnainen vaihtelu** *ei saa olla mielivaltaista*, vaan satunnaisvaihteluun on liitytttävä sellaista *säännönmukaista käyttäytymistä*, jota kutsutaan **tilastolliseksi stabiliteetiksi**.

Toiseksi pyrimme määrittelemään **todennäköisyyden** käsitteen. Esitämme tässä luvussa kolme *naiivia* määritelmää todennäköisyydelle:

- Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** on *tapahtumalle suotuisten tulosvaihtoehtojen lukumäärän suhde kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen lukumäärään*.
- Tapahtuman **empiirinen todennäköisyys** on *tapahtuman tilastollisesti stabiili suhteellinen osuus satunnaisilmiön esiintymiskertojen joukossa*.
- **Todennäköisyys** on *tapahtuman sattumisen mahdollisuuden* **mitta**.

Kaikki kolme tässä luvussa esitettävää määritelmää todennäköisyydelle ovat *naiiveja* siinä mielessä, että ne eivät ole *matemaattisesti tarkkoja*. Määritelmillä on kuitenkin ollut suuri merkitys *todennäköisyyslaskennan historiassa* ja niihin liittyy *tulkinnallisesti tärkeitä näkökulmia* todennäköisyyden käsitteeseen. Todennäköisyyden matemaattisesti tarkka määritelmä esitetään luvussa **Todennäköisyyden aksioomat**.

## Avainsanat:

Deterministinen ilmiö, Deterministisyys, Empiirinen todennäköisyys, Epäreilu peli, Frekvenssi, Frekvenssitulkinta, Klassinen todennäköisyys, Koetoisto, Kolmogorovin aksioomat, Luonto, Mitta, Peli luontoa vastaan, Reaalimaailman ilmiö, Reilu peli, Satunnaisilmiö, Satunnaiskoe, Satunnaisuus, Stokastinen malli, Stokastisuus, Suhteellinen frekvenssi, Suhteellinen osuus, Suotuisa tulosvaihtoehto, Tilastollinen malli, Tilastollinen stabiliteetti, Tilastollinen tutkimus, Tilastotiede, Todennäköisyyden aksioomat, Todennäköisyyden frekvenssitulkinta, Todennäköisyyden määritteleminen, Todennäköisyys, Todennäköisyyslaskenta, Todennäköisyysmalli, Tulos, Tulosvaihtoehto, Venn-diagrammi

## 1.1. Deterministisyys ja satunnaisuus

### Deterministisyys

Reaalimaailman ilmiö on **deterministinen**, jos *ilmiön alkutilan perusteella voidaan tarkasti ennustaa ilmiön* **lopputila** eli **tulos**. Deterministisen ilmiön *alkutila määrää ilmiön lopputilan*. Deterministisiä ilmiöitä kutsutaan usein **eksakteiksi** tai **kausaalisiksi**.

Monia *fysiikan*, kuten esimerkiksi *klassisen mekaniikan* ilmiöitä voidaan kuvata deterministisinä ilmiöinä.

**Esimerkki 1. Ammuksen radan ennustaminen.**

Ammuksen rata voidaan *ennustaa* hyvin tarkasti, jos tunnetaan ammuksen paino, lähtönopeus, lähtökulma, lähtösuunta, ilmanvastus jne.

**Huomautus**:

- Deterministisiä ilmiöitä koskeviin *havaintoihin* liittyy hyvin usein luonteeltaan *satunnaista havaintovirhettä*. Lisäksi deterministisiin ilmiöihin saattaa liittyä *ennustamattomuutta*, jota kutsutaan *kaaokseksi*.

### Satunnaisuus

Reaalimaailman ilmiö on **stokastinen** eli **satunnainen**, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(i) Ilmiö voi päätyä *alkutilastaan* useisiin erilaisiin *lopputiloihin* eli ilmiöllä on useita erilaisia *vaihtoehtoisia tuloksia*.

(ii) Ilmiön alkutilan perusteella *ei voida* tarkasti *ennustaa* ilmiön lopputilaa eli sitä, mikä ilmiön mahdollisista *tulosvaihtoehdoista realisoituu* eli *toteutuu*.

(iii) Vaikka ilmiön lopputilaa ei voida ennustaa tarkasti, tulosvaihtoehtojen *suhteellisten frekvenssien* eli *osuuksien voidaan nähdä* ilmiön toistuessa *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.

**Esimerkki 2. Erilaisia satunnaisilmiöitä.**

Satunnaisilmiöitä tai ilmiöitä, joissa satunnaisuus on mukana ainakin osatekijänä kohdataan mitä erilaisimmilla alueilla.

- Sellaiset perustuvaa laatua olevat *biologiset ilmiöt* kuten sukupuolen määräytyminen tai ominaisuuksien periytyminen vanhemmilta jälkeläisille noudattavat sattuman lakeja.
- *Kvanttimekaniikan ilmiöt* kuten alkeishiukkasten käyttäytyminen tai radioaktiivinen hajoaminen ovat luonteeltaan satunnaisilmiöitä.
- Useimpia *sosiologian* tai *taloustieteen* tutkimia *yhteiskunnallisia ilmiöitä* ei voida ymmärtää, jollei satunnaisten tekijöiden roolia oteta huomioon.
- Tavallisimmissa *uhkapeleissä* kuten nopanheitossa, korttipeleissä, lotossa, ruletissa tai arpajaisissa sattumalla on aivan keskeinen rooli.
- Empiirisen tutkimuksen mittauksiin välttämättä liittyvät *havaintovirheet* käyttäytyvät satunnaisesti.
- Tilastollisten tutkimusaineistojen kerääminen kuten *otoksien poiminta* perustuu arvontaan ja siten sattuman hyväksikäyttöön.

*Satunnaisilmiöiden tulosta ei siis voida ennustaa tarkasti*, mutta *ilmiön toistuessa tulosvaihtoehtojen suhteellisten frekvenssien* eli *osuuksien havaitaan käyttäytyvän säännönmukaisesti*.

**Esimerkki 3. Satunnaisilmiöt ja niiden säännönmukaiset piirteet.**

Esimerkkejä satunnaisilmiöiden säännönmukaisista piirteistä:

- Lapsen sukupuolta ei voida ennustaa etukäteen, mutta noin *puolet syntyvistä lapsista on tyttöjä* ja noin *puolet on poikia*.
- Satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärää ei tiedetä, mutta *älykkyysosamäärät jakautuvat suurissa ihmisjoukoissa ns. normaalijakauman mukaan*. Käsittelemme normaalijakaumaa luvussa **Jatkuvia jakaumia**.
- Radioaktiivisen aineen yksittäisen atomin hajoamishetkeä ei voida ennustaa, mutta ns. *puoliintumisaika on jokaiselle radioaktiiviselle aineelle ominainen vakio*.
- Havaintovirheen suuruutta ja suuntaa ei voida ennustaa yksittäiselle havainnolle, mutta *suurissa havaintojoukoissa havaintovirheet jakautuvat hyvin usein ns. normaalijakauman mukaan*. Käsittelemme normaalijakaumaa luvussa **Jatkuvia jakaumia**.

## 1.2. Satunnaiskokeet ja koetoistot

*Satunnaisilmiötä* kutsutaan todennäköisyyslaskennassa usein **satunnaiskokeeksi** ja *satunnais-ilmiön esiintymiskertaa* kutsutaan usein **koetoistoksi**.

**Esimerkki 1. Sukupuolen määräytyminen.**

Voimme kutsua *sukupuolen määräytymismekanismia* munasolun hedelmöittyessä satunnaiskokeeksi ja tietyn yksilön sukupuolen määräytymistä koetoistoksi.

**Esimerkki 2. Nopanheitto.**

*Nopanheitto* on satunnaiskoe ja yksittäinen nopanheitto on koetoisto.

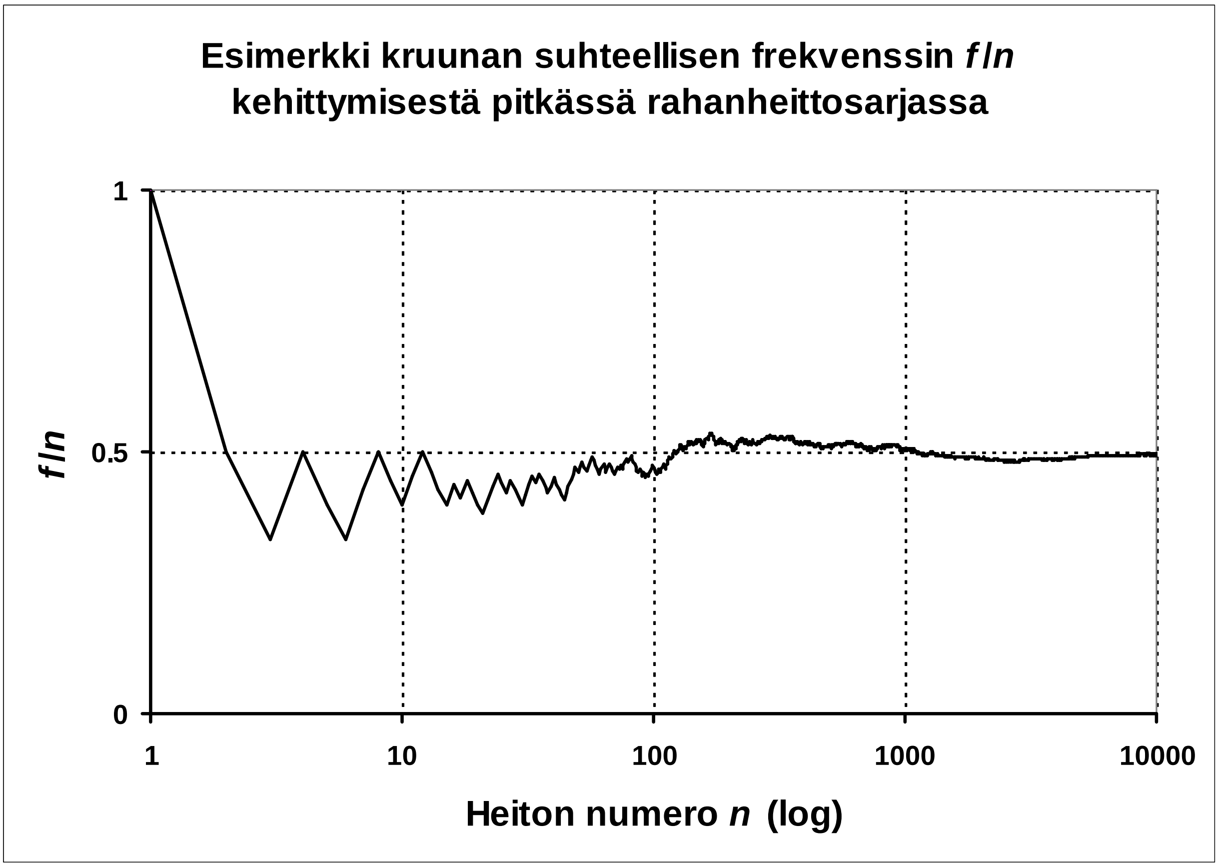
## 1.3. Satunnaisuus ja tilastollinen stabiliteetti

Todennäköisyyslaskennan *satunnaisuus ei ole mielivaltaisuutta*. Vaikka *ilmiön tulos vaihteleekin ilmiön toistuessa tavalla*, jota *ei voida ennustaa tarkasti*, niin *ilmiön säännönmukaisten piirteiden on tultava esille ilmiön toistuessa*. **Todennäköisyyslaskennan** tehtävänä on kehittää *matemaattisia malleja* tällaisille säännönmukaisille piirteille.

**Esimerkki 1. Rahanheitto satunnaisilmiönä.**

Heitetään *virheetöntä* rahaa toistuvasti ja pidetään kirjaa kruunien *frekvenssistä* eli lukumäärästä $f$ sekä *suhteellisesta frekvenssistä* eli *osuudesta* $f/n$, jossa $n$ on tehtyjen heittojen lukumäärä. *Yksittäisen heiton tulosta* ei voida ennustaa etukäteen ja kruunien suhteellinen frekvenssi $f/n$ *vaihtelee* heittoja toistettaessa, mutta *lähestyy* virheettömän rahan tapauksessa kuitenkin lukua 1/2 niin, että *suuret poikkeamat luvusta* 1/2 *tulevat yhä harvinaisemmiksi*.

Alla oleva kuva esittää kruunan suhteellisen frekvenssin $f/n$ kehittymistä *eräässä* realisoituneessa heittosarjassa. Kuvasta nähdään, kuinka kruunan suhteellisen frekvenssin $f/n$ suuret poikkeamat luvusta 1/2 tulevat yhä harvinaisemmiksi, kun heittojen lukumäärä $n$ kasvaa.




On syytä huomata, että luku 1/2 *ei ole* kruunien suhteellisen frekvenssin *f*/*n raja-arvo* tavanomaisen lukujonokonvergenssin mielessä. Tapa, jolla kruunien suhteellinen frekvenssi lähestyy lukua 1/2, on esimerkki ns. *stokastisesta konvergenssista*; ks. luvun **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet** kappaletta **Suurten lukujen lait**.

Kutsumme satunnaisilmiön toistuessa ilmenevää säännönmukaisuutta **tilastolliseksi stabiliteetiksi**. Jos satunnaisilmiö ei ole tilastollisesti stabiili, sitä ei voida mallintaa todennäköisyyslaskennan matemaattisilla malleilla.

**Huomautus**:

- Tilastollisen stabiliteetin idea saa matemaattisesti täsmällisen muotoilun ns. *suurten lukujen laeissa*; ks. luvun **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet** kappaletta **Suurten lukujen lait**.

### Tilastotiede, tilastollinen stabiliteetti ja reilut pelit

**Tilastotiede** on *yleinen menetelmätiede*, jonka tehtävänä on *kehittää* ja *soveltaa matemaattisia malleja*, joiden avulla voidaan *kuvata* ja *selittää mekanismit*, jotka *tuottavat reaalimaailman ilmiöistä numeerisia* tai *kvantitatiivisia* **tietoja**, sellaisissa tilanteissa, joissa tietoihin liittyy *epävarmuutta* tai *satunnaisuutta*. Tietoihin liittyvä epävarmuus tai satunnaisuus voi olla seurausta ilmiöstä itsestään tai siitä tavasta, jolla tiedot on kerätty.

Koska **tilastollisissa tutkimusasetelmissa** tutkimuksen kohteena olevaa reaalimaailman ilmiötä koskeviin tietoihin liittyy *epävarmuutta* tai *satunnaisuutta*, tilastotieteen malleja eli **tilastollisia malleja** rakennettaessa sovelletaan *todennäköisyyslaskentaa*.

Satunnaisilmiölle voidaan rakentaa tilastollisia malleja vain, jos *ilmiön tulokset* (tai niitä koskevat tiedot) *eivät vaihtele mielivaltaisella tavalla*. *Ei-mielivaltaisuudella* tarkoitetaan sitä, että ilmiön toistuessa tulosvaihtoehtojen *suhteelliset frekvenssit* eli *osuudet* käyttäytyvät *tilastollisesti stabiilisti*.

Vaatimus satunnaisilmiön tulosten käyttäytymisen tilastollisesta stabiliteetista voidaan tulkita vaatimukseksi **reilusta pelistä**.

**Esimerkki 2. Reilu *vs* epäreilu peli.**

Pelaat Mr. Ebenezer Scroogea vastaan *peliä*, jolla on seuraavat *säännöt*:

(i) Mr. Scroogella on hallussaan useita *erilaisia* noppia, joiden silmälukuja *et tiedä*.

(ii) Ensin Mr. Scrooge valitsee nopistaan *yhden*.

(iii) Et saa ottaa Mr. Scroogen valitsemaa noppaa käteesi, mutta Mr. Scrooge heittää valitsemaansa noppaa *niin monta kertaa kuin haluat*.

(iv) Jokaisen heiton jälkeen Mr. Scrooge näyttää sinulle heiton *tuloksen* eli sen silmäluvun, joka on nopan ylösjääneellä tahkolla.

(v) Voitat ennalta sovitun rahasumman, jos saat selville Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut.

Vaikka et saakaan ottaa noppaa käteesi, saat suurella varmuudella Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut selville, jos *toistatat nopanheittoa* riittävän monta kertaa ja *tarkkailet* heittojen tuloksena esiintyvien silmälukujen *suhteellisia frekvenssejä*.

Oletetaan esimerkiksi, että Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut ovat

$$1, 1, 1, 2, 2, 3$$

On ilmeistä, että silmälukujen 1, 2 ja 3 suhteellisten frekvenssien on *jakauduttava* pitkässä heittosarjassa suunnilleen suhteessa

$$3 : 2 : 1$$

Siten saat Mr. Scroogen valitseman nopan silmäluvut selville toistattamalla nopanheittoja riittävän monta kertaa.

Oletetaan nyt, että Mr. Scrooge *vaihtaa noppaansa koko ajan salaten vaihdot*. Tällöin *et voi voittaa* pelissä, koska Mr. Scrooge *rikkoo tietämättäsi pelin sääntöä* (ii) *vastaan*. *Vaatimus reilusta pelistä* tarkoittaa sitä, että tällaista sääntöjen rikkomista *ei saa tapahtua*.

## 1.4. Tilastollinen tutkimus pelinä luontoa vastaan

*Tilastollista tutkimusta* voidaan kuvata **pelinä luontoa vastaan**. Tilastollisessa tutkimuksessa pyritään tekemään *luonnon* (eli *reaalimaailman*) *tilaa koskevia johtopäätöksiä luonnon* (eli *reaalimaailman*) *tilasta kerättyjen havaintojen perusteella*.

Voimme ajatella, että luonnolla on kädessään joukko ”kortteja” ja tutkija pyrkii *ottamaan selville* luonnon kädessä olevat ”kortit”, kun taas luonto pyrkii *salaamaan* ne. Peli koostuu eristä, joissa tutkija voi katsoa yhden *satunnaisesti* luonnon kädestä valitsemansa ”kortin” – *tämä on havaintojen keräämistä*.

Tutkija voi saada selville luonnon tilan eli luonnon kädessä olevat ”kortit” pelaamalla *riittävän monta erää* eli keräämällä *riittävästi havaintoja* – mutta vain sillä edellytyksellä, että luonto pelaa *reilusti* eli ei muuta pelin aikana jatkuvasti kätensä sisältöä.

*Tilastollisessa tutkimuksessa* pyritään havaintojen perusteella päättelemään, millainen on *havainnot tuottanut mekanismi*. Päättely ei onnistu, jos havainnot tuottanut mekanismi ei ole jossakin mielessä *pysyvä* eli **tilastollisesti stabiili**. Oletus havainnot tuottaneen mekanismin pysyvyydestä voidaan tulkita oletukseksi siitä, että luonto pelaa *reilusti* eli ei riko pelin sääntöjä vastaan vaihtamalla jatkuvasti kädessään olevia ”kortteja”. Olosuhteiden säilyminen vakiona takaa tavallisesti sen, että satunnaiskokeen tulokset käyttäytyvät tilastollisesti stabiilisti.

On syytä olla tietoinen siitä, että tilastotiede on kehittänyt myös sellaisia menetelmiä, joilla voidaan pyrkiä paljastamaan *muutokset* havainnot tuottaneessa mekanismissa. Tilastollisen tutkimuksen kohteena ovatkin usein seuraavat kysymykset:

(i) *Onko* havainnot tuottaneessa mekanismissa *tapahtunut muutoksia*?

(ii) *Mitkä ovat muutosten syyt*?

Jotta tilastotiede pystyisi *mallintamaan* havainnot tuottaneessa mekanismissa tapahtuneet muutokset, muutokset eivät kuitenkaan saa tapahtua *mielivaltaisella tavalla*, vaan niissä on oltava jokin *systemaattinen piirre*.

## 1.5. Todennäköisyyden määritteleminen

**Todennäköisyyslaskennan** tehtävänä on rakentaa *matemaattisia malleja* satunnaisilmiöiden *säännönmukaisille piirteille*.

Satunnaisilmiö koostuu **tulosvaihtoehdoista**, joista jokin sattuu, kun satunnaisilmiö esiintyy. Mikä tulosvaihtoehdoista sattuu, ei voida ennustaa tarkasti etukäteen, mutta ilmiön toistuessa ilmiön säännönmukaiset piirteet tulevat esiin tulosvaihtoehtojen suhteellisissa frekvensseissä eli osuuksissa.

Satunnaisilmiön tulosvaihtoehtojen yhdistelmiä eli tulosvaihtoehtojen muodostamia *joukkoja* kutsutaan todennäköisyyslaskennassa **tapahtumiksi**. Todennäköisyyslaskennan eräänä tehtävänä on määrätä satunnaisilmiön tapahtumien **todennäköisyydet**.

Mitä todennäköisyys on? Hyvän määritelmän antaminen todennäköisyydelle on osoittautunut vaikeaksi. Todennäköisyydelle on todennäköisyyslaskennan historiassa esitetty mm. seuraavat *naiivit määritelmät*:

(i) Tapahtuman **klassinen todennäköisyys** on *ko. tapahtumalle suotuisien tulosvaihtoehtojen osuus kaikista mahdollisista tulosvaihtoehdoista*.

(ii) Tapahtuman **empiirinen todennäköisyys** on *ko. tapahtuman* (tilastollisesti stabiilisti käyttäytyvä) *suhteellinen frekvenssi*.

(iii) Tapahtuman **todennäköisyys** on *ko. tapahtuman sattumisen mahdollisuuden* **mitta**.

Em. määritelmiä on tapana kutsua **naiiveiksi**, koska *ne eivät määrittele todennäköisyyttä matematiikan kannalta tyydyttävällä tavalla*.

On osoittautunut, että todennäköisyyden täsmällinen määritteleminen vaatii *aksiomaattista lähestymistapaa*. Todennäköisyyden aksioomat esitti venäläinen matemaatikko A. N. Kolmogorov 1930-luvun alussa. **Kolmogorovin aksioomien** mukaan *todennäköisyys on* **mitta** *matemaattisen mittateorian tarkoittamassa mielessä* ja siten todennäköisyydellä on samantapaiset matemaattiset ominaisuudet kuin *pituus*-, *pinta-ala*- ja *tilavuusmitoilla*; ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**. Todennäköisyyden naiivit määritelmät voidaan sisällyttää (sopivasti muotoiltuina) Kolmogorovin aksioomien muodostamaan kehikkoon todennäköisyyden *erikoistapauksina* tai *tulkintoina*.

Tarkastelemme seuraavassa todennäköisyyden naiiveja määritelmiä lähemmin.

### Klassinen todennäköisyys

Olkoon *satunnaisilmiöllä n yhtä todennäköistä tulosvaihtoehtoa* ja tarkastellaan ilmiön *tapahtumaa*, johon liittyy *tulosvaihtoehdoista k* kpl, joita sanotaan ko. tapahtumalle *suotuisiksi*. Tällöin ko. tapahtuman **klassinen todennäköisyys** $p$ on ko. tapahtumalle suotuisien tulosvaihto-ehtojen *osuus* satunnais-ilmiön *kaikista mahdollisista* tulosvaihtoehdoista:

$$p = \frac{k}{n}$$

Klassisen todennäköisyyden käsite sopii erityisesti *uhkapelien* analysointiin. Uhkapeleissä pelitapahtumien todennäköisyydet voidaan tavallisesti määrätä *päättelemällä* ne pelin säännöistä. *Historiallisesti* todennäköisyyslaskenta sai alkunsa 1600-luvulla eräisiin noppapeleihin liittyvien ongelmien ratkaisuyrityksistä.

On syytä huomata, että tulosvaihtoehtojen *lukumäärien laskeminen* on usein epätriviaali tehtävä ja apuna tarvitaan tavallisesti *kombinatoriikaksi* kutsuttua matematiikan osa-aluetta; ks. lukua **Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka**.

### Ongelmat klassisen todennäköisyyden määritelmässä

Klassisen todennäköisyyden määritelmä ei anna mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, joihin liittyvät tulosvaihtoehdot *eivät ole yhtä todennäköisiä*. Määritelmä ei myöskään anna mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, joihin liittyy *äärettömän monta tulosvaihtoehtoa*.

### Klassinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta yhä uudelleen ja tarkkailemme jonkin *tapahtuman suhteellisen frekvenssin* käyttäytymistä koetoistojen aikana. **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan *tapahtuman suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koe-toistosta toiseen, mutta saa keskimäärin ko. tapahtuman todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja. Vahvistavatko havainnot tämän, on empiirinen kysymys.*

**Esimerkki 1. Nopanheitto.**

Heitetään *virheetöntä* noppaa. Tällöin tulosvaihtoehtoja on 6 kpl:

Silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6

Tarkastellaan tapahtumia

$A$ = ”Silmäluku on parillinen”

$B$ = ”Silmäluku < 3”

Tapahtumalle $A$ *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 3 kpl: Silmäluvut 2, 4, 6

Tapahtumalle $B$ *suotuisia* tulosvaihtoehtoja on 2 kpl: Silmäluvut 1, 2

Tapahtuman $A$ klassinen todennäköisyys on

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Tapahtuman $B$ klassinen todennäköisyys on

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0.333$$

Siten tapahtuma $A$ on *todennäköisempi* kuin tapahtuma $B$.

Oletetaan, että heität noppaa toistuvasti. *Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan* mukaan *on odotettavissa*, että tapahtuma $A$ esiintyy *useammin kuin* tapahtuma $B$ niin, että keskimäärin puolet heitoista antaa tulokseksi tapahtuman $A$ ja keskimäärin 1/3 heitoista antaa tulokseksi tapahtuman $B$.

## Empiirinen todennäköisyys

Tarkastellaan *satunnaiskoetta*, jota voidaan *toistaa* niin, että seuraavat ehdot pätevät:

(i) Kokeen olosuhteet *säilyvät muuttumattomina* koetoistosta toiseen.

(ii) Koetoistot *ovat riippumattomia* siinä mielessä, että yhdenkään koetoiston tulos ei riipu siitä mitä tuloksia muissa koetoistoissa saadaan.

Tarkkaillaan jonkin *tapahtuman* esiintymistä koetoistojen aikana. Jos ko. tapahtuman *suhteellinen frekvenssi* eli *osuus koetoistoista* lähestyy jotakin *kiinteätä lukua*, kun koetoistojen lukumäärää kasvatetaan, kutsumme lukua ko. tapahtuman **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

Oletetaan siis, että satunnaiskoetta *toistetaan* $n$ kertaa. Olkoon $f$ ko. tapahtuman **frekvenssi** eli *lukumäärä* koetoistojen joukossa. Tällöin

$$\frac{f}{n}$$

on ko. tapahtuman **suhteellinen frekvenssi** eli *suhteellinen osuus* koetoistoista. Annetaan nyt koetoistojen lukumäärän $n$ kasvaa rajatta. Jos suhteellinen frekvenssi $f/n$ lähestyy tällöin (jossakin mielessä) lukua $p$ eli

$$\frac{f}{n}\to p$$

niin sanomme, että luku $p$ on ko. tapahtuman **empiirinen todennäköisyys**.

**Huomautuksia:**

- Suhteellisen frekvenssin $f/n$ rajakäyttäytyminen koetoistojen lukumäärän $n$ kasvaessa *ei ole* tavanomaista lukujonokonvergenssia. Todennäköisyyslaskennan konvergenssikäsitteitä tarkastellaan luvussa **Stokastikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.
- Voimme sanoa (huonolla suomenkielellä), että tapahtuman empiirinen todennäköisyys on ko. tapahtuman suhteellinen frekvenssi ”*pitkässä juoksussa*”.
- Empiirisen todennäköisyyden määritelmä edellyttää tapahtuman suhteellisilta frekvensseiltä *tilastollista stabiliteettia*.
- *Matemaattista todennäköisyyden käsitettä* voidaan pitää empiirisen todennäköisyyden käsitteen *idealisointina*.

### Ongelmat empiirisen todennäköisyyden määritelmässä

Empiirinen todennäköisyys on *empiirinen käsite* siinä mielessä, että tapahtuman suhteellisen frekvenssin $f/n$ määrääminen vaatii satunnaiskokeen *toistamista* ja *havaintojen keräämistä*.

Todellisuudessa tapahtuman empiiristä todennäköisyyttä *ei voida* – nimestään huolimatta – *määrätä kokeellisesti*, koska määritelmä vaatii satunnaiskokeen toistamista *äärettömän monta kertaa*. Empiirisen todennäköisyyden käsite ei myöskään anna mahdollisuutta puhua sellaisten tapahtumien todennäköisyyksistä, joista *ei ole havaintoja*. Lisäksi on syytä huomata, että empiirisen todennäköisyyden määritelmässä esiintyvä raja-arvo *ei ole hyvin määritelty*, koska mikään ei takaa, että määritelmässä esiintyvä raja-arvo *on olemassa*.

Empiiristä todennäköisyyttä voidaan pikemminkin pitää *tilastollisesti stabiilisti käyttäytyvän suhteellisen frekvenssin ominaisuutena* kuin *todennäköisyyden määritelmänä*.

### Empiirinen todennäköisyys ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta yhä uudelleen ja tarkkailemme jonkin *tapahtuman suhteellisen frekvenssin* käyttäytymistä koetoistojen aikana. **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan *tapahtuman suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin ko. tapahtuman todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja*. *Vahvistavatko havainnot tämän, on empiirinen kysymys.*

**Esimerkki 2. Tilastollinen laadunvalvonta.**

Tehdas valmistaa erästä sähkölaitetta 300 kpl päivässä. Laitteille on asetettu niin ankarat laatukriteerit, että osa tehtaan valmistamista laitteista ei täytä niitä. Tehdään oletus, että vialliset laitteet syntyvät tuotannossa *täysin sattumanvaraisesti*.

Merkitään:

K = Laite on kelvollinen

V = Laite on viallinen

Oletetaan, että eräänä päivänä löydetään 6 viallista laitetta.

| | |
|---|---|
| Satunnaisilmiö: | Laitteen laatu |
| Koetoisto: | Valmistetaan 1 laite |
| Koetoistojen lkm $n$: | 300 |
| Tulosvaihtoehto V: | Laite on viallinen |
| Viallisten laitteiden *frekvenssi*: | $f = 6$ |

Viallisten laitteiden *suhteellinen frekvenssi*:

$$\frac{f}{n} = \frac{6}{300} = 0.02$$

Oletetaan nyt, että vaikka viallisten laitteiden suhteellinen osuus vaihteleekin päivästä toiseen, se pysyy kuitenkin *suunnilleen samana* eli, että viallisten laitteiden suhteellinen osuus käyttäytyy *tilastollisesti stabiilisti*.

Tällöin suhteellista frekvenssiä

$$\frac{f}{n}=\frac{6}{300}=0.02$$

voidaan kutsua *todennäköisyydeksi* saada viallinen laite, jos tehtaan valmistamien laitteiden joukosta *poimitaan satunnaisesti* 1 laite tarkastettavaksi.

**Esimerkki 3. Satunnaisotanta.**

Väestötilaston mukaan Suomen väestö jakautui vuoden 1998 lopussa miehiin ja naisiin seuraavasti:

| | |
|---|---|
| Miehet | 2 516 000 |
| Naiset | 2 643 600 |
| **Yhteensä** | **5 159 600** |

Tyypillisessä *kyselytutkimuksessa* kyselyn kohteiksi poimitaan 300-2000 suomalaista kaikkien suomalaisten joukosta käyttäen (yksinkertaista) *satunnaisotantaa*; lisätietoja otannasta: ks. monistetta **Tilastolliset menetelmät**.

Satunnaisotoksen poimimista voidaan kuvata *arvontana,* jossa jokaista suomalaista vastaa hänen nimellään varustettu arpalippu, arvat on asetettu (hyvin sekoitettuina) suureen uurnaan ja uurnasta poimitaan *satunnaisesti* haluttu määrä arpalippuja, jolloin *otokseen* tulevat poimituksi ne suomalaiset, joiden nimet esiintyvät poimituissa lipuissa.

*Todennäköisyys* poimia tietty henkilö otokseen on

$$\frac{1}{5159600}$$

Miesten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2516000}{5159600}=0.488$$

Naisten *suhteellinen osuus* eli *suhteellinen frekvenssi* kaikkien suomalaisten joukosta:

$$\frac{2643600}{5159600}=0.512$$

Koska suomalaisia on näinkin paljon, miesten ja naisten suhteelliset frekvenssit voidaan *tulkita* empiirisen todennäköisyyden määritelmän mukaisiksi todennäköisyyksiksi.

Siten *todennäköisyys*, että satunnaisesti suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *mies*, on 0.488 ja *todennäköisyys*, että satunnaisesti suomalaisten joukosta poimittu henkilö on *nainen*, on 0.512. Todennäköisyys poimia suomalaisten joukosta nainen on *suurempi kuin* todennäköisyys poimia mies, koska naisia on suomalaisten joukossa *enemmän kuin* miehiä.

Oletetaan, että suomalaisten joukosta poimitaan *arpomalla* yhä uusia 1000 henkilön *satunnaisotoksia*. Tällöin otokseen poimittujen miesten ja naisten suhteelliset osuudet *vaihtelevat otoksesta toiseen*, mutta otokseen poimituista henkilöistä *keskimäärin* 48.8 % on miehiä ja *keskimäärin* 51.2 % on naisia. *Tilastollinen stabiliteetti* on sitä, että nämä suhdeluvut pysyvät otoksesta toiseen *suunnilleen samoina*.

### Todennäköisyys mittana

Hyödyllisen *mielikuvan* todennäköisyyden luonteesta antaa seuraava *naiivi määritelmä*: **Todennäköisyys** on **mitta**, joka mittaa satunnaisilmiön tapahtumien *sattumisen mahdollisuutta*.

### Ongelmat todennäköisyyden naiivissa määritelmässä mittana

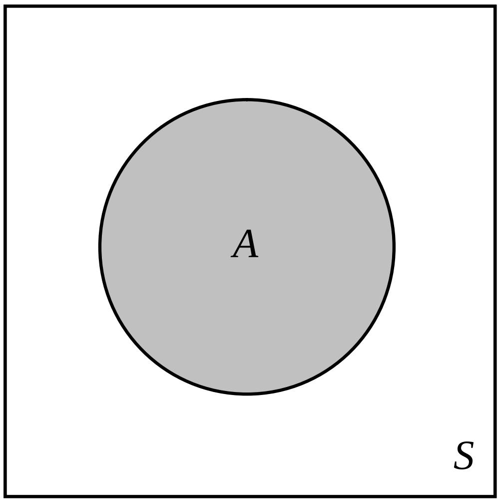
Määritelmä *ei täytä hyvän määritelmän tunnusmerkkejä*, koska se on *kehämääritelmä*: Sattumisen mahdollisuus ja todennäköisyys *tarkoittavat* suunnilleen *samaa*.

### Kolmogorovin aksioomat todennäköisyydelle

Mielikuva todennäköisyydestä satunnaisilmiöiden tapahtumien sattumisen mahdollisuuden mittana voidaan täsmentää matemaattisesti ns. **Kolmogorovin aksioomiksi**; ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**.

*Kolmogorovin aksioomien* mukaan todennäköisyys on *mitta matemaattisen mittateorian tarkoittamassa mielessä*. Aksioomien mukaan *todennäköisyysmitta* käyttäytyy samalla tavalla kuin esimerkiksi *pituus-*, *pinta-ala-* tai *tilavuusmitta*, lukuun ottamatta sitä, että todennäköisyysmitalla on ylärajana *varman tapahtuman todennäköisyys*, joksi sovitaan luku 1.

Todennäköisyyden tulkinnasta mittana seuraa se, että todennäköisyyden laskusääntöjä voidaan havainnollistaa joukko-opin operaatioiden havainnollistamisessa käytettävien **Venn-diagrammien** avulla.




Venn-diagrammi konstruoidaan seuraavalla tavalla:

(i) Kuvataan tapahtumia *tasoalueilla*.

(ii) Kuvataan tapahtumien todennäköisyyksiä *tasoalueiden pinta-aloilla*.

Viereisessä diagrammissa satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen muodostamaa *otosavaruutta* $S$ on kuvattu suorakaiteella ja ko. satunnaisilmiön *tapahtumaa* $A$ on kuvattu varjostetulla ympyrällä.

## 1.6. Satunnaisilmiöt ja niiden tilastolliset mallit

**Tilastotieteen** tehtävänä on kehittää ja soveltaa **tilastollisiksi malleiksi** kutsuttuja *matemaattisia malleja* satunnaisilmiöille.

Mallien avulla pyritään tekemään ilmiöitä koskevia *johtopäätöksiä* ilmiöstä kerättyjen **havaintojen** perusteella. Malleja kutsutaan tilastotieteessä ja sen sovelluksissa **tilastollisiksi malleiksi** ja niiden avulla pyritään erottamaan ja kuvamaan satunnaisilmiöiden *systemaattiset* ja *satunnaiset piirteet*.

Koska tilastolliset mallit perustuvat **todennäköisyyslaskentaan**, niitä kutsutaan usein myös **stokastisiksi malleiksi** tai **todennäköisyysmalleiksi**.

Satunnaisilmiön **tilastollinen malli** koostuu seuraavista kahdesta osasta:

(i) Satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten **tulosvaihtoehtojen** kuvaus.

(ii) Tulosvaihtoehtojen **todennäköisyyksien** kuvaus.

Satunnaisilmiön tilastollinen malli esitetään satunnaisilmiön tulosvaihtoja numeerisessa muodossa kuvaavaan *satunnaismuuttujan* ja sen *todennäköisyysjakauman* avulla; ks. lukua **Satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat**.

Vaikka tilastollisten mallien rakentamista käsitellään vasta monisteessa **Tilastolliset menetelmät**, on hyvä painaa mieleensä jo nyt, että tilastollisen mallin rakentamiseen on aina syytä liittää seuraavat työvaiheet:

1. **Mallin muodostaminen** tutkimuksen kohteena olevalle satunnaisilmiölle.
2. Ilmiötä koskevien **havaintojen kerääminen**.
3. Mallin **parametrien estimointi** eli parametrien arvojen määrääminen kerättyjen havaintojen perusteella.
4. Mallin ja kerättyjen havaintojen **yhteensopivuuden testaaminen**.

Jos mallissa havaitaan vaiheessa 4 puutteita, on mallin rakentamisessa palattava vaiheeseen 1.

# 2. Joukko-opin peruskäsitteet



Todennäköisyyslaskennan historian tärkeimpiä teoreettisia oivalluksia on ollut se, että satunnaisilmiöiden tapahtumia voidaan käsitellä **joukkoina** ja todennäköisyydellä on matemaattisesti samanlaiset ominaisuudet kuin pituus-, pinta-ala- tai tilavuus**mitalla**. Tästä seuraa se, että **joukko-oppi** muodostaa matemaattisen todennäköisyysteorian perustan.

Tässä luvussa esitellään *naiivin* **joukko-opin peruskäsitteet** ja **-määritelmät** siinä laajuudessa kuin niitä tarvitaan todennäköisyyslaskennassa; joukko-oppia tarkastellaan lähes koko perus-matematiikan vaatimassa laajuudessa liitteessä **Joukko-oppi**.

### Avainsanat:

Alkio, Erotus, Joukko, Komplementti, Kuulua joukkoon, Leikkaus, Olla osajoukkona, Osajoukko, Perusjoukko, Pistevieraus, Tyhjä joukko, Unioni, Venn-diagrammi, Yhdiste

## 2.1. Joukko ja sen alkiot

**Joukko** on joukon **alkioiksi** kutsuttujen *olioiden kokoelma*. Sanomme, että joukko on **hyvin määritelty**, jos *jokaisesta oliosta voidaan sanoa onko se joukon alkio vai ei*. Joukko on siis hyvin määritelty, jos *sen alkiot tunnetaan*. Joukkoja määriteltäessä on tärkeätä spesifioida **perusjoukko**, jonka alkioita kaikkien tarkasteltavien olioiden on oltava.

Merkitsemme joukkoja isoilla kirjaimilla

$$A, B, C, \ldots , X, \ldots$$

ja joukon alkiota pienillä kirjaimilla

$$a, b, c, \ldots , x, \ldots$$

Jos joukko on **äärellinen**, se voidaan määritellä luettelemalla sen alkiot. Jos äärellisen joukon $X$ alkiot ovat

$$x_1, x_2, \ldots , x_n$$

niin merkitsemme

$$X = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$$

**Esimerkki 1. Nopan silmälukujen muodostama joukko.**

Olkoon $B$ tavallisen nopan silmälukujen muodostama joukko. Voimme tällöin kirjoittaa:

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

*Joukon ja sen alkioiden suhde* on **joukko-opin perusrelaatio**. Jos *x on joukon A alkio* eli $x$ **kuuluu** *joukkoon A*, niin merkitsemme

$$x \in A$$

Jos *x ei ole joukon A alkio* eli $x$ **ei kuulu** *joukkoon A*, niin merkitsemme

$$x \notin A$$

**Esimerkki 2. Nopan silmälukujen muodostama joukko.**

Olkoon $B$ nopan silmälukujen muodostama joukko, jolloin

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tällöin

$$2 \in B$$

ja

$$7 \notin B$$

Matematiikassa joukko määritellään tavallisesti antamalla *looginen ehto*, jonka joukon alkioiden on toteutettava. Jos $A$ on niiden perusjoukon $S$ alkioiden $x$ joukko, jotka *toteuttavat ehdon* $P(x)$ eli joille *lause* $P(x)$ *on tosi*, niin merkitsemme

$$A = \{x \in S \mid P(x)\}$$

**Esimerkki 3. Parittomien positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko.**

Olkoon      luonnollisten lukujen 0, 1, 2, 3, … joukko. Tällöin joukko

$$C = \{k \in \quad | \, k = 2n+1 \, , \, n \in \quad \}$$

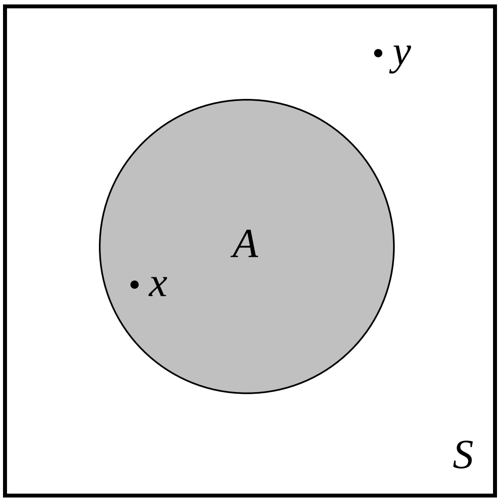
on parittomien positiivisten kokonaislukujen 1, 3, 5, … muodostama joukko.

Esimerkiksi $7 \in C$ , koska luku 7 voidaan esittää muodossa

$$7 = 2\times3 + 1$$

jossa $3 \in \quad$ . Sen sijaan esimerkiksi $8 \notin C$ .

## 2.2. Venn-diagrammit




Joukko-opin käsitteitä ja operaatioita voidaan havainnollistaa ns. **Venn-diagrammien** avulla.

Venn-diagrammi konstruoidaan seuraavalla tavalla:

(i) Kuvataan perusjoukkoa *suorakaiteella*.

(ii) Kuvataan perusjoukossa määriteltyjä joukkoja *suorakaiteen osa-alueilla*.

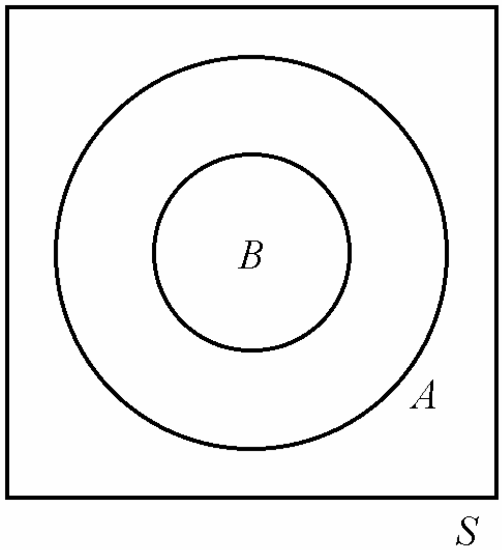
Venn-diagrammi oikealla havainnollistaa sitä, että joukko *A* on perusjoukossa *S* määritelty joukko. Lisäksi kuva havainnollistaa sitä, että perusjoukon *S* alkio *x on* joukon *A* alkio:

$$x \in A$$

ja perusjoukon *S* alkio *y ei ole* joukon *A* alkio:

$$y \notin A$$

## 2.3. Osajoukko




Olkoot joukot *A* ja *B* perusjoukossa *S* määriteltyjä joukkoja.

Jos jokainen joukon *B* alkio on myös joukon *A* alkio eli

$$x \in B \Rightarrow x \in A$$

niin joukko *B* on joukon *A* **osajoukko** ja merkitsemme

$$B \subset A$$

Havainnollistus: ks. Venn-diagrammia oikealla.

**Esimerkki 1. Parittomien positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko.**

Joukko

$$C = \{k \in \quad | \, k = 2n+1 \, , \, n \in \quad \}$$

on parittomien positiivisten kokonaislukujen muodostama joukko. Olkoon

$$D = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$

Tällöin

$$D \subset C$$

## 2.4. Tyhjä joukko

Joukko on **tyhjä**, jos siinä ei ole yhtään alkiota. Merkitsemme tyhjää joukkoa symbolilla

$$\varnothing$$

Tyhjä joukko on kaikkien joukkojen osajoukko. Jos siis $A$ on perusjoukon $S$ mielivaltainen osajoukko, niin

$$\varnothing \subset A$$

## 2.5. Joukko-opin perusoperaatiot

Olkoot joukot $A$ ja $B$ perusjoukon $S$ osajoukkoja. Tarkastelemme seuraavien joukoista $A$ ja $B$ *johdettujen* perusjoukon $S$ osajoukkojen määrittelemistä:

(i) Joukon $A$ **komplementtijoukko**.

(ii) Joukkojen $A$ ja $B$ **unioni** eli **yhdiste**.

(iii) Joukkojen $A$ ja $B$ **leikkaus**.

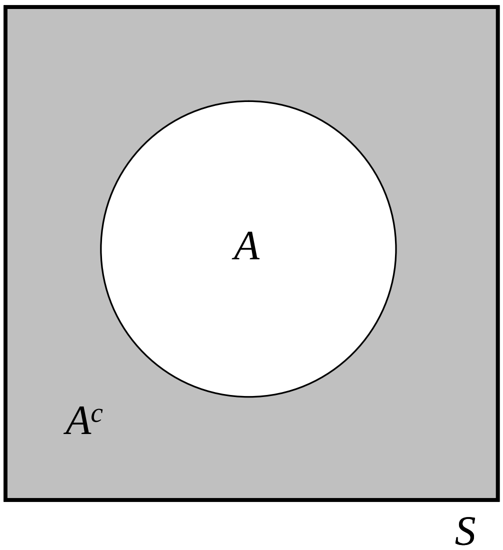
(iv) Joukkojen $A$ ja $B$ **erotus**.

### Komplementtijoukko

Olkoon joukko $A$ perusjoukon $S$ osajoukko.

Joukon $A$ **komplementti** $A^c$ on niiden perusjoukon $S$ alkioiden joukko, jotka *eivät kuulu* joukkoon $A$:

$$A^c = \{x \in S \mid x \notin A\}$$




**Esimerkki 1.**

Olkoon

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ja

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Tällöin

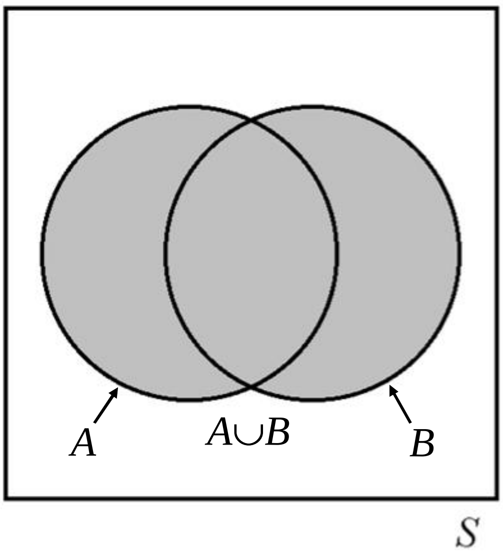
$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

### Yhdiste

Olkoot joukot $A$ ja $B$ perusjoukon $S$ osajoukkoja.

Joukkojen $A$ ja $B$ **unioni** eli **yhdiste** $A \cup B$ on niiden perusjoukon $S$ alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$ *tai* joukkoon $B$:

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$$




Huomaa, että lause

$$\text{"}x \in A \text{ tai } x \in B\text{"}$$

tarkoittaa tässä sitä, että alkio $x$ saa kuulua joukkoon $A$ *tai* joukkoon $B$ *tai molempiin*.

**Esimerkki 2.**

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

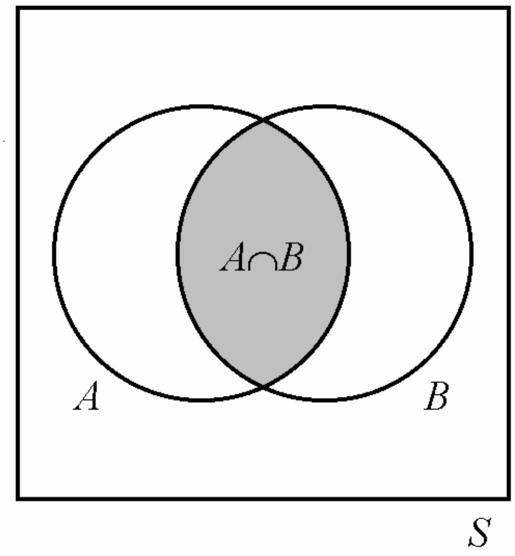
ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

## Leikkaus




Olkoot joukot $A$ ja $B$ perusjoukon $S$ osajoukkoja.

Joukkojen $A$ ja $B$ **leikkaus** $A \cap B$ on niiden perusjoukon $S$ alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$ *ja* joukkoon $B$:

$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$$

**Esimerkki 3.**

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

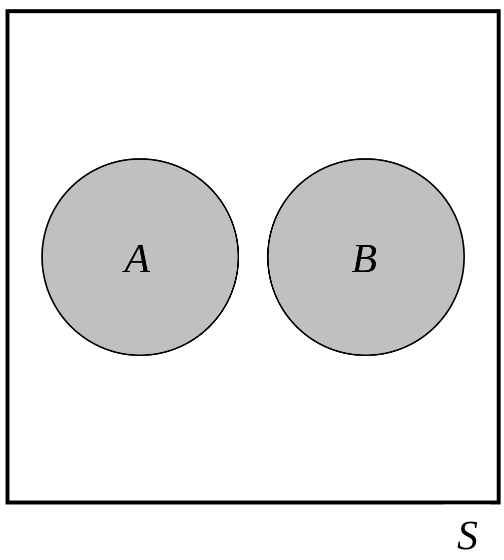
ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

$$A \cap B = \{2\}$$

## Pistevieraat joukot




Jos

$$A \cap B = \varnothing$$

niin sanomme, että joukot $A$ ja $B$ ovat **pistevieraita**. Siten pistevierailla joukoilla *ei ole* yhteisiä alkioita.

**Esimerkki 4.**

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{3, 4\}$$

Tällöin

$$A \cap B = \varnothing$$

## Erotus

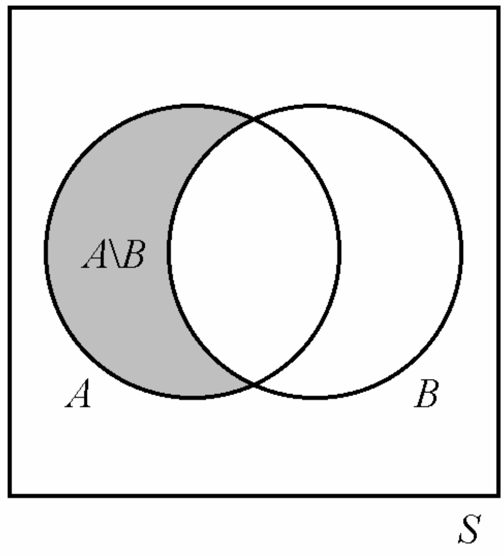
Olkoot joukot $A$ ja $B$ perusjoukon $S$ osajoukkoja.

Joukkojen $A$ ja $B$ **erotus** $A \backslash B$ on niiden perusjoukon $S$ alkioiden joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$, *mutta eivät kuulu* joukkoon $B$:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

Selvästi

$$A \backslash B = A \cap B^c$$




**Esimerkki 5.**

Olkoon

$$A = \{1, 2\}$$

ja

$$B = \{2, 3, 4\}$$

Tällöin

$$A \backslash B = \{1\}$$

$$B \backslash A = \{3, 4\}$$

# 3. Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet



Tässä luvussa tarkastellaan **todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä**: **satunnaisilmiö**, **otosavaruus**, **tapahtuma** ja **alkeistapahtuma**. Lisäksi tarkastelemme **todennäköisyyden perusominaisuuksia** sekä liitämme ne luvun **Johdanto** kappaleessa **Todennäköisyyden määritteleminen** esitettyihin todennäköisyyden naiiveihin määritelmiin.

### Avainsanat:

Alkeistapahtuma, Alkio, Empiirinen todennäköisyys, Frekvenssi, Frekvenssitulkinta, Joukko, Klassinen todennäköisyys, Koetoisto, Komplementtitapahtuma, Lukumääräfunktio, Mahdoton tapahtuma, Mitta, Osajoukko, Otosavaruus, Perusjoukko, Sattuma, Satunnaisilmiö, Satunnaiskoe, Suhteellinen frekvenssi, Suhteellinen osuus, Suotuisa alkeistapahtuma, Symmetrisyys, Tapahtuma, Todennäköisyys, Tulosvaihtoehto, Tyhjä joukko, Varma tapahtuma

## 3.1. Satunnaisilmiöt

Luvussa **Johdanto** esitimme satunnaisilmiölle seuraavan määritelmän: Reaalimaailman ilmiö on **stokastinen ilmiö** eli **satunnaisilmiö**, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

(i) Ilmiö voi päätyä *alkutilastaan* useisiin erilaisiin *lopputiloihin* eli ilmiöllä on useita erilaisia *vaihtoehtoisia tuloksia*.

(ii) Ilmiön alkutilan perusteella *ei voida ennustaa* tarkasti ilmiön lopputilaa eli sitä, mikä ilmiön mahdollisista *tulosvaihtoehdoista realisoituu* eli *toteutuu*.

(iii) Vaikka ilmiön lopputilaa ei voida ennustaa tarkasti, tulosvaihtoehtojen *suhteellisten frekvenssien* eli *osuuksien voidaan nähdä* ilmiön toistuessa *käyttäytyvän säännönmukaisesti*.

Kutsumme *satunnaisilmiöitä* **satunnaiskokeiksi** ja *satunnaisilmiön esiintymisiä* **koetoistoiksi**.

## 3.2. Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet

Todennäköisyyslaskennan *peruskäsitteet* ovat *alkeistapahtuma*, *otosavaruus* ja *tapahtuma*:

(i) Sanomme, että satunnaisilmiön tulosvaihtoehto on **alkeistapahtuma**, jos satunnaisilmiötä ei voida ”purkaa” sitä alkeellisempiin tulosvaihtoehtoihin

(ii) Kutsumme satunnaisilmiön tai satunnaiskokeen *kaikkien* alkeistapahtumien muodostamaa joukkoa **otosavaruudeksi**.

(iii) Satunnaisilmiön **tapahtumalla** tarkoitetaan jotakin otosavaruuden alkioiden muodostamaa joukkoa.

Merkitsemme otosavaruutta tavallisesti isolla kirjaimella $S$ (otosavaruus = *engl*. sample space) ja sen alkioita pienellä kirjaimella $s$. Jos alkeistapahtuma eli alkio $s$ *kuuluu* otosavaruuteen $S$, niin merkitsemme

$$s \in S$$

Jos alkeistapahtuma $s$ *ei kuulu* otosavaruuteen $S$ merkitsemme

$$s \notin S$$

*Otosavaruus S* muodostaa siis sen *perusjoukon*, jossa satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoja tarkastellaan. Koska satunnaisilmiötä ei voida purkaa alkeistapahtumia alkeellisempiin tulos-vaihtoehtoihin, niin *alkeistapahtumat* ovat otosavaruuden *alkioita*. Tarkasteltavan satunnaisilmiön *tapahtumat* ovat otosavaruuden $S$ alkioiden eli alkeistapahtumien muodostamia otosavaruuden $S$ *osajoukkoja*.

Siten voimme asettaa *todennäköisyyslaskennan* ja *joukko-opin peruskäsitteet* vastaamaan seuraavalla tavalla toisiaan:

| | | |
|---|---|---|
| **Otosavaruus** | ↔ | **Perusjoukko** |
| **Tapahtuma** | ↔ | **Perusjoukon osajoukko** |
| **Mahdoton tapahtuma** | ↔ | **Tyhjä joukko** |
| **Alkeistapahtuma** | ↔ | **Alkio** |

Kun sanomme, että jokin *tapahtuma sattuu*, tarkoitamme tällä aina sitä, että *jokin tapahtumaan liittyvistä alkeistapahtumista sattuu*.

**Esimerkki 1. Sukupuolen määräytyminen satunnaisilmiönä.**

Satunnaisilmiö: Lapsen sukupuolen määräytyminen

Otosavaruus:

$S$ = {Tyttö, Poika}

Alkeistapahtumat:

Tyttö, Poika

**Esimerkki 2. Nopanheitto satunnaisilmiönä.**

Satunnaisilmiö: Nopanheitto

Otosavaruus: Nopan silmälukujen joukko

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alkeistapahtumat: Silmäluvut

1, 2, 3, 4, 5, 6

Esimerkki tapahtumasta:

$A$ = ”Silmäluku on parillinen” = $\{2, 4, 6\}$

**Esimerkki 3. Kahden nopan heitto satunnaisilmiönä.**

Satunnaisilmiö: Kahden nopan heitto

Otosavaruus $S$: Silmälukuparien $(i, j)$ (36 kpl) joukko, jossa

$i$ = 1. nopanheiton silmäluku, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$j$ = 2. nopanheiton silmäluku, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Siten

$$S = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,;\; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Otosavaruuden $S$ alkiot on kätevintä esittää *taulukkomuodossa* seuraavalla tavalla:

| **(*i*, *j*)** | ***j* = tulos 2. nopan heitosta** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***i* = tulos 1. nopan-heitosta** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| **2** | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| **3** | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| **4** | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| **5** | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| **6** | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Olkoon

$A$ = ”Kummallakin nopanheitolla saadaan sama silmäluku”

$$= \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$= \{(i, j) \in S \mid i = j\ , j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Tällöin

$$A \subset S$$

$$(2,2) \in A$$

$$(6,5) \notin A$$

Sanomme, että tapahtuma on **varma**, jos se *esiintyy aina*, kun satunnaisilmiö toistuu. *Otosavaruus S* itse on selvästi varma tapahtuma. Sanomme, että tapahtuma on **mahdoton**, jos se *ei voi esiintyä koskaan*, kun satunnaisilmiö toistuu. *Tyhjä joukko* ∅ on selvästi mahdoton tapahtuma.

**Esimerkki 4. Rahanheitto.**

Satunnaisilmiö: Rahanheitto.

Otosavaruus:

$$S = \{\text{Kruuna, Klaava}\}$$

Koska rahaa heitettäessä tuloksena on aina kruuna tai klaava, niin $S$ on varma tapahtuma.

**Esimerkki 5. Nopanheitto.**

Satunnaisilmiö: Nopan heitto.

Otosavaruus: Silmälukujen joukko

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Koska tavallista noppaa heitettäessä tuloksena ei voi olla silmäluku 7, niin {7} on noppaa heitettäessä mahdoton tapahtuma.

## 3.3. Todennäköisyys ja sen perusominaisuudet

Olkoon $A$ jokin otosavaruuden $S$ *tapahtuma* eli olkoon

$$A \subset S$$

**Todennäköisyys**

$$\Pr(\cdot)$$

on *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen otosavaruuden $S$ tapahtumaan $A$ reaaliluvun:

$$\Pr(A) \in$$

### Todennäköisyyden perusominaisuudet

(i) Olkoon $A$ jokin *otosavaruuden S tapahtuma*. Tällöin

$$0 \le \Pr(A) \le 1$$

(ii) Samaistetaan tyhjä joukko ∅ ja **mahdoton tapahtuma** ja sovitaan, että

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

(iii) Samaistetaan otosavaruus $S$ ja **varma tapahtuma** ja sovitaan, että

$$\Pr(S) = 1$$

### Todennäköisyyksien vertailu

Jos

$$\Pr(A) > \Pr(B)$$

niin sanomme

”Tapahtuma $A$ on **todennäköisempi** kuin tapahtuma $B$”

tai

”Tapahtuma $B$ on **epätodennäköisempi** kuin tapahtuma $A$”

### Todennäköisyyksien vertailu ja todennäköisyyden frekvenssitulkinta

Mitä *todennäköisempi* tapahtuma on, sitä *useammin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *suurempi* on (yleensä) tapahtuman *havaittu* suhteellinen frekvenssi ja mitä *epätodennäköisempi* tapahtuma on, sitä *harvemmin* tapahtumalla on taipumus esiintyä satunnaisilmiön toistuessa eli sitä *pienempi* on (yleensä) tapahtuman *havaittu* suhteellinen frekvenssi.

## 3.4. Klassinen todennäköisyys

### Symmetriset alkeistapahtumat

Oletetaan, että äärellisen otosavaruuden

$$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

alkeistapahtumat

$$s_i \,,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

ovat *yhtä todennäköisiä* eli

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n} \,,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

Tällöin sanomme, että alkeistapahtumat $s_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ ovat **symmetrisiä**. *Klassisen todennäköisyyden määritelmä* edellyttää sitä, että otosavaruus on äärellinen ja sen alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.

### Alkeistapahtumien symmetria ja uhkapelit

Useimmissa uhkapeleissä *pelin säännöt edellyttävät, että peliin liittyvät alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.*

Tyypillisiä uhkapelien säännöissä esitettyjä *symmetriavaatimuksia* ovat seuraavat:

(i) Käytettävien pelivälineiden (esim. nopan, rahan tai rulettipyörän) on oltava *fysikaalisesti symmetrisiä.*

(ii) Käytettävillä pelivälineillä (esim. arpalipuilla tai korteilla) on oltava *sama todennäköisyys tulla valituiksi* tai *jaetuiksi*. Huomaa, että tämä vaatimus edellyttää pelivälineiden (esim. arpalippujen tai korttien) huolellista *sekoittamista*.

Otosavaruuden alkeistapahtumien symmetrisyyttä voidaan vain harvoin *perustella* uhkapelien ulkopuolella. Oletus alkeistapahtumien symmetrisyydestä on *oletus*, jota voidaan *testata* tilastollisesti, jos ko. satunnaisilmiöstä kerätään *havaintoja*.

## Lukumääräfunktio

Olkoon

$$n_A = n(A)$$

funktio, joka kertoo *joukon A alkioiden lukumäärän*. Jos siis

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

on äärellinen joukko, jonka alkioiden lukumäärä on $k$, niin

$$n_A = n(A) = k$$

Kutsumme funktiota $n(\cdot)$ **lukumääräfunktioksi**.

## Klassisen todennäköisyyden määritelmä

Olkoon tapahtuma $A$ otosavaruuden $S$ osajoukko. Tällöin tapahtuman $A$ **klassinen todennäköisyys** $\Pr_c(A)$ saadaan määräämällä *tapahtumalle A suotuisien alkeistapahtumien osuus kaikista mahdollisista alkeistapahtumista* eli

$$\Pr_c(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

jossa

$n_A = n(A)$ = tapahtumalle $A$ *suotuisien* alkeistapahtumien lukumäärä
= joukkoon $A$ kuuluvien alkeistapahtumien lukumäärä

ja

$n_S = n(S)$ = *kaikkien mahdollisten* alkeistapahtumien lukumäärä
= otosavaruuteen $S$ kuuluvien alkeistapahtumien lukumäärä

On helppo nähdä, että klassisella todennäköisyydellä on edellä esitetyt todennäköisyyden perusominaisuudet.

**Perustelu:**

Oletetaan, että

$$n(S) = n$$

(i) Olkoon $A$ jokin *otosavaruuden S tapahtuma* ja

$$n(A) = k$$

Koska

$$A \subset S$$

niin

$$n(A) = k \le n = n(S)$$

Siten

$$0 \le \Pr_c(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n} \le 1$$

(ii) Koska

$$n(\varnothing) = 0$$

niin

$$\Pr_c(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{0}{n} = 0$$

(iii) Koska

$$n(S) = n$$

niin

$$\Pr_c(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = \frac{n}{n} = 1$$

■

## 3.5. Empiirinen todennäköisyys

Tarkastellaan *satunnaiskoetta*, jota voidaan *toistaa* siten, että seuraavat ehdot pätevät:

(i) Kokeen olosuhteet *säilyvät muuttumattomina* koetoistosta toiseen.

(ii) Koetoistot *ovat riippumattomia* siinä mielessä, että yhdenkään koetoiston tulos ei riipu siitä mitä tuloksia muissa koetoistoissa saadaan.

Tarkkaillaan *tapahtuman A* esiintymistä koetoistojen aikana. Jos tapahtuman *A suhteellinen frekvenssi* eli *osuus koetoistoista* lähestyy jotakin kiinteätä lukua koetoistojen lukumäärän kasvaessa rajatta, lukua kutsutaan tapahtuman *A* **empiiriseksi todennäköisyydeksi**.

Oletetaan, että satunnaiskoetta *toistetaan n* kertaa. Olkoon $f_A$ tapahtuman *A* **frekvenssi** eli *lukumäärä* koetoistojen joukossa. Tällöin

$$\frac{f_A}{n}$$

on tapahtuman *A* **suhteellinen frekvenssi** eli *suhteellinen osuus* koetoistojen joukossa.

On helppo nähdä, että tapahtuman *A* suhteellisella frekvenssillä koetoistojen joukossa on edellä esitetyt todennäköisyyden perusominaisuudet.

**Perustelu:**

Oletetaan, että satunnaiskoetta toistetaan *n* kertaa.

(i) Olkoon *A* jokin *otosavaruuden S tapahtuma*, joka esiintyy $f_A$ kertaa toistojen aikana.

Koska

$$0 \le f_A \le n$$

niin

$$0 \le \frac{f_A}{n} \le 1$$

(ii) Jos tapahtuma $A$ ei satu yhtään kertaa, niin

$$f_A = 0$$

ja

$$\frac{f_A}{n} = 0$$

(iii) Jos tapahtuma $A$ sattuu joka kerran, niin

$$f_A = n$$

ja

$$\frac{f_A}{n} = 1$$

■

Jos koetoistojen lukumäärän $n$ annetaan kasvaa rajatta ja tällöin (jossakin mielessä)

$$\frac{f_A}{n} \to p$$

niin luku $p$ on tapahtuman $A$ **empiirinen todennäköisyys**.

### 3.6. Todennäköisyys mittana

Todennäköisyys on **mitta**, joka mittaa satunnaisilmiön tapahtumien *sattumisen mahdollisuutta*. On syytä huomata, että **Kolmogorovin aksioomien** mukaan *todennäköisyys on mitta matemaattisen mittateorian mielessä*; ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**

### 3.7. Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

Oletetaan, että *toistamme* jotakin satunnaiskoetta ja tarkkailemme jonkin *tapahtuman suhteellisen frekvenssin käyttäytymistä* koetoistojen aikana. **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan *ko. tapahtuman suhteellinen frekvenssi vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin ko. tapahtuman todennäköisyyttä lähellä olevia arvoja. Vahvistavatko havainnot tämän on empiirinen kysymys.*

Olkoon tapahtuman $A$ todennäköisyys

$$\Pr(A) = p$$

Oletetaan, että sitä satunnaiskoetta, jonka tulosvaihtoehtona tapahtuma $A$ on, toistetaan $n$ kertaa. Tällöin todennäköisyyden frekvenssitulkinnasta seuraa, että *on odotettavissa, että tapahtuman $A$ frekvenssi $f_A$ on lähellä lukua*

$$np$$

# 4. Todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt

## 4.1. Todennäköisyyslaskennan perusoperaatiot ja -laskusäännöt

## 4.2. Todennäköisyyslaskennan perusoperaatiot

## 4.3. Todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt

## 4.4. Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Tarkastelemme tässä luvussa todennäköisyyslaskennan **perusoperaatioita** ja **-laskusääntöjä**.

Teemme operaatiot ja laskusäännöt ilmeisiksi **Venn-diagrammien** ja esimerkkien avulla. Aksiomaattista lähestymistapaa todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistamisessa tarkastellaan luvussa **Toden-näköisyyden aksioomat**.

### Avainsanat:

Alkeistapahtuma, Ehdollinen todennäköisyys, Ehtotapahtuma, Erotus, Joukko, Komplementti, Leikkaus, Mahdoton tapahtuma, Otanta, Otanta palauttaen, Otanta palauttamatta, Otosavaruus, Pistevieraus, Riippumattomuus, Satunnaisotanta, Tapahtuma, Todennäköisyys, Toisensa poissulkevuus, Tulosääntö, Unioni, Varma tapahtuma, Venn-diagrammi, Yhdiste, Yhdistetty tapahtuma, Yhteenlaskusääntö, Yleinen tulosääntä, Yleinen yhteenlaskusääntö

## 4.1. Todennäköisyyslaskennan perusoperaatiot ja -laskusäännöt

Todennäköisyyslaskennan **perusoperaatioilla** tarkoitetaan *joukko-opin operaatioita*, joilla jonkin satunnaisilmiön tapahtumista johdetaan uusia tapahtumia.

Todennäköisyyslaskennan **peruslaskusäännöillä** tarkoitetaan *laskusääntöjä*, joilla uusien, todennäköisyyslaskennan perusoperaatiolla johdettujen tapahtumien todennäköisyydet määrätään niiden tapahtumien todennäköisyyksien avulla, joista uudet tapahtumat on johdettu.

Olkoon $S$ **otosavaruus** eli tarkasteltavan satunnaisilmiön alkeistapahtumien muodostama joukko. Jos $A$ on tarkasteltavan satunnaisilmiön **tapahtuma**, niin se on alkiot ovat otosavaruuden $S$ alkeistapahtumia. Siten tapahtumat ovat tarkasteltavaan satunnaisilmiöön liittyvän otosavaruuden $S$ *osajoukkoja*.

Jos siis $A$ on jokin otosavaruuden $S$ *tapahtuma*, niin

$$A \subset S$$

eli

$$s \in A \Rightarrow s \in S$$

jossa $s$ on tapahtumaan $A$ kuuluva *alkeistapahtuma*. Kun sanomme, että tapahtuma $A$ *sattuu*, tarkoitamme sitä, että jokin tapahtumaan $A$ kuuluvista alkeistapahtumista $s$ sattuu.

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ *tapahtumia*. Jokaista operaatiota, jolla *tapahtumista* $A$ ja $B$ *johdetaan uusia tapahtumia*, vastaa jokin **joukko-opin operaatio**. Todennäköisyyslaskennan ja joukko-opin *perusoperaatiot* vastaavat seuraavalla tavalla toisiaan:

(i) Tapahtuma $A$ *ei* satu eli tapahtuman $A$ *komplementtitapahtuma ei-*$A$ sattuu

$\leftrightarrow$ Joukon $A$ komplementti $A^c$

(ii) Tapahtuma $A$ sattuu *tai* tapahtuma $B$ sattuu *tai molemmat* sattuvat

$\leftrightarrow$ Joukkojen $A$ ja $B$ *unioni* eli *yhdiste* $A \cup B$

(iii) Tapahtuma $A$ sattuu *ja* tapahtuma $B$ sattuu

$\leftrightarrow$ Joukkojen $A$ ja $B$ *leikkaus* $A \cap B$

(iv) Tapahtuma $A$ sattuu *ja* tapahtuma $B$ *ei* satu

$\leftrightarrow$ Joukkojen $A$ ja $B$ *erotus* $A \backslash B$

## 4.2. Todennäköisyyslaskennan perusoperaatiot

### Venn-diagrammit

Joukko-opin operaatioita ja laskusääntöjä voidaan havainnollistaa **Venn-diagrammien** avulla:

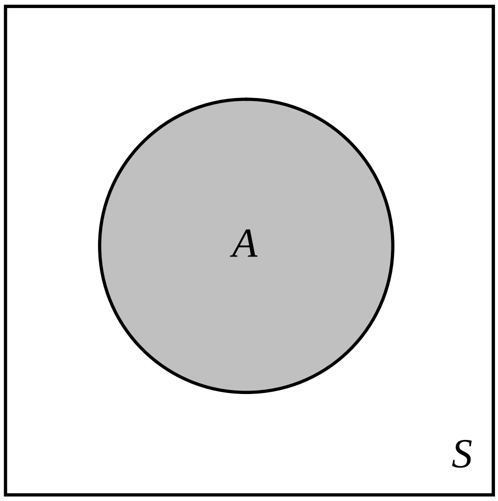
(i) Kuvataan *otosavaruutta* $S$ *suorakaiteella*, jonka pinta-ala vastaa koko otosavaruuden todennäköisyyttä

$$\Pr(S) = 1$$

(ii) Kuvataan *tapahtumaa* $A \subset S$ *suorakaiteen osa-alueella*, jonka pinta-ala vastaa tapahtuman $A$ todennäköisyyttä

$$\Pr(A)$$

Kuva oikealla havainnollistaa Venn-diagrammia, jossa $A \subset S$.




Venn-diagrammien käyttö todennäköisyyslaskennan operaatioiden ja laskusääntöjen *havainnollistuksissa* perustuu mielikuvaan todennäköisyydestä tapahtumien sattumisen mahdollisuuden *mittana*.

*Todennäköisyys* käyttäytyy mittana samalla tavalla kuin *pinta-alamitta* paitsi, että todennäköisyysmitalla on ylärajana varman tapahtuman todennäköisyys 1.

On syytä huomata, että todennäköisyyslaskennan operaatioiden ja laskusääntöjen *havainnollistus Venn-diagrammin avulla ei ole* sama asia kuin säännön *todistus*.

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistamista *Kolmogorovin aksioomajärjestelmässä* tarkastellaan luvussa **Todennäköisyyden aksioomat**.

**Huomautus**:

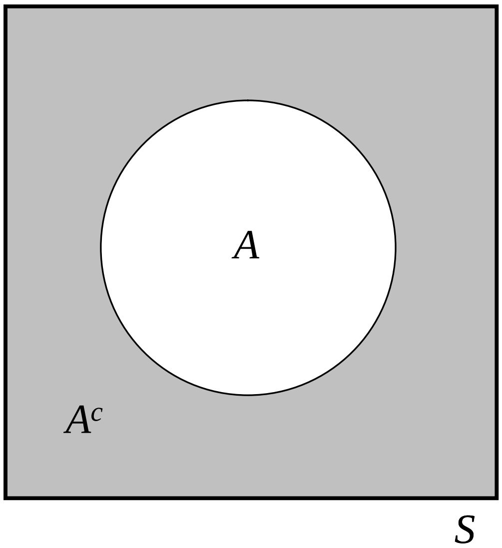
- Todennäköisyyslaskennan operaatioita ja laskusääntöjä voidaan havainnollistaa myös ns. *puudiagrammeilla*; ks. liitettä **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit**.

### Tapahtuman *A* komplementti

Olkoon

$$A \subset S$$

otosavaruuden $S$ tapahtuma.




Tapahtuman $A$ **komplementtitapahtuma**

$A^c$ = ”$A$ *ei* satu” = *ei*-$A$

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka *eivät* kuulu joukkoon $A$:

$$A^c = \{s \in S \mid s \notin A\}$$

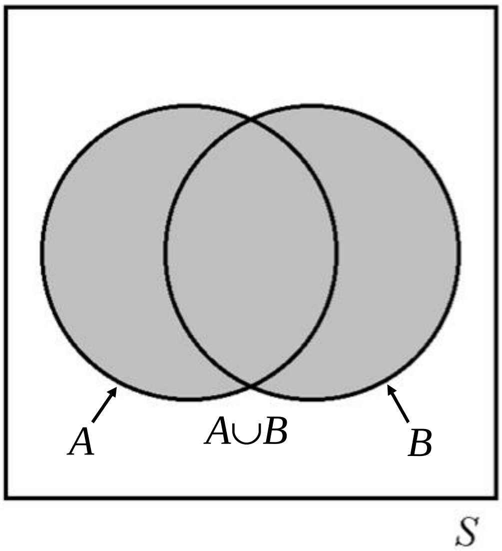
Ks. kuvaa oikealla.

### Tapahtumien *A* ja *B* yhdiste

Olkoot

$$A \subset S \,,\, B \subset S$$

otosavaruuden $S$ tapahtumia.




Tapahtumien $A$ ja $B$ **unioni** eli **yhdiste**

$A \cup B$ = ”$A$ sattuu *tai* $B$ sattuu”

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$ *tai* joukkoon $B$ *tai molempiin*:

$$A \cup B = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$

Ks. kuvaa oikealla.

### Tapahtumien *A* ja *B* leikkaus

Olkoot

$$A \subset S \,,\, B \subset S$$

otosavaruuden $S$ tapahtumia.

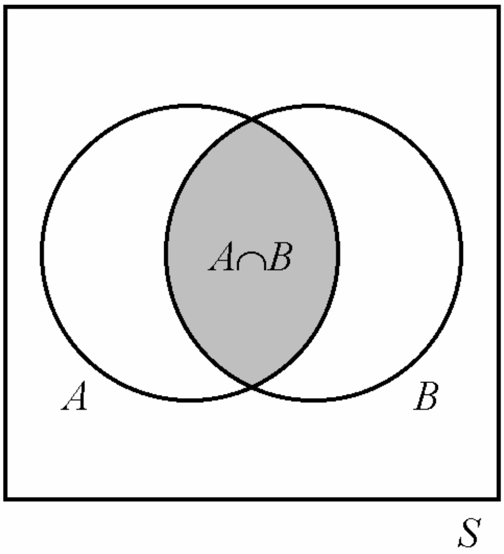
Tapahtumien $A$ ja $B$ **leikkaus**

$$A \cap B = \text{"}A \text{ sattuu } \textit{ja } B \text{ sattuu"}$$

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$ *ja* joukkoon $B$:

$$A \cap B = \{ s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B \}$$

Ks. kuvaa oikealla.




### Tapahtumien *A* ja *B* erotus

Olkoot

$$A \subset S \,,\, B \subset S$$

otosavaruuden $S$ tapahtumia.

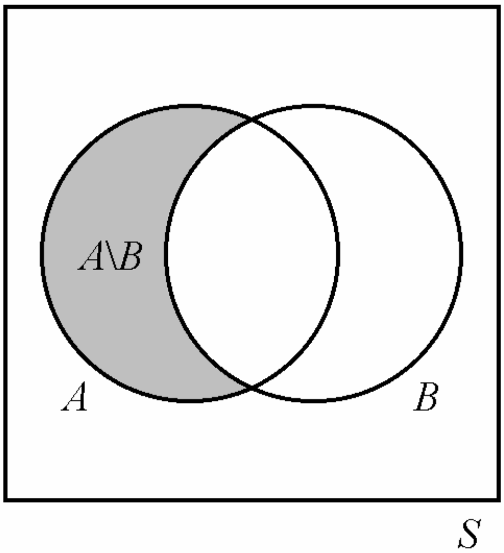
Tapahtumien $A$ ja $B$ **erotus**

$$A \backslash B = \text{"}A \text{ sattuu, } \textit{mutta } B \textit{ ei } \text{satu"}$$

on niiden alkeistapahtumien joukko, jotka kuuluvat joukkoon $A$, *mutta eivät* kuulu joukkoon $B$:

$$A \backslash B = \{ s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B \} = A \cap B^c$$

Ks. kuvaa oikealla.




## 4.3. Todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt

Oletetaan, että *tunnemme* tapahtumien $A$ ja $B$ todennäköisyydet. Tehtävänä on *määrätä* seuraavat todennäköisyydet:

(i) Todennäköisyys sille, että ***A ei* satu**.

(ii) Todennäköisyys sille, että **A sattuu *tai* B sattuu *tai molemmat* sattuvat**.

(iii) Todennäköisyys sille, että **A sattuu *ja* B sattuu**.

(iv) Todennäköisyys sille, että **A sattuu, *mutta* B *ei* satu**.

**Esimerkkisarja 1: Eduskunta.**

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä luvussa useilla esimerkeillä, joissa valitaan *satunnaisesti* yksi tai useampia kansanedustajia kaikkien kansanedustajien joukosta. Esimerkeissä eduskunnan kokoonpano on vuoden 1999 eduskuntavaalien tuloksen mukainen.

Edustajan valintaa *satunnaisesti* voidaan kuvata *arvontana*, joka toteutetaan esim. seuraavalla tavalla:

(1) Asetetaan jokaista edustajaa vastaamaan *arpalippu*.

(2) Pannaan arpaliput *uurnaan*.

(3) *Sekoitetaan* uurnan sisältö huolellisesti.

(4) *Nostetaan* uurnasta arpalippu, jota vastaava edustaja valitaan.

Arvontaa voidaan *toistaa* kahdella erilaisella tavalla:

(i) Nostettu arpalippu *palautetaan* noston jälkeen uurnaan ja uurnan sisältö *sekoitetaan* huolellisesti. Tällöin sama edustaja *voi* tulla valituksi *uudelleen*.

(ii) Nostettua arpalippua *ei palauteta* noston jälkeen uurnaan. Tällöin sama edustaja *ei voi* tulla valituksi *kuin kerran*.

Arvontamenetelmää (i) on tapana kutsua **otoksen poimimiseksi palauttaen** eli **takaisinpanolla**, kun taas arvontamenetelmää (ii) on tapana kutsua **otoksen poimimiseksi palauttamatta** eli **ilman takaisinpanoa**. Esimerkiksi *lottoarvonnassa* sovelletaan otantaa ilman takaisinpanoa.

Edustajapaikkojen jakautuminen vuoden 1999 vaaleissa:

| Puolue | Paikat | Miehet | Naiset |
|---|---|---|---|
| SDP | 51 | 29 | 22 |
| Kesk | 48 | 35 | 13 |
| Kok | 46 | 29 | 17 |
| Vas | 20 | 14 | 6 |
| RKP | 12 | 9 | 3 |
| Vihr | 11 | 2 | 9 |
| SKL | 10 | 7 | 3 |
| PS | 1 | 1 | 0 |
| Rem | 1 | 1 | 0 |
| **Yhteensä** | **200** | **127** | **73** |

**Esimerkkisarja 2: Korttipakka.**

Todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä havainnollistetaan tässä kappaleessa useilla esimerkeillä, joissa poimitaan *satunnaisesti* pelikortteja hyvin sekoitetusta korttipakasta.

Oletamme, että korttipakassa on 52 korttia (pakassa ei siis ole jokereita).

Korttipakka jakautuu 4:ään *maahan*:

Pata, Hertta, Ruutu, Risti

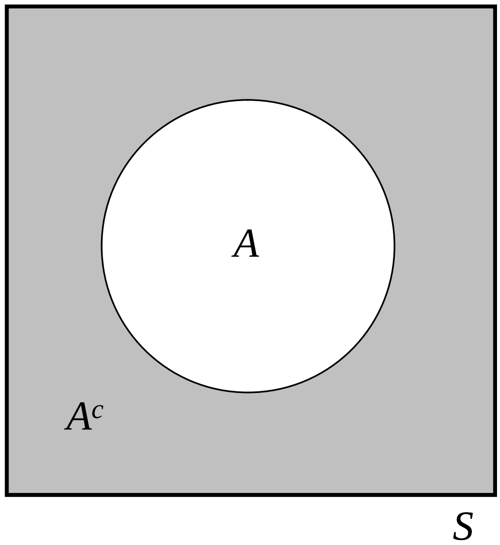
Jokaisessa maassa on 13 korttia:

A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2

Sanomme, että seuraavat kortit ovat *kuvakortteja*:

A = Ässä (kortti, jonka numerona on 1)
K = Kuningas
Q = Kuningatar
J = Sotilas

### Komplementtitapahtuman todennäköisyys




Olkoon $A$ otosavaruuden $S$ tapahtuma ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$.

Tällöin tapahtuman $A$ **komplementtitapahtuman**

$$A^c = \text{"}A \textit{ ei} \text{ satu"} = \{s \in S \mid s \notin A\}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$

**Esimerkki 1. Eduskunta.**

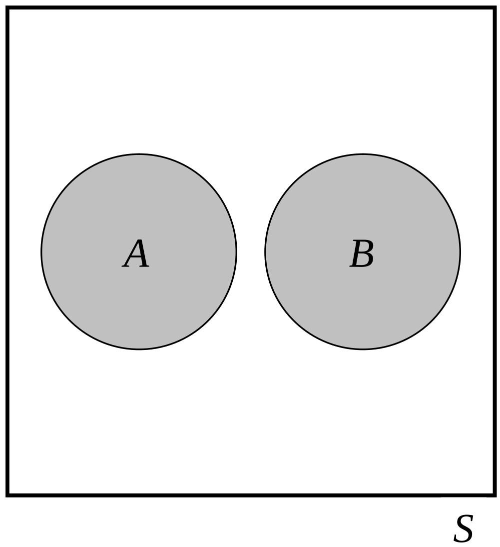
Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$\begin{aligned} n_{Sosialiestit} &= n_{SDP} + n_{Vas} \\ &= 51 + 20 = 71 \\ n_{Ei\text{-}osialiestit} &= 200 - n_{Sosialiestit} \\ &= 200 - 71 = 129 \end{aligned}$$

Valitaan satunnaisesti yksi edustaja. Todennäköisyys, että valittu edustaja on ei-sosialisti on

$$\Pr(\text{Ei-sosialisti}) = 1 - \Pr(\text{Sosialisti}) = 1 - \frac{71}{200} = \frac{129}{200} = 0.645$$

### Toisensa poissulkevat tapahtumat




Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia.

Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **toisensa poissulkevia**, jos tapahtumat $A$ ja $B$ *eivät voi sattua samanaikaisesti*. Tällöin tapahtumat $A$ ja $B$ ovat otosavaruuden $S$ osajoukkoina *pistevieraita* eli niiden *leikkaus on tyhjä*:

$$A \cap B = \varnothing$$

**Esimerkki 2. Eduskunta.**

Yksikään kansanedustaja ei voi olla samaan aikaan kahden eri puolueen jäsen.

Valitaan satunnaisesti yksi edustaja ja olkoon

$A$ = ”Edustaja kuuluu vasemmistoliittoon”

ja

$B$ = ”Edustaja kuuluu kokoomukseen”

Tällöin tapahtumat $A$ ja $B$ ovat toisensa poissulkevia, millä siis tarkoitetaan sitä, että $A$ ja $B$ ovat pistevieraita joukkoina:

$$A \cap B = \varnothing$$

## Yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$, tapahtuman $B$ todennäköisyys on $\Pr(B)$ ja oletetaan lisäksi, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli

$$A \cap B = \varnothing$$

Tällöin tapahtumien $A$ ja $B$ **unionin** eli **yhdisteen**

$$A \cup B = \text{"}A \text{ sattuu } \textit{tai } B \text{ sattuu"} = \{s \in S \mid s \in A \textit{ tai } s \in B\}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

**Esimerkki 3. Eduskunta.**

Vuoden 1999 eduskunnassa:

$$n_{Sosialiestit} = n_{SDP} + n_{Vas} = 51 + 20 = 71$$

Valitaan satunnaisesti yksi edustaja. Todennäköisyys, että valittu edustaja on sosialisti on

$$\Pr(\text{Sosialisti}) = \Pr(\text{SDP}) + \Pr(\text{Vas}) = \frac{51}{200} + \frac{20}{200} = \frac{71}{200} = 0.355.$$

## Yleistetty yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille

Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A_i$ todennäköisyys on

$$\Pr(A_i)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

ja oletetaan lisäksi, että tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat *pareittain toisensa poissulkevia*, jolloin

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$$

Tällöin tapahtumien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **yhdisteen**

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k &= \text{"}A_1 \text{ sattuu } \textit{tai } A_2 \text{ sattuu } \textit{tai } \ldots \textit{ tai } A_k \text{ sattuu"} \\ &= \{s \in S \mid s \in A_1 \textit{ tai } s \in A_2 \textit{ tai } \ldots \textit{ tai } s \in A_k\} \end{aligned}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \cdots + \Pr(A_k)$$

## Tapahtumien riippumattomuus

Tapahtuma $A$ on **riippumaton** tapahtumasta $B$, jos tapahtuman $B$:n sattuminen (tai sattumatta jääminen) *ei vaikuta* tapahtuman $A$ sattumisen todennäköisyyteen.

Riippumattomuus on *symmetrinen* ominaisuus: Jos tapahtuma $A$ on riippumaton tapahtumasta $B$, niin tapahtuma $B$ on riippumaton tapahtumasta $A$. Riippumattomuuden symmetrisyyden takia sanomme yksinkertaisesti, että

”*Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia*”

Merkitsemme tapahtumien $A$ ja $B$ riippumattomuutta usein seuraavalla tavalla:

$$A \perp B$$

Riippumattomuuden käsite saa lisävalaistusta *ehdollisen todennäköisyyden* käsitteestä; ks. kappaletta **Ehdollinen todennäköisyys**.

**Esimerkki 4. Rahanheitto.**

Jos heitämme toistuvasti rahaa, on järkevää olettaa, että yhdenkään heiton tulos ei riipu aikaisemmin tehtyjen heittojen tuloksista.

**Esimerkki 5. Arvonta.**

Nostetaan uurnasta toistuvasti arpalippuja niin, että jokaisen noston jälkeen nostettu lippu palautetaan uurnaan ja uurnan sisältö sekoitetaan huolellisesti (eli arpalippujen nostossa sovelletaan *otantaa takaisinpanolla*). Tällöin on järkevää olettaa, että nostojen tulokset eivät riipu aikaisemmin tehtyjen nostojen tuloksista.

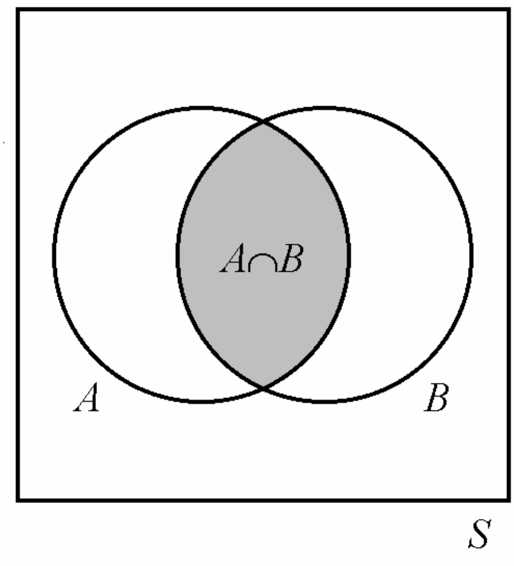
## Riippumattomuus *vs* riippuvuus

*Alkeistilastotieteen* esityksissä oletetaan tavallisesti, että satunnaisilmiötä koskevat *havainnot* ovat *riippumattomia*. Monissa tilastotieteen tutkimusasetelmissa oletus havaintojen riippumattomuudesta on kuitenkin liian rajoittava. Esimerkiksi *ennustaminen aikasarja-analyysissa* perustuu siihen, että *tulevaisuus riippuu aikasarjan historiasta*.

On syytä huomata, että *riippumattomuus* on oletus, jota voidaan *testata* tilastollisesti.

## Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$, tapahtuman $B$ todennäköisyys on $\Pr(B)$ ja lisäksi, että tapahtumat $A$ ja $B$ **riippumattomia**.




Tällöin tapahtumien $A$ ja $B$ **leikkauksen**

$$A \cap B = \text{"}A \text{ sattuu } \textit{ja } B \text{ sattuu"}$$
$$= \{s \in S \mid s \in A \textit{ ja } s \in B\}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

On osoittautunut järkeväksi pitää tapahtumia $A$ ja $B$ *riippumattomina*, jos ja vain jos **tulosääntö**

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

pätee.

**Esimerkki 6. Tulosäännön intuitiivinen perustelu.**

Tarkastellaan TV-vastaanottimien laadunvalvontaa. Oletetaan, että vastaanottimissa voi esiintyä kaksi erilaista vikaa:

$A$ = ”Kuvaputki ei toimi”

$B$ = ”Vahvistin ei toimi”

Oletetaan lisäksi, että viat syntyvät *toisistaan riippumatta*.

Laadunvalvonnassa on todettu, että vika $A$ esiintyy 5 %:ssa valmistettuja TV-vastaanottimia ja vika $B$ esiintyy 3 %:ssa valmistettuja TV-vastaanottimia.

Siitä, että viat $A$ ja $B$ syntyvät *toisistaan riippumattomatta* seuraa:

(i) 3 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika $A$, on *myös* vika $B$.

(ii) 5 %:ssa niistä TV-vastaanottimia, joissa on vika $B$, on *myös* vika $A$.

Siten niiden TV-vastaanottimien osuus, joissa on *sekä* vika $A$ *että* vika $B$ on

$$0.03\times0.05 = 0.0015 = 0.15\ \%$$

Saatu tulos vastaa riippumattomien tapahtumien tulosääntöä: Olkoon

$A\cap B$ = ”Kuvaputki ei toimi *ja* vahvistin ei toimi”

Tällöin

$$\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = 0.03\times0.05 = 0.0015$$

**Esimerkki 7. Rahanheitto.**

Heitetään rahaa kaksi kertaa ja tarkastellaan tapahtumia

$A$ = ”Kruuna 1. heitolla”

$B$ = ”Kruuna 2. heitolla”

Voimme olettaa, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *riippumattomia*.

Oletetaan, että

Pr(Kruuna) = Pr(Klaava) =1/2

Tällöin

$$\Pr(A\ \textit{ja}\ B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

**Esimerkki 8. Korttipakka.**

Nostetaan korttipakasta satunnaisesti 1 kortti ja tarkastellaan seuraavia tapahtumia:

$A$ = ”Kortti on pata”

$B$ = ”Kortti on ässä”

Koska korttipakassa 13 pataa ja 4 ässää, niin

$$\Pr(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Tarkastellaan yhdistettyä tapahtumaa

$A\cap B$ = ”Kortti on pataässä”

Koska pataässiä on täsmälleen 1 kappale, niin

$$\Pr(A\cap B) = \frac{1}{52}$$

Koska

$$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \Pr(A)\Pr(B)$$

voimme pitää tapahtumia $A$ ja $B$ *riippumattomina*.

Intuitiivinen perustelu tulosäännön soveltamiselle: Korttipakan korteista 1/4 on patoja ja 1/13 on ässiä. Myös niistä korteista, jotka ovat patoja 1/13 on ässiä. Siten pataässien osuus korttipakan korteista on

$$\frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

### Yleistetty tulosääntö riippumattomille tapahtumille

Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A_i$ todennäköisyys on

$$\Pr(A_i),\ i = 1, 2, \ldots, k$$

Sanomme, että tapahtumat $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos *kaikille* leikkauksille

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}$$

joissa

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$$

pätee:

$$\Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \Pr(A_{i_1}) \times \Pr(A_{i_2}) \times \cdots \times \Pr(A_{i_m})$$

Merkitsemme tapahtumien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ riippumattomuutta usein seuraavalla tavalla:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \perp$$

**Esimerkki 9. Rahanheitto.**

Heitetään rahaa 10 kertaa ja tarkastellaan tapahtumia

$$A_i = \text{”Kruuna } i\text{. heitolla”},\ i = 1, 2, \ldots, k$$

Voimme olettaa, että tapahtumat $A_i$ ovat *riippumattomia*.

Oletetaan, että

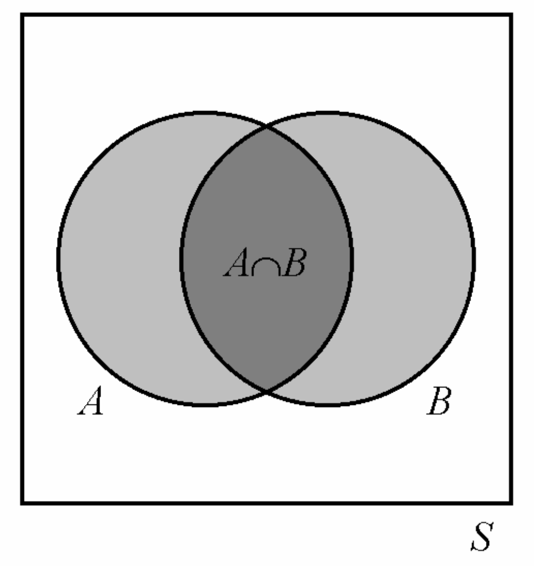
$$\Pr(A_i) = \Pr(\text{Kruuna } i\text{. heitolla}) = 1/2,\ i = 1, 2, \ldots, k$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
&\Pr(\text{10 kruunaa 10:llä heitolla}) \\
&= \Pr(\text{Kruuna 1. heitolla } \textit{ja} \text{ Kruuna 2. heitolla } \textit{ja} \cdots \textit{ ja} \text{ Kruuna 10. heitolla}) \\
&= \Pr(\text{Kruuna 1. heitolla}) \times \Pr(\text{Kruuna 2. heitolla}) \times \cdots \times \Pr(\text{Kruuna 10. heitolla}) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{\text{10 kappaletta}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0.000977
\end{aligned}$$

*Todennäköisyyden frekvenssitulkinnasta* seuraa: Jos suuresta joukosta ihmisiä jokainen pannaan heittämään rahaa 10 kertaa, on odotettavissa, että *suunnilleen yksi tuhannesta* saa tulokseksi 10 kruunaa!

### Yleinen yhteenlaskusääntö




Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$, tapahtuman $B$ todennäköisyys on $\Pr(B)$ ja leikkaustapahtuman

$$A\cap B = \text{"}A \text{ sattuu } \textit{ja } B \text{ sattuu"} = \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\}$$

todennäköisyys on $\Pr(A\cap B)$.

Tällöin tapahtumien $A$ ja $B$ **unionin** eli **yhdisteen**

$$A\cup B = \text{"}A \text{ sattuu } \textit{tai } B \text{ sattuu"} = \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A\cap B)$$

**Esimerkki 10. Yleisen yhteenlaskusäännön motivointi.**

Tilastojen mukaan 80 % japanilaisista on shintolaisia ja 80 % japanilaisista on buddhalaisia.

Kysymys: Onko 160 % japanilaisista shintolaisia *tai* buddhalaisia?

Vastaus: *Ei*, koska suuri osa japanilaisista noudattaa *kummankin* uskonnon menoja: Häät järjestetään tavallisesti shintolaisten menojen mukaan, kun taas hautajaiset järjestetään tavallisesti buddhalaisten menojen mukaan.

Annetuista tiedoista voidaan päätellä:

- 80 % – 100 % japanilaisista on *joko* shintolaisia *tai* buddhalaisia
- 60 % – 80 % japanilaisista on *sekä* shintolaisia *että* buddhalaisia

**Esimerkki 11. Levikkitutkimus.**

*Levikkitutkimuksessa* saatiin selville, että erään kunnan asukkaat lukevat Seuraa ja Apua seuraavasti:

| | |
|---|---|
| Seura | 20 % |
| Apu | 16 % |
| Seura ja Apu | 1 % |

Tällöin

$$\Pr(\text{Seura } \textit{tai} \text{ Apu}) = \Pr(\text{Seura}) + \Pr(\text{Apu}) - \Pr(\text{Seura } \textit{ja} \text{ Apu})$$

$$= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} - \frac{1}{100} = \frac{35}{100} = 0.35$$

## Erotustapahtuman todennäköisyys

Olkoot $A$ ja $S$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on Pr($A$) ja leikkaustapahtuman

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \text{"}A \text{ sattuu } \textit{ja } B \text{ sattuu"} \\
&= \{ s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B \}
\end{aligned}
$$

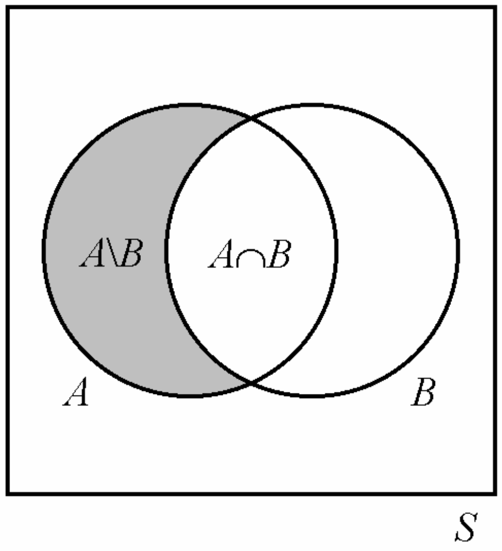
todennäköisyys on Pr($A\cap B$).

Tällöin **erotustapahtuman**

$$
\begin{aligned}
A \setminus B &= \text{"}A \text{ sattuu, } \textit{mutta } B \textit{ ei} \text{ satu"} \\
&= \{ s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B \} \\
&= A \cap B^c
\end{aligned}
$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A \setminus B) = \Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B)$$




**Esimerkki 12. Korttipakka.**

Nostetaan korttipakasta satunnaisesti 1 kortti ja tarkastellaan seuraavia tapahtumia:

$A$ = ”Kortti on pata”

$B$ = ”Kortti on kuva”

Tällöin

$A\setminus B$ = ”Kortti on pata, *mutta* ei ole kuvakortti”

Koska korttipakassa on 13 patakorttia, joista 4 on kuvia, niin

$$
\begin{aligned}
\Pr(A \setminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\
&= \frac{13}{52} - \frac{4}{52} \\
&= \frac{9}{52}
\end{aligned}
$$

Tulos on tietysti selvä muutenkin, koska sellaisia patakortteja, jotka eivät ole kuvia on 9 kpl eli kortit 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

## Tapahtumasta *B* seuraa tapahtuma *A*

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on Pr($A$) ja tapahtuman $B$ todennäköisyys on Pr($B$).

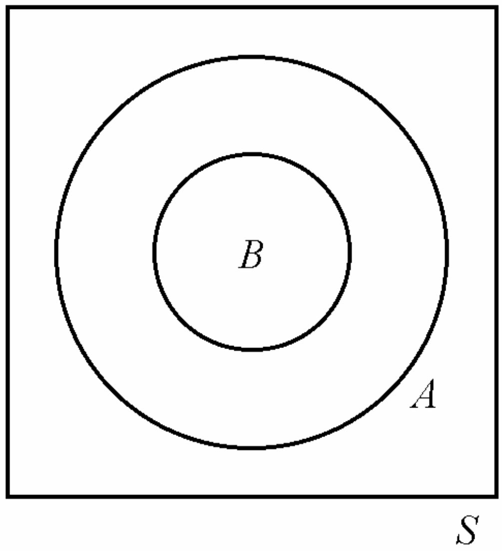
Oletetaan, että *jos tapahtuma B sattuu*, *niin tapahtuma A sattuu*.

Tällöin

$$B \subset A$$

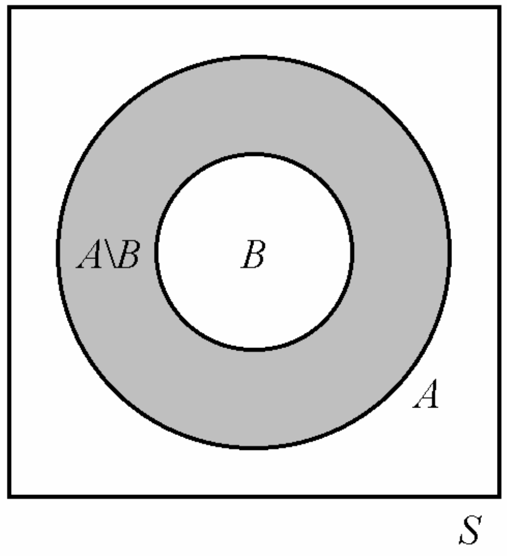
ja siis

$$\Pr(B) \le \Pr(A)$$



### Erotustapahtuman todennäköisyys, jos tapahtumasta *B* seuraa tapahtuma *A*

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$ ja tapahtuman $B$ todennäköisyys on $\Pr(B)$.




Oletetaan, että *jos tapahtuma B sattuu*, *niin tapahtuma A sattuu*, mikä siis merkitsee sitä, että

$$B \subset A$$

Tällöin **erotustapahtuman**

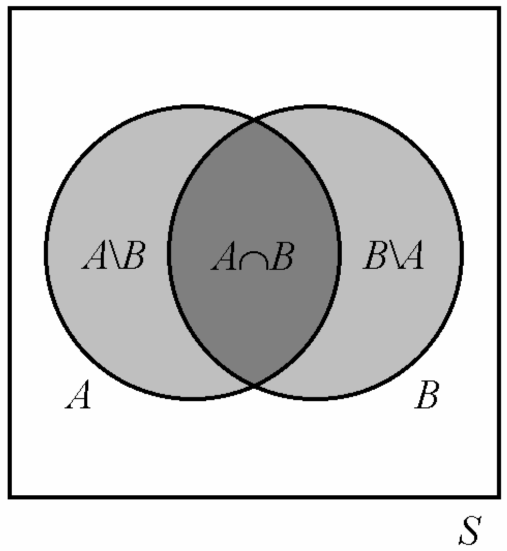
$$\begin{aligned} A \setminus B &= \text{"}A \text{ sattuu, } \textit{mutta } B \textit{ ei} \text{ satu"} \\ &= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \notin B\} \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A \setminus B) = \Pr(A) - \Pr(B)$$

### Yhdisteen todennäköisyys

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia.




Tällöin tapahtumien $A$ ja $B$ **unionin** eli **yhdisteen**

$$\begin{aligned} A \cup B &= \text{"}A \text{ sattuu } \textit{tai } B \text{ sattuu"} \\ &= \{s \in S \mid s \in A \text{ tai } s \in B\} \end{aligned}$$

**todennäköisyys** on

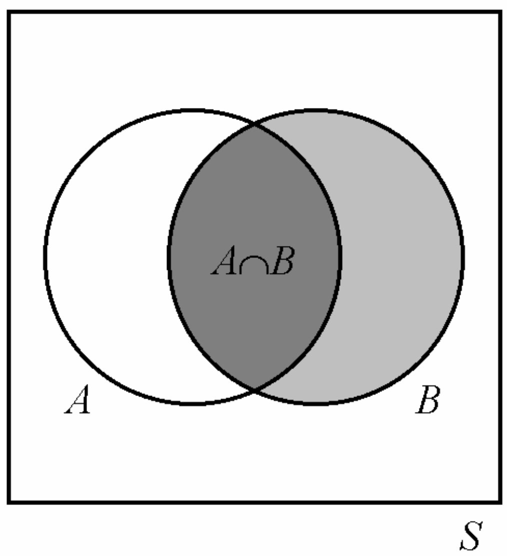
$$\begin{aligned} \Pr(A \cup B) &= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(A) + \Pr(B \setminus A) \\ &= \Pr(B) + \Pr(A \setminus B) \\ &= \Pr(A \setminus B) + \Pr(B \setminus A) + \Pr(A \cap B) \end{aligned}$$

## 4.4. Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

### Ehdollinen todennäköisyys

Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $B$ todennäköisyys

$$\Pr(B) \neq 0$$




ja leikkaustapahtuman

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{"}A \text{ sattuu } \textit{ja } B \text{ sattuu"} \\ &= \{s \in S \mid s \in A \text{ ja } s \in B\} \end{aligned}$$

todennäköisyys on $\Pr(A \cap B)$.

Tällöin **tapahtuman** $A$ **ehdollinen todennäköisyys ehdolla**, **että tapahtuma** $B$ **on sattunut** saadaan kaavalla

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

*Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla*, *että tapahtuma B on sattunut*, saadaan määräämällä leikkaustapahtuman

$A \cap B$ = ”$A$ sattuu *ja* $B$ sattuu”

todennäköisyyden $\Pr(A \cap B)$ *suhde* tapahtuman $B$ todennäköisyyteen $\Pr(B)$. *Tapahtuman A ehdollinen todennäköisyys ehdolla*, *että tapahtuma B on sattunut* voidaan siis ymmärtää niin, että tapahtumaan $A$ liittyviä alkeistapahtumia tarkastellaan *rajoitettuna tapahtuman B indusoimaan otosavaruuteen*.

**Esimerkki 1. Ehdollisen todennäköisyyden kaavan motivointi.**

Tarkastellaan *toistuvaa* satunnaisilmiötä ja olkoot $A$ ja $B$ kaksi ko. satunnaisilmiöön liittyvää tapahtumaa.

Satunnaisilmiön toistuessa *jokaisella toistokerralla* pätee:

(i) *Joko* tapahtuma $A$ sattuu *tai* tapahtuma $A^c$ = *ei*-$A$ sattuu.

(ii) *Joko* tapahtuma $B$ sattuu *tai* tapahtuma $B^c$ = *ei*-$B$ sattuu.

Oletetaan, että ko. satunnaisilmiön toistuessa tuloksena on seuraava tapahtumaparien jono:

$$A^cB \quad AB^c \quad A^cB \quad AB \quad A^cB^c \quad A^cB \quad A^cB^c$$

Tässä tapahtumajonossa tapahtuman $A$ todennäköisyys on

$$\Pr(A) = \frac{2}{7}$$

ja tapahtuman $B$ todennäköisyys on

$$\Pr(B) = \frac{4}{7}$$

Lisäksi leikkaustapahtuman

$A \cap B$ = ”$A$ sattuu *ja* $B$ sattuu”

todennäköisyys on

$$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{7}$$

Muodostetaan tässä tarkastellusta tapahtumaparien jonosta

$$A^cB \quad AB^c \quad A^cB \quad AB \quad A^cB^c \quad A^cB \quad A^cB^c$$

*karsittu* jono, johon otetaan *vain* ne tapahtumaparit, joissa tapahtuma $B$ on sattunut. Nämä tapahtumaparit ovat

$$A^cB \qquad\qquad A^cB \quad AB \qquad\qquad A^cB$$

Tapahtuman $A$ todennäköisyys tässä *karsitussa* jonossa on 1/4.

Toisaalta *ehdollisen todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{1/7}{4/7} = \frac{1}{4}$$

Siten tapahtuman $A$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että $B$ on sattunut, on tapahtuman $A$ todennäköisyys *karsitussa* jonossa, johon on mukaan otettu vain ne tapahtumaparit, *joissa B on sattunut*.

**Esimerkki 2. Eduskunta.**

Vuoden 1999 eduskunnan 200 kansanedustajasta 73 oli naisia. Valitaan satunnaisesti 1 edustaja. Mikä on todennäköisyys, että valittu edustaja on nainen?

Merkitään

$A$ = ”Edustaja on nainen”

Tällöin

$$\Pr(A) = \frac{73}{200} = 0.365$$

SDP:llä oli vuoden 1999 eduskunnassa 51 kansanedustajaa, 29 miestä ja 22 naista. Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuuluu SDP:n ryhmään, on nainen?

*Ehdollisen todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{SDP}) = \frac{\Pr(\text{Nainen } \textit{ja} \text{ SDP})}{\Pr(\text{SDP})} = \frac{22/200}{51/200} = \frac{22}{51} = 0.431$$

joten

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{SDP}) = 0.431 > 0.365 = \Pr(\text{Nainen})$$

*Tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja on* SDP:stä *on muuttanut käsitystämme todennäköisyydestä, että hän on nainen*.

RKP:lla oli vuoden 1999 eduskunnassa 12 kansanedustajaa, 9 miestä ja 3 naista. Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu edustaja, joka kuuluu RKP:n ryhmään, on nainen?

*Ehdollisen todennäköisyyden* kaavan mukaan

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{RKP}) = \frac{\Pr(\text{Nainen } \textit{ja} \text{ RKP})}{\Pr(\text{RKP})} = \frac{3/200}{12/200} = \frac{3}{12} = 0.25$$

joten

$$\Pr(\text{Nainen} \mid \text{RKP}) = 0.25 < 0.365 = \Pr(\text{Nainen})$$

*Tieto siitä, että satunnaisesti valittu kansanedustaja on* RKP:stä *on muuttanut käsitystämme todennäköisyydestä, että hän on nainen*.

Edellisen esimerkin mukaan tapahtuman $A$ *ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on sattunut* voi olla *pienempi*, *yhtä suuri* tai *suurempi* kuin tapahtuman $A$ todennäköisyys.

Siten mikä tahansa seuraavista kolmesta vaihtoehdosta *on mahdollinen*:

$$\Pr(A|B) > \Pr(A)$$

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

$$\Pr(A|B) < \Pr(A)$$

Jos

$$\Pr(A|B) \neq \Pr(A)$$

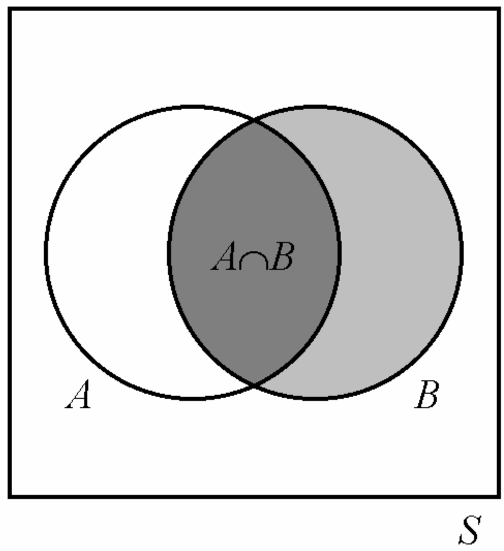
niin tieto siitä, että *tapahtuma B on sattunut*, *sisältää informaatiota*, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman $A$ todennäköisyyttä määrättäessä.

Sen sijaan, jos

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

niin tieto siitä, että *tapahtuma B on sattunut*, *ei sisällä informaatiota*, jota voidaan käyttää hyväksi tapahtuman $A$ todennäköisyyttä määrättäessä. Tällöin on järkevää pitää tapahtumaa $A$ *riippumattomana* tapahtumasta $B$.

## Riippumattomuus




Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $\Pr(A)$ ja tapahtuman $B$ todennäköisyys on $\Pr(B)$.

Tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos tapahtumien $A$ ja $B$ leikkauksen

$$\begin{aligned} A\cap B &= \text{"}A \text{ sattuu } ja\ B \text{ sattuu"} \\ &= \{s \in S \mid s \in A \ ja\ s \in B\} \end{aligned}$$

todennäköisyys on

$$\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

**Lause 1.**

Olkoon tapahtuman $A$ todennäköisyys ehdolla, että $B$ on sattunut $\Pr(A|B)$. Tällöin tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

**Todistus:**

(i) Oletetaan, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *riippumattomia* ja todistetaan, että

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

Riippumattomuuden määritelmän mukaan

$$\Pr(A\cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Tällöin

$$\Pr(A\,|\,B) = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A)$$

(ii) Oletetaan, että

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

ja todistetaan, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *riippumattomia*.

Oletuksesta ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä seuraa, että

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B)\Pr(B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

joten tapahtumat $A$ ja $B$ ovat riippumattomia.

■

Koska riippumattomuus on symmetrinen ominaisuus on helppo nähdä, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos mikä tahansa seuraavista *ehdoista* pätee:

(i) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$

(ii) $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$

(iii) $\Pr(B \mid A) = \Pr(B)$

**Esimerkki 3. Rutenian parlamentti.**

Rutenian tasavallassa on 2 puoluetta: repijät ja säilyttäjät.

Puolueiden paikkajakauma 200-paikkaisessa parlamentissa:

| **Puolue** | **Miehet** | **Naiset** | **Paikat** |
|---|---|---|---|
| Repijät | 20 | 30 | 50 |
| Säilyttäjät | 60 | 90 | 150 |
| **Yhteensä** | **80** | **120** | **200** |

Valitaan parlamentista satunnaisesti 1 edustaja ja olkoon

$A$ = ”Valittu edustaja on mies”

$B$ = ”Valittu edustaja on repijä”

Tällöin

$$\Pr(A) = \frac{80}{200} = 0.4$$

$$\Pr(A \mid B) = \frac{20}{50} = 0.4$$

Koska

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

niin tapahtumat $A$ ja $B$ ovat riippumattomia.

On helppo nähdä, että myös tapahtumat

$A$ ja $B^c$ , $A^c$ ja $B$ , $A^c$ ja $B^c$

ovat riippumattomia.

Koska

$$\Pr(A \cap B) = \frac{20}{200}$$

$$\Pr(B) \quad = \frac{50}{200}$$

niin ehdollisen todennäköisyyden kaavasta seuraa, että

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{20/200}{50/200} = \frac{20}{50} = 0.4$$

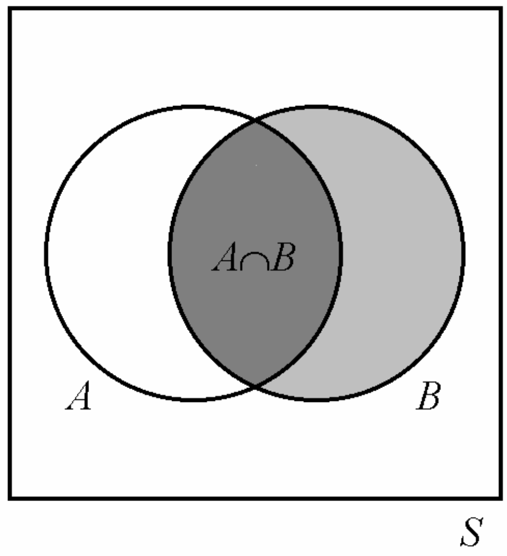
On syytä huomata, että tapahtumien $A$ ja $B$ riippumattomuus ”*leviää*” aina myös niiden *komplementtitapahtumiin*; ks. edellistä esimerkkiä. Jos siis oletamme, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat riippumattomia, niin tällöin pätee seuraava:

(i) Tapahtumat $A$ ja $B^c$ ovat riippumattomia.

(ii) Tapahtumat $A^c$ ja $B$ ovat riippumattomia.

(iii) Tapahtumat $A^c$ ja $B^c$ ovat riippumattomia.

### Yleinen tulosääntö




Olkoot $A$ ja $B$ otosavaruuden $S$ tapahtumia ja oletetaan, että tapahtuman $B$ todennäköisyys

$$\Pr(B) \neq 0$$

ja tapahtuman $A$ ehdollinen todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma $B$ on sattunut on

$$\Pr(A|B)$$

Tällöin tapahtumien $A$ ja $B$ **leikkauksen**

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{”}A \text{ sattuu } ja\ B \text{ sattuu”} \\ &= \{s \in S \mid s \in A \ ja\ s \in B\} \end{aligned}$$

**todennäköisyys** on

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B)\Pr(B)$$

Kutsumme tätä sääntöä **yleiseksi tulosäännöksi**.

### Yleistetty yleinen tulosääntö

Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ otosavaruuden $S$ tapahtumia.

Tällöin tapahtumien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **leikkauksen**

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k &= \text{”}A_1 \text{ sattuu } ja\ A_2 \text{ sattuu } ja \ldots ja\ A_k \text{ sattuu”} \\ &= \{s \in S \mid s \in A_1\ ja\ s \in A_2\ ja \ldots ja\ s \in A_k\} \end{aligned}$$

**todennäköisyys** on

$$\begin{aligned} &\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \\ &\quad = \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 \mid A_1) \times \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

**Esimerkki 4. Korttipakka.**

Nostetaan korttipakasta *peräkkäin* 3 korttia. Mikä on todennäköisyys, että ne ovat kaikki patoja?

Olkoon tapahtuma

$A_i$ = ”*i*. kortti on pata”, $i = 1, 2, 3$

Koska korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on patoja, leikkauksen

”$A_1$ sattuu *ja* $A_2$ sattuu *ja* $A_3$ sattuu”

todennäköisyys on

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \Pr(A_1)\Pr(A_2 \mid A_1)\Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{33}{2550} \\ &= 0.0129\end{aligned}$$

Huomaa, että korttien nosto toteutettiin tässä *ilman takaisinpanoa*.

## Yksinkertainen satunnaisotanta ja tulosäännöt

Olkoon perusjoukko *S äärellinen*. **Yksinkertaisessa satunnaisotannassa** perusjoukosta *S* poimitaan osajoukko *B arpomalla* perusjoukosta alkioita osajoukkoon *B* yksi alkio kerrallaan. Osajoukkoa *B* kutsutaan **otokseksi** ja arvonnassa käytettyä menetelmää **otantamenetelmäksi**; lisätietoja otannasta: ks. monistetta **Tilastolliset menetelmät**.

Tarkastellaan todennäköisyyttä saada otokseen *B* alkioita perusjoukon *S* osajoukosta *A*. Jos *otanta tehdään ilman takaisinpanoa* eli *palauttamatta poimittua alkiota takaisin perusjoukkoon*, poimintatodennäköisyyksiä määrättäessä on sovellettava *yleistä tulosääntöä*. Jos *otanta tehdään takaisinpanolla* eli *palauttamalla poimittu alkio aina takaisin perusjoukkoon*, poimintatodennäköisyyksiä määrättäessä on sovellettava *riippumattomien tapahtumien tulosääntöä*.

Luvussa **Diskreettejä jakaumia** todetaan, että *äärellisen* perusjoukon *S* tapahtumien todennäköisyyksiä hallitaan ns. **binomijakaumalla**, jos otanta on tapahtunut palauttaen ja ns. **hypergeometrisella jakaumalla**, jos otanta on tapahtunut palauttamatta.

# 5. Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka



Tapahtuman **klassisen todennäköisyyden** määrääminen vaatii sekä ko. *tapahtumalle suotuisien alkeistapahtumien lukumäärän* että *kaikkien mahdollisten alkeistapahtumien lukumäärän laskemista*. Tässä luvussa näytämme miten tapahtumavaihtoehtojen lukumääriä voidaan laskea soveltamalla **kombinatoriikkaa**.

Saaduilla tuloksilla on suuri merkitys – paitsi klassisen todennäköisyyden määräämistä vaativissa tehtävissä – johdettaessa **diskreettien todennäköisyysjakaumien pistetodennäköisyysfunktioita**; ks. lukua **Diskreettejä jakaumia**.

### Avainsanat:

Binomikaava, Binomikerroin, Jono, Joukko, Järjestys, Kertolaskuperiaate, Kertoma, Klassinen todennäköisyys, Kombinaatio, Kombinatoriikka, Lokeromalli, Lukumääräfunktio, Multinomikerroin, Osajono, Osajoukko, Pascalin kolmio, Permutaatio, Riippumattomuus, Suotuisa alkeistapahtuma, Symmetrisyys, Variaatio, Yhteenlaskuperiaate

## 5.1. Klassinen todennäköisyys

Oletetaan, että äärellisen otosavaruuden

$$S = \{s_1, s_2, \ldots , s_n\}$$

alkeistapahtumat

$$s_i \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

ovat *yhtä todennäköisiä* eli

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n} \text{ , } i = 1, 2, \ldots , n$$

jolloin sanomme, että alkeistapahtumat $s_i$ , $i = 1, 2, \ldots , n$ ovat **symmetrisiä**.

Olkoon

$$n_A = n(A)$$

funktio, joka kertoo *joukon A alkioiden lukumäärän*. Jos siis

$$A = \{a_1, a_2, \ldots , a_k\}$$

on äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on $k$, niin

$$n_A = n(A) = k$$

Kutsumme funktiota $n(\cdot)$ **lukumääräfunktioksi**.

Olkoon tapahtuma $A$ otosavaruuden $S$ osajoukko. Tällöin tapahtuman $A$ **klassinen todennäköisyys** $\Pr_c(A)$ saadaan määräämällä tapahtumalle $A$ *suotuisien alkeistapahtumien suhteellinen osuus* kaikista mahdollisista alkeistapahtumista eli

$$\Pr_c(A) = \frac{n_A}{n_S} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

jossa

$$\begin{aligned} n_A = n(A) \quad &= \quad \text{tapahtumalle } A \textit{ suotuisien} \text{ alkeistapahtumien lukumäärä} \\ &= \quad \text{joukkoon } A \text{ kuuluvien alkeistapahtumien lukumäärä} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} n_S = n(S) \quad &= \quad \textit{kaikkien mahdollisten} \text{ alkeistapahtumien lukumäärä} \\ &= \quad \text{otosavaruuteen } S \text{ kuuluvien alkeistapahtumien lukumäärä} \end{aligned}$$

Jos perusjoukko (otosavaruus) on kooltaan vähänkin isompi, perusjoukon ja sen osajoukkojen (tapahtumien) alkioiden (alkeistapahtumien) *lukumäärien* laskemisessa tarvitaan apuna jotakin järjestelmällistä menetelmää. Tällaisen järjestelmällisen menetelmän joukon alkioiden lukumäärän laskemiseen tarjoaa **kombinatoriikaksi** kutsuttu matematiikan osa-alue.

## 5.2. Kombinatoriikan perusperiaatteet

Tarkastellaan kahta **operaatiota**, $M$ ja $N$. Tehdään operaatioista $M$ ja $N$ seuraavat oletukset:

Operaatio $M$ voidaan suorittaa $m$:llä erilaisella tavalla.

Operaatio $N$ voidaan suorittaa $n$:llä erilaisella tavalla.

Operaatiot $M$ ja $N$ voidaan *yhdistää* uudeksi, **yhdistetyksi operaatioksi** seuraavilla tavoilla:

(i) ”Suoritetaan operaatio $M$ *ja* operaatio $N$”

(ii) ”Suoritetaan operaatio $M$ *tai* operaatio $N$”

**Kombinatoriikan perusperiaatteet** liittyvät näiden kahden yhdistetyn operaation *suoritustapojen lukumäärien* laskemiseen.

(i) **Kertolaskuperiaate**: Oletetaan, että operaatio $M$ voidaan suorittaa $m$:llä erilaisella tavalla ja operaatio $N$ voidaan suorittaa $n$:llä erilaisella tavalla ja oletetaan lisäksi, että operaatiot $M$ ja $N$ voidaan suorittaa toisistaan **riippumatta**. Tällöin yhdistetty operaatio

”Suoritetaan operaatio $M$ *ja* operaatio $N$”

voidaan suorittaa $m \times n$:llä erilaisella tavalla.

(ii) **Yhteenlaskuperiaate**: Oletetaan, että operaatio $M$ voidaan suorittaa $m$:llä erilaisella tavalla ja operaatio $N$ voidaan suorittaa $n$:llä erilaisella tavalla ja oletetaan lisäksi, että operaatiot $M$ ja $N$ ovat **toisensa poissulkevia**. Tällöin yhdistetty operaatio

”Suoritetaan operaatio $M$ *tai* operaatio $N$”

voidaan suorittaa $(m + n)$:llä erilaisella tavalla.

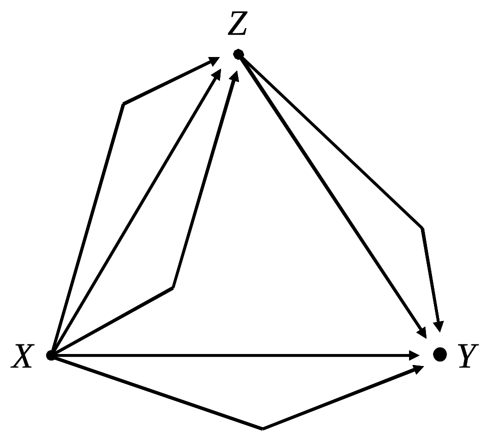
**Esimerkki 1. Vaihtoehtojen lukumäärien laskeminen.**

Oletetaan, että kaupunkien $X$ ja $Y$ välillä on 2 suoraa lentoa, mutta että $X$:stä $Y$:hyn pääsee myös kaupungin $Z$ kautta:

(i) Kaupunkien $X$ ja $Z$ välillä on 3 lentoa.

(ii) Kaupunkien $Z$ ja $Y$ välillä on 2 lentoa.

Ks. kuvaa oikealla.




Oletetaan vielä, että lentojen valinnat voidaan tehdä toisistaan *riippumatta*.

*Kuinka monella erilaisella tavalla* voidaan lentää $X$:stä $Y$:hyn?

Koska lentojen valinnat voidaan tehdä toisistaan *riippumatta*, $Z$:n kautta tapahtuviin lentoihin voidaan soveltaa kombinatoriikan *kertolaskuperiaatetta*. Sen mukaan $X$:stä $Y$:hyn pääsee lentämään $Z$:n kautta

$$3 \times 2 = 6$$

erilaisella tavalla.

Koska suorat lennot $X$:stä $Y$:hyn ja lennot $Z$:n kautta ovat *toisensa poissulkevia*, lentojen kokonaislukumäärä saadaan soveltamalla kombinatoriikan *yhteenlaskuperiaatetta*. Sen mukaan $X$:stä $Y$:hyn pääsee lentämään kaikkiaan

$$2 + 6 = 8$$

erilaisella tavalla.

## 5.3. Kombinatoriikan perusongelmat

Olkoon $S$ äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

$$n = n_S = n(S)$$

**Kombinatoriikan perusongelmat**:

(1a) Kuinka monella erilaisella tavalla joukon $S$ alkiot voidaan järjestää **jonoon**?

(1b) Kuinka monella erilaisella tavalla joukon $S$ alkioista voidaan muodostaa $k$:n alkion **osajono**?

(2) Kuinka monella erilaisella tavalla joukon $S$ alkioista voidaan muodostaa $k$:n alkion **osajoukko**?

Huomaa, että ongelma (1a) on ongelman (1b) erikoistapaus.

### Joukko

**Joukko** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* tunnetaan. Olkoot äärellisen joukon $S$ (erilaiset) alkiot

$$s_1, s_2, \dots , s_n$$

Tällöin merkitsemme joukkoa $S$ seuraavalla tavalla:

$$S = \{s_1, s_2, \dots , s_n\}$$

*Joukot* $A$ ja $B$ ovat **samat**, jos niissä on samat alkiot eli

$$A = B$$

jos ja vain jos

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

### Jono

**Jono** on täysin määrätty, jos sen *alkiot* ja niiden *järjestys* tunnetaan. Olkoon äärellisen jonon $s$ $i$. alkio

$$s_i \,,\ i = 1, 2, \dots , n$$

Tällöin merkitsemme jonoa $s$ seuraavalla tavalla:

$$s = (s_1, s_2, \dots , s_n)$$

tai hieman yksinkertaisemmin

$$s = s_1 s_2 \cdots s_n$$

*Jonot* $a = (a_1, a_2, \dots , a_n)$ ja $b = (b_1, b_2, \dots , b_n)$ ovat **samat**, jos niissä on samat alkiot samassa järjestyksessä eli

$$a = b$$

jos ja vain jos

$$a_i = b_i \,,\ i = 1, 2, \dots , n$$

**Esimerkki 1. Joukkojen ja jonojen samuus.**

*Joukot*

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{3, 1, 3, 2\}$

ovat samat, koska niissä on samat alkiot:

$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 3, 2\}$

*Jonot*

123

132

ovat eri jonoja, koska niiden alkiot ovat eri järjestyksessä:

$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$

**Esimerkki 2. Osajoukkojen ja osajonojen lukumäärien laskeminen.**

Olkoon

$S = \{1, 2, 3\}$

Kaikki joukon $S$ alkioiden muodostamat *osajoukot*:

*Kolmen* alkion osajoukot:

$\{1, 2, 3\}$ 1 kpl

*Kahden* alkion osajoukot:

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 3 kpl

*Yhden* alkion osajoukot:

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 3 kpl

*Kaikki* joukon $S$:n osajoukot:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$ 8 kpl

Kaikki joukon $S$ alkioiden muodostamat *osajonot*:

*Kolmen* alkion osajonot:

123, 132, 213, 231, 312, 321 6 kpl

*Kahden* alkion osajonot:

12, 21, 13, 31, 23, 32 6 kpl

*Yhden* alkion osajonot:

1, 2, 3 3 kpl

## 5.4. Kombinatoriikan perusongelmien ratkaiseminen

### Permutaatio

Olkoon $S$ äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

$n = n(S)$

Kutsumme joukon $S$ *kaikkien alkioiden jonoja* joukon $S$ alkioiden **permutaatioiksi**. Joukon $S$ alkioiden kaikkien mahdollisten permutaatioiden lukumäärä on

$$n!$$

jossa

$$n! = n\times(n-1)\times \cdots \times 2\times 1$$

on ns. *n-kertoma*.

**Perustelu:**

Käytämme permutaatioiden lukumäärän kaavan johdossa apuna ns. **lokeromallia**.

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n$ ja oletetaan, että käytettävissämme on *lokerikko*, jossa on $n$ *lokeroa*:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lokerot →** | **1** | **2** | **3** | … | ***n*–1** | ***n*** |

Asetetaan joukon $S$ alkiot lokerikkoon yksi kerrallaan niin, että jokaiseen lokeroon tulee täsmälleen yksi alkio. Lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä *vaiheittain*.

Vaiheessa $k = 1, 2, \ldots , n$:

(i) Lokeroista on täytetty $(k - 1)$ kpl.

(ii)Joukossa $S$ on jäljellä $(n - k + 1)$ alkiota.

(iii) Suoritetaan operaatio

”Valitaan joukon $S$ *jäljellä olevista alkioista yksi* lokeroon $k$”

Kohdan (iii) operaatio voidaan suorittaa $(n - k + 1)$:llä erilaisella tavalla:

$k = 1$: Joukosta $S$ voidaan valita alkio $n$:llä tavalla.

$k = 2$: Joukosta $S$ voidaan valita alkio $(n - 1)$:llä tavalla.

…

$k = n - 1$: Joukosta $S$ voidaan valita alkio 2:lla tavalla.

$k = n$: Joukosta $S$ voidaan valita alkio 1:llä tavalla.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lokerot →** | **1** | **2** | **3** | … | ***n*–1** | ***n*** |
| **Operaatioiden lkm →** | ***n*** | ***n*–1** | ***n*–2** | | **2** | **1** |

Tarkastellaan *yhdistettyä* operaatiota, jossa vaiheet $k = 1, 2, \ldots , n$ käydään läpi peräkkäin. Kuinka monella erilaisella tavalla tämä *yhdistetty operaatio* voidaan suorittaa?

Koska jokainen kohdan (iii) operaatio voidaan suorittaa *edellisistä operaatioista riippumatta*, kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteesta* seuraa, että lokeroiden täyttäminen voidaan tehdä

$$n\times(n - 1)\times \cdots \times 2\times 1 = n!$$

erilaisella tavalla.

■

Tulos ratkaisee *kombinatoriikan ensimmäisen perusongelman* (1a): Kuinka monella erilaisella tavalla $n$:n (erilaisen) alkion joukon $S$ alkiot voidaan järjestää *jonoon*?

### *n*-kertoma

Permutaatioiden lukumäärän antava ***n*-kertoma** voidaan laskea seuraavalla *palautuskaavalla*:

$$n! = n\times(n-1)!\ ,\ n = 1, 2, \ldots$$

Määritellään:

$$0! = 1$$

Palautuskaavasta:

$$1! = 1\times 0! = 1\times 1 = 1$$

$$2! = 2\times 1! = 2\times 1 = 2$$

$$3! = 3\times 2! = 3\times 2\times 1 = 6$$

$$4! = 4\times 3! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

$$5! = 5\times 4! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$

$$\ldots$$

### Variaatio

Olkoon $S$ äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

$$n = n(S)$$

Kutsumme joukon $S$ *k:n alkion osajonoja* joukon $S$ alkioiden ***k*-permutaatioiksi** eli **variaatioiksi**. Joukon $S$ alkioiden kaikkien mahdollisten $k$-permutaatioiden lukumäärä on

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$$

**Perustelu:**

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n$.

Joukon $S$ kaikkien alkioiden permutaatioiden lukumäärää koskevasta todistuksesta nähdään, että $n$:stä alkiosta voidaan valita $k$ alkiota $k$:hon *ensimmäiseen* lokeroon

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$$

erilaisella tavalla. Laventamalla saadaan

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

■

Tulos ratkaisee *kombinatoriikan toisen perusongelman* (1b): Kuinka monella erilaisella tavalla $n$:n (erilaisten) alkion joukon $S$ alkioista voidaan muodostaa $k$:n alkion *osajono*?

Jos

$$k = n$$

niin kombinatoriikan perusongelma (1b) kutistuu perusongelmaksi (1a). Koska olemme sopineet, että 0! = 1, niin

$$\mathrm{P}(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

## Kombinaatio

Olkoon $S$ äärellinen joukko, jonka (erilaisten) alkioiden lukumäärä on

$$n = n(S)$$

Kutsumme joukon $S$ *k:n alkion osajoukkoja* joukon $S$ alkioiden *k alkiota sisältäviksi* **kombinaatioiksi**.

Joukon $S$ alkioiden kaikkien mahdollisten $k$ alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä on

$$\mathrm{C}(n,k) = \binom{n}{k}$$

jossa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

on ns. *binomikerroin*.

**Perustelu:**

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä $n$.

Perustelemme kombinaatioiden lukumäärää koskevan kaavan *määräämällä* joukon $S$ alkioiden $k$ alkiota sisältävien *permutaatioiden lukumäärän kahdella erilaisella tavalla* ja merkitsemällä tulokset yhtä suuriksi. Saamme näin yhtälön, josta (toistaiseksi tuntematon) kombinaatioiden lukumäärä C($n$, $k$) voidaan ratkaista.

Joukon $S$, jossa on $n$ alkiota, $k$-permutaatioiden lukumäärä on edellä esitetyn mukaan

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k-1)$$

Toisaalta joukon $S$ alkioiden $k$-permutaatio voidaan muodostaa *kahdessa vaiheessa*:

(1) Valitaan joukon $S$ alkioista $k$ alkiota sisältävä osajoukko. Tämä operaatio voidaan tehdä

$$\mathrm{C}(n, k)$$

erilaisella tavalla, jossa C($n$, $k$) on toistaiseksi tuntematon joukon $S$ alkioiden $k$ alkiota sisältävien permutaatioiden lukumäärä.

(2) Järjestetään valitun osajoukon $k$ alkiota jonoon. Tämä operaatio voidaan tehdä

$$k!$$

erilaisella tavalla.

Koska operaatiot (1) ja (2) voidaan suorittaa *toisistaan riippumatta*, niin kombinatoriikan *kertolaskuperiaatteesta* seuraa, että joukon $S$ alkioiden $k$ alkiota sisältävien *permutaatioiden lukumäärä* on

$$\mathrm{P}(n, k) = \mathrm{C}(n, k)\times k!$$

Olemme siten saaneet yhtälön

$$\mathrm{P}(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = \mathrm{C}(n,k)\times k!$$

josta C($n$, $k$) ratkaisemalla saadaan haluttu tulos:

$$\mathrm{C}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

■

Tulos ratkaisee *kombinatoriikan kolmannen perusongelman* (2): Kuinka monella erilaisella tavalla $n$:n (erilaisen) alkion joukon $S$ alkioista voidaan muodostaa $k$:n alkion *osajoukko*?

Kerrointa

$$\mathrm{C}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

kutsutaan **binomikertoimeksi** ja se luetaan ”$n$ yli $k$:n”. Koska olemme sopineet, että 0! = 1, niin

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1 = \frac{n!}{n!0!} = \binom{n}{n}$$

## Permutaatiot, variaatiot, kombinaatiot

Joukon alkioiden *permutaatioissa* ja *variaatioissa* alkioiden *järjestys on merkityksellinen*, mutta sen sijaan joukon alkioiden *kombinaatioissa* alkioiden *järjestys ei ole merkityksellinen*.

**Esimerkki 1. Permutaatiot, variaatiot, kombinaatiot.**

Ongelma 1:

Kuinka monta erilaista 3-*numeroista kokonaislukua* voidaan muodostaa numeroista

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

kun lukuja muodostettaessa ”etunollat” merkitään näkyviin.

Esimerkkejä:

5 = 005

19 = 019

Kaikki näin saatavat 3-numeroiset kokonaisluvut ovat muotoa

*xyz*

olevia *jonoja*, joissa numerot $x$, $y$ ja $z$ valitaan joukosta

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Numeroiden $x$, $y$ ja $z$ valinta jonoon $xyz$ voidaan tehdä *kahdella erilaisella tavalla*:

(i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.

(ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.

Tarkastellaan ensin tapausta:

(i) Aikaisemmin valitun numeron *saa* valita uudelleen.

Käytetään apuna *lokeromallia*: Kokonaisluku *xyz* muodostuu kolmesta lokerosta, joista jokainen voidaan täyttää *toisistaan riippumatta* 10:llä erilaisella objektilla.

*Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot *xyz* voidaan täyttää

$$10\times10\times10 = 1000$$

erilaisella tavalla. Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa saa olla samoja numeroita*, on 1000 kpl. Tulos on tietysti sopusoinnussa sen kanssa, että kokonaislukujen

000, 001, 002, … , 010, 011, 012, … , 100, 101, 102, … , 999

lukumäärä on 1000.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta:

(ii) Aikaisemmin valittua numeroa *ei saa* valita uudelleen.

Käytetään apuna *lokeromallia*: Kokonaisluku *xyz* muodostuu kolmesta lokerosta, jotka voidaan täyttää vaiheittain seuraavalla tavalla:

1. lokero *x* voidaan täyttää 10:llä erilaisella objektilla.

2. lokero *y* voidaan täyttää *vaiheesta* (1) *riippumatta* 9:llä erilaisella objektilla, koska 1 objekteista on käytetty.

3. lokero *z* voidaan täyttää *vaiheesta* (2) *riippumatta* 8:lla erilaisella objektilla, koska 2 objekteista on käytetty.

*Kertolaskuperiaatteen* mukaan lokerot *xyz* voidaan täyttää

$$10\times9\times8 = 720$$

erilaisella tavalla. Siten erilaisia 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero ei saa esiintyä kuin kerran*, on 720 kpl.

Huomaa, että sama tulos saadaan huomaamalla, että tapauksessa (ii) on itse asiassa määrättävä joukon {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} 3-*permutaatioiden lukumäärä*:
3-permutaatioiden lukumääräksi saadaan

$$\mathrm{P}(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10\cdot9\cdot8 = 720$$

mikä tietysti yhtyy aikaisemmin saatuun tulokseen.

Ongelma 2:

Kuinka monta erilaista 3:n alkion *osajoukkoa* voidaan valita numeroiden 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 muodostamasta joukosta

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Ratkaisun antaa binomikerroin C(10,3):

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$$

Siten joukosta

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

voidaan valita 3:n alkion *osajoukko* 120:llä erilaisella tavalla.

Huomaa asetettujen ehtojen vaikutus:

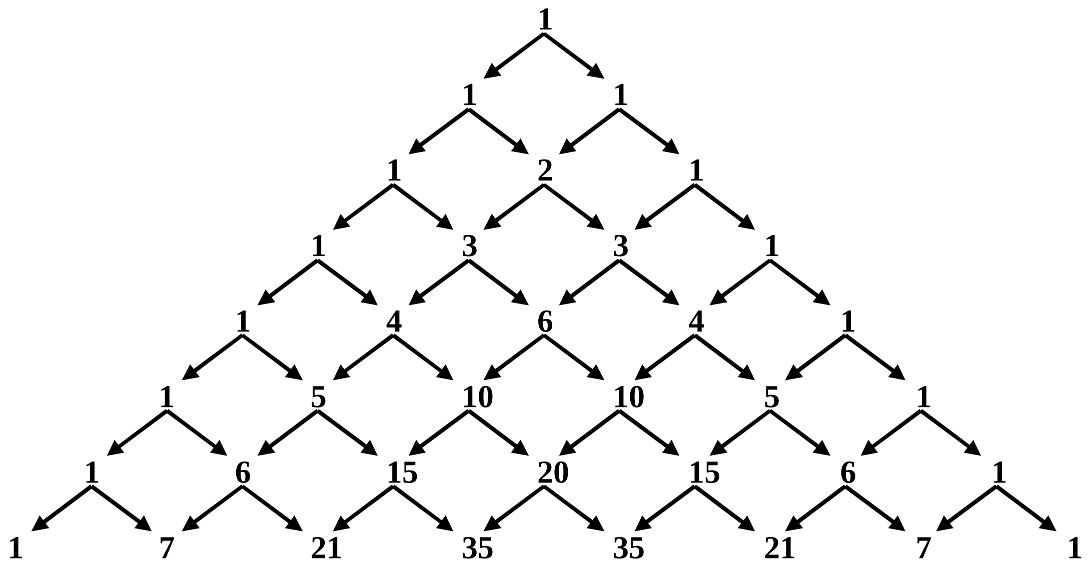
(i) Numeroista 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 voidaan muodostaa 1000 kpl 3-numeroisia lukuja, *joissa sama numero saa esiintyä useamman kerran.*

(ii) Joukosta {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} voidaan muodostaa 720 kpl 3:n numeron *osajonoja*.

(iii) Joukosta {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} voidaan muodostaa 120 kpl 3:n numeron *osajoukkoja*.

## Pascalin kolmio

Binomikertoimet saadaan ns. *Pascalin kolmiosta*. Alla on annettu Pascalin kolmion 8 ensimmäistä riviä.




Lukuun ottamatta kolmion reunoilla olevia ykkösiä jokainen kolmion luvuista on saatu laskemalla yhteen kaksi edeltävän rivin lukua nuolten suuntaan.

## Pascalin kolmio ja binomikertoimet

Pascalin kolmion ($n$+1). rivillä ovat binomikertoimet

$$\binom{n}{k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Pascalin kolmion *muodostamissääntö* voidaan ilmaista binomikertoimien avulla seuraavassa muodossa:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Kaavan mukaan Pascalin kolmion $n$. rivin $k$. luku saadaan laskemalla yhteen ($n$–1). rivin ($k$–1). ja $k$. luku.

**Perustelu:**

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

■

Pascalin kolmio on *symmetrinen* kolmion rivien keskikohdan suhteen, mikä voidaan ilmaista binomikertoimien avulla seuraavassa muodossa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

**Perustelu:**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

■

## Binomikaava

**Binomikaavan** mukaan *binomin*

$$x + y$$

*n. potenssi* voidaan esittää muodossa

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

**Perustelu:**

Kun binomi

$$x + y$$

korotetaan potenssiin $n$, saadaan summalauseke, jonka termit ovat muotoa

$$x^{n-k}y^k\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

*Yhdistetään* sellaiset termit, joissa esiintyy *sama* $x$:n potenssi ja *järjestetään* näin saadut termit $x$:n alenevien potenssien mukaiseen järjestykseen. Yhdistämisen tuloksena saadaan ($n$ +1) termiä sisältävä summalauseke, jonka ($k$ + 1). termi on muotoa

$$\mathrm{D}(n,k)x^{n-k}y^k\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ja jossa D($n$, $k$) on muotoa $x^{n-k}y^k$ olevien termien lukumäärä.

Tehtävänä on määrätä D($n$, $k$) eli se *kuinka monella erilaisella tavalla muotoa* $x^{n-k}y^k$ *oleva termi syntyy*, kun binomi

$$x + y$$

korotetaan potenssiin $n$.

Käytetään tehtävän ratkaisemisessa *lokeromallia*: Täytetään lokerikko, jossa on $n$ lokeroa, tyyppiä $x$ ja tyyppiä $y$ olevilla objekteilla, kun tyyppiä $x$ olevia objekteja on ($n - k$) kpl ja tyyppiä $y$ olevia objekteja on $k$ kpl. Haluamme tietää, kuinka monella erilaisella tavalla tämä operaatio voidaan suorittaa.

Koska tyyppiä $y$ olevien objektien paikat *on määrätty* sen jälkeen, kun tyyppiä $x$ olevat objektit on sijoitettu lokerikkoon, riittää tarkastella sitä, kuinka monella erilaisella tavalla ($n - k$) kpl tyyppiä $x$ olevia objekteja voidaan sijoittaa lokerikkoon, jossa on $n$ lokeroa.

Tämä tehtävä on selvästi ekvivalentti seuraavan tehtävän kanssa: Kuinka monella erilaisella tavalla joukosta, jossa on $n$ alkiota, voidaan valita *osajoukko*, jossa on ($n - k$) alkiota? Tämä on *kombinatoriikan perusongelma* (2) (ks. kappaletta **Kombinatoriikan perusongelmat**), joten ratkaisuksi saadaan *binomikerroin*

$$\mathrm{D}(n,k) = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

■

**Esimerkki 2. Binomikaava.**

*Binomikaavan* mukaan binomin

$$x + y$$

4. potenssi voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}x^{4-k}y^k = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Tulos on sopusoinnussa sen kanssa, että *Pascalin kolmion* 5. rivin luvut ovat

1, 4, 6, 4, 1

Tarkastellaan vielä sitä, miten tyyppiä $x^2y^2$ olevat termit syntyvät: Kaikki mahdolliset muotoa $x^2y^2$ olevat tulot ovat

*xxyy* *xyxy* *xyyx*

*yxxy* *yxyx* *yyxx*

Tuloja on siis 6 kappaletta.

Koska tässä $n = 4$ ja $k = 2$, binomikertoimen kaavasta saadaan tämän tuloksen kanssa yhtäpitävästi

$$\mathrm{C}(4,2) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$$

### Äärellisen joukon osajoukkojen lukumäärä

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

Tällöin joukon $S$ osajoukkojen lukumäärä on

$$N = 2^n$$

Tässä lukumäärässä ovat mukana:

(1) Tyhjä joukko $\varnothing$

(2) Kaikki *yhden* alkion osajoukot

(3) Kaikki *kahden* alkion osajoukot

(4) Kaikki *kolmen* alkion osajoukot

…

($n$) Kaikki ($n$ – 1):n alkion osajoukot

($n$ + 1) Joukko $S$

**Perustelu:**

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

Joukolla $S$ on $k$ alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan

$$\mathrm{C}(n,k) = \binom{n}{k}$$

osajoukkoa, jossa on $k$ alkiota, $k = 0, 1, 2, \ldots , n$.

Joukon $S$ *osajoukkojen kokonaislukumäärä* $N$ saadaan laskemalla kaikki binomikertoimet

$$\mathrm{C}(n, k),\ k = 0, 1, 2, \ldots , n$$

yhteen:

$$N = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Toisaalta *binomikaavan* mukaan, kun kaavaan sijoitetaan $x = y = 1$:

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan joukon $S$ kaikkien osajoukkojen lukumääräksi

$$N = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

jossa binomikerroin

$$\binom{n}{k}$$

kertoo joukon $S$ sellaisten osajoukkojen lukumäärän, joissa on $k$ alkiota, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

■

## Esimerkkejä lukumäärien laskemisesta

**Esimerkki 3. Lotto.**

Lotossa 1 ruudukko lototaan valitsemalla 7 numeroa 39:stä. Kuinka monta erilaista lotto-ruudukkoa on olemassa?

Tämä kysymys voidaan muotoilla myös seuraavalla tavalla: Kuinka monta erilaista 7:n alkion osajoukkoa voidaan valita 39:n erilaisen alkion joukosta?

Vastauksen antaa *kombinaatioiden lukumäärää* koskeva tulos:

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!32!} = 15\,380\,937$$

**Esimerkki 4. Lotto.**

Lotossa 1 ruudukko lototaan valitsemalla 7 numeroa 39:stä. Kuinka montako sellaista lotto-ruudukkoa on olemassa, joissa on *täsmälleen* 5 oikein?

5 oikein saadaan, jos on valittu 5 numeroa 7:n oikean numeron joukosta ja 2 numeroa 32:n väärän numeron joukosta.

5 numeroa voidaan valita

$$\binom{7}{5}$$

erilaisella tavalla 7:n oikean numeron joukosta ja 2 numeroa voidaan valita

$$\binom{32}{2}$$

erilaisella tavalla 32:n väärän numeron joukosta. Lisäksi valinnat voidaan tehdä *toisistaan riippumatta*. Siten *kertolaskuperiaatteesta* seuraa, että 5 oikein sisältävien rivien lukumäärä on

$$\binom{7}{5}\binom{32}{2} = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{32!}{2!30!} = 21 \times 496 = 10\,416$$

**Esimerkki 5. Pokeri.**

Oletetaan, että pelaamme pokerin muotoa, jossa jokaiselle pelaajalle jaetaan 52:n kortin pakasta (ts. pakassa ei ole mukana jokereita) aluksi 5 korttia. Kuinka monta sellaista kättä on olemassa, joissa on 5 korttia?

Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan vastauksena on

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

kappaletta.

**Esimerkki 6. Bridge.**

Bridgessä on neljä pelaajaa ja jokaiselle pelaajalle jaetaan 52:n kortin pakasta (ts. pakassa ei ole mukana jokereita) 13 korttia. Kuinka monta sellaista kättä on olemassa, joissa on 13 korttia?

Kombinaatioiden lukumäärää koskevan tuloksen mukaan vastauksena on

$$\binom{52}{13} = 635\,013\,559\,600$$

kappaletta.

## 5.5. Multinomikerroin

Olkoon joukon $S$ (erilaisten) alkioiden lukumäärä

$$n = n(S)$$

Oletetaan, että positiiviset kokonaisluvut

$$n_i\,,\; i = 1, 2, \ldots, k$$

toteuttavat ehdon

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

Ositetaan joukko $S$ *pistevieraisiin* osajoukkoihin

$$A_i\,,\; i = 1, 2, \ldots, k$$

niin, että joukossa $A_i$ on

$$n_i = n(A_i)$$

alkiota. Kuinka monella erilaisella tavalla tällainen ositus voidaan tehdä?

Vastauksen antaa **multinomikerroin**

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

jossa siis

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

Multinomikertoimen kaava voidaan johtaa samanlaisella tekniikalla kuin binomikertoimen kaava.

Jos $k = 2$, multinomikertoimesta saadaan *binomikerroin*

$$\binom{n}{n_1\ n_2} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$$

jossa

$$n_1 + n_2 = n$$

Multinomikertoimet ovat kertoimina *multinomin*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

*n. potenssin*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$$

kehityskaavan muotoa

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

olevissa termeissä, joissa siis potensseja $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sitoo ehto

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

**Esimerkki. Multinomikerroin.**

Sanassa *kasa* on 4 kirjainta, joiden joukossa on 3 *erilaista* kirjainta:

| | |
|---|---|
| *k* | 1 kpl |
| *a* | 2 kpl |
| *s* | 1 kpl |

Kuinka monta *erilaista* neljän kirjaimen mittaista ”sanaa” voidaan muodostaa permutoimalla sanan *kasa* kirjaimia *k, a, s* ja *a*?

Erilaisten sanojen lukumäärän antaa *multinomikerroin*

$$\binom{4}{1\ \ 2\ \ 1} = \frac{4!}{1!2!1!} = 12$$

*Tässä* tapauksessa erilaiset sanat on helppo *luetella*:

*a*-alkuiset sanat:

*aaks* *aask* *akas* *aksa* *asak* *aska*

*k*-alkuiset sanat:

*kaas* *kasa* *ksaa*

*s*-alkuiset sanat

*saak* *saka* *skaa*

Sanoja on todellakin 12 kpl kuten edellä todettiin.

# 6. Todennäköisyyden aksioomat



Tarkastelemme tässä luvussa todennäköisyyslaskentaa **aksiomaattisena matemaattisena teoriana**.

Käsittely on jaettu kahteen osaan:

- **Äärelliset otosavaruudet**.
- **Mielivaltaiset** (äärettömät) **otosavaruudet**.

Todennäköisyyden aksioomien olennaisena sisältönä on se, että **todennäköisyys on mitta matemaattisen mittateorian tarkoittamassa mielessä**.

Näytämme myös sen, että **klassista todennäköisyyttä** ja **suhteellista frekvenssiä** (**empiiristä todennäköisyyttä**) voidaan pitää sopivasti määriteltyinä todennäköisyyden käsitteen *erikois-tapauksina* ja sen, että **ehdollinen todennäköisyys** on todennäköisyyden käsitteen *laajennus*.

### Avainsanat:

Additiivinen mitta, Boolen algebra, Ehdollinen todennäköisyys, Empiirinen todennäköisyys, Epämitallinen joukko, Jatkuvuusaksiooma, Joukko, Klassinen todennäköisyys, Kolmogorovin aksioomat, Komplementti, Mahdoton tapahtuma, Mitallinen joukko, Mitta, Mitallisuus, Normeerattu mitta, Osajoukko, Otosavaruus, Perusjoukko, Positiivinen mitta, Riippumattomuus, $\sigma$-algebra, Suhteellinen frekvenssi, Tapahtuma, Todennäköisyyden aksioomat, Todennäköisyys, Todennäköisyyskenttä, Todennäköisyysmitta, Toisensa poissulkevuus, Yhdistetty tapahtuma, Yhteenlaskusääntö, Yleinen yhteenlaskusääntö, Äärellinen todennäköisyyskenttä, Äärellisen otosavaruuden aksioomat

## 6.1. Todennäköisyys äärellisissä otosavaruuksissa

Tarkastelemme ensin todennäköisyyden määrittelemistä **äärellisissä otosavaruuksissa**. Suuri osa tässä todennäköisyyslaskennan esityksessä sovellettavista todennäköisyyden laskusäännöistä voidaan todistaa *äärellisten otosavaruuksien aksioomista*.

### Boolen algebrat

Olkoon $S$ joukko ja jokin $\mathsf{F}$ joukon $S$ osajoukkojen muodostama *perhe* eli

$$A \in \mathsf{F} \Rightarrow A \subset S$$

Joukkoperhe $\mathsf{F}$ on **Boolen algebra**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathsf{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathsf{F}$$

(ii) Jos joukko $A$ on joukkoperheen $\mathsf{F}$ alkio, niin myös sen *komplementti* $A^c$ on joukkoperheen $\mathsf{F}$ alkio:

$$A \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \in \mathsf{F}$$

(iii) Jos joukot $A$ ja $B$ ovat joukkoperheen $\mathsf{F}$ alkioita, niin myös niiden *yhdiste* $A \cup B$ on joukkoperheen $\mathsf{F}$ alkio:

$$A \in \mathsf{F},\ B \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathsf{F}$$

**Lause 1.**

Olkoon $\mathsf{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty *Boolen algebra* ja oletetaan, että

$$A \in \mathsf{F},\ B \in \mathsf{F}$$

Tällöin

(a) $S \in \mathsf{F}$

(b) $A \cap B \in \mathsf{F}$

(c) $A \setminus B \in \mathsf{F}$

(d) $B \setminus A \in \mathsf{F}$

**Todistus:**

Olkoon $\mathsf{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra ja oletetaan, että

$$A \in \mathsf{F},\ B \in \mathsf{F}$$

Huomaa, että *Boolen algebran aksioomista* seuraa, että

$$\varnothing \in \mathsf{F},\ A^c \in \mathsf{F},\ B^c \in \mathsf{F},\ A \cup B \in \mathsf{F}$$

(a) Osoitetaan, että

$$S \in \mathsf{F}$$

Todetaan ensin, että

$S = \emptyset^c$

Boolen algebran aksiooman (i) mukaan

$\emptyset \in \mathsf{F}$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$\emptyset \in \mathsf{F} \Rightarrow \emptyset^c = S \in \mathsf{F}$

(b) Osoitetaan, että $A \cap B \in \mathsf{F}$.

Todetaan ensin, että *De Morganin lain* mukaan

$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

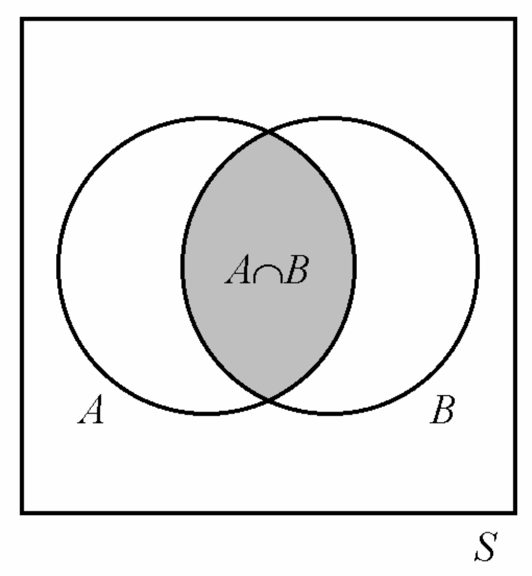
$A \in \mathsf{F}\,,\, B \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \in \mathsf{F}\,,\, B^c \in \mathsf{F}$

Boolen algebran aksiooman (iii) mukaan

$A^c \in \mathsf{F}\,,\, B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathsf{F}$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$A^c \cup B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c = A \cap B \in \mathsf{F}$




(c) Osoitetaan, että $A \setminus B \in \mathsf{F}$.

Todetaan ensin, että

$A \setminus B = A \cap B^c$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$B \in \mathsf{F} \Rightarrow B^c \in \mathsf{F}$

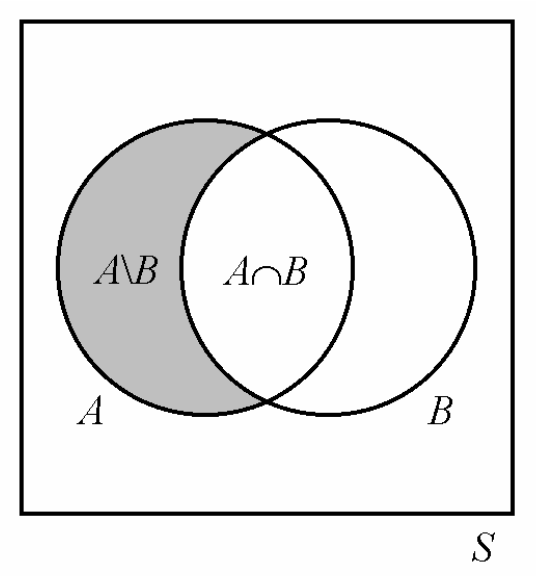
Kohdan (b) mukaan

$A \in \mathsf{F}\,,\, B^c \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cap B^c = A \setminus B \in \mathsf{F}$

(d) Sen osoittaminen, että

$B \setminus A \in \mathsf{F}$

tapahtuu samalla tavalla kuin (c)-kohdan todistus.




■

Boolen algebran aksioomista ja lauseesta 1 seuraa, että Boolen algebrat ovat **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, kun operaatioita tehdään *äärellinen määrä*. Tällä tarkoitetaan siitä, että *äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie Boolen algebran ulkopuolelle*: Jos Boolen algebran $\mathsf{F}$ joukkoihin sovelletaan *äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen Boolen algebraan $\mathsf{F}$.

**Esimerkki. Boolen algebra.**

Olkoon $S$ mielivaltainen joukko ja olkoon

$$A \subset S$$

mielivaltainen joukon $S$ osajoukko. Tällöin joukkoperhe

$$\mathsf{F} = \{\varnothing, A, A^c, S\}$$

muodostaa Boolen algebran joukossa $S$, koska

(i) $\varnothing \in \mathsf{F}$

(ii) $B \in \mathsf{F} \Rightarrow B^c \in \mathsf{F}$

(iii) $B \in \mathsf{F}\,,\, C \in \mathsf{F} \Rightarrow B \cup C \in \mathsf{F}$

jossa $B$ ja $C$ voivat olla mitkä tahansa kaksi joukoista

$$\varnothing, A, A^c, S$$

**Todennäköisyyslaskennassa** perusjoukkoa $S$ kutsutaan **otosavaruudeksi** ja otosavaruuden $S$ alkioita kutsutaan **alkeistapahtumiksi**. Jos siis $s$ on *alkeistapahtuma*, niin

$$s \in S$$

Jos $\mathsf{F}$ on jokin otosavaruudessa $S$ määritelty *Boolen algebra*, niin kutsumme Boolen algebraan $\mathsf{F}$ kuuluvia otosavaruuden $S$ osajoukkoja **tapahtumiksi**. Jos siis joukko $A$ on *tapahtuma*, niin

$$A \in \mathsf{F}$$

Olkoon $\mathsf{F}$ *otosavaruudessa S* määritelty *Boolen algebra*. Olkoot otosavaruuden $S$ osajoukot $A$ ja $B$ *tapahtumia* eli oletetaan, että

$$A \in \mathsf{F}\,,\, B \in \mathsf{F}$$

Koska edellä esitetyn mukaan Boolen algebra $\mathsf{F}$ on *suljettu* tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, niin myös joukot

$$A^c\,,\, B^c\,,\, A \cup B\,,\, A \cap B\,,\, A \backslash B\,,\, B \backslash A$$

ovat *tapahtumia*. Tällä tarkoitetaan siis sitä, että

$$A^c \in \mathsf{F}\,,\, B^c \in \mathsf{F}\,,\, A \cup B \in \mathsf{F}\,,\, A \cap B \in \mathsf{F}\,,\, A \setminus B \in \mathsf{F}\,,\, B \setminus A \in \mathsf{F}$$

Tämä merkitsee siis sitä, että otosavaruuden tapahtumista voidaan johtaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin *äärellinen määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita.

Olkoon $S$ *äärellinen otosavaruus*, jossa on $n$ alkiota ja olkoon

$$2^S = \{A \mid A \subset S\}$$

otosavaruuden $S$ *kaikkien osajoukkojen perhe*. Joukkoperheessä $2^S$ on

$$2^n$$

alkiota; ks. luvun **Klassinen todennäköisyys ja kombinatoriikka** kappaletta **Kombinatoriikan perusongelmien ratkaiseminen**. Otosavaruuden $S$ kaikkien osajoukkojen perhe $2^S$ muodostaa *triviaalin Boolen algebran* joukossa $S$.

## Todennäköisyyden aksioomat äärellisissä otosavaruuksissa

Olkoon $S$ *äärellinen* joukko ja $\mathsf{F}$ jokin joukon $S$ osajoukkojen muodostama *Boolen algebra*. Olkoon lisäksi Pr *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen Boolen algebraan $\mathsf{F}$ kuuluvaan joukon $S$ osajoukkoon $A$ reaalikuvun eli

$$A \in \mathsf{F} \Rightarrow A \subset S \Rightarrow \Pr(A) \in$$

Joukkofunktio Pr on *äärellisen otosavaruuden* **todennäköisyysmitta**, jos

(i) $\Pr(S) = 1$

(ii) $0 \le \Pr(A) \le 1$ kaikille $A \in \mathsf{F}$

(iii) $A \in \mathsf{F}, B \in \mathsf{F}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

*Äärellisen otosavaruuden* todennäköisyyden aksioomien (i)-(iii) mukaan *todennäköisyys* Pr on *positiivinen*, *äärellisesti additiivinen* ja *normeerattu* **mitta**.

Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus* ja *positiivisuus*:

$$A \subset S \Rightarrow 0 \le \Pr(A) \le \Pr(S) = 1$$

Aksiooma (iii), *äärellinen additiivisuus*:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Aksiooma (iii) on *yhteenlaskusääntö toisensa poissulkeville tapahtumille*.

Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä. Todennäköisyyslaskentaa voidaankin pitää matemaattisen *mittateorian* erikoistuneena osana. Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen ylärajana on 1.

Äärellisen otosavaruuden tapahtumista voidaan muodostaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin *Boolen algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin laskusääntöjä. Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla niihin *äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomia* ja niistä johdettuja *todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä*.

## Alkeistodennäköisyyslaskennan laskusääntöjen todistaminen

*Todistamme* alla seuraavat todennäköisyyslaskennan laskusäännöt lähtien äärellisten otosavaruuksien todennäköisyyden aksioomista:

(i) **Mahdottoman tapahtuman** todennäköisyys.

(ii) **Komplementtitapahtuman** todennäköisyys.

(iii) **Osajoukon** todennäköisyys.

(iv) **Yleinen yhteenlaskusääntö**.

**Lause 2.**

Olkoon $S$ äärellinen otosavaruus ja olkoon $\mathsf{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra. Tällöin *mahdottoman tapahtuman* $\varnothing$ todennäköisyys on nolla:

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

**Todistus:**

Olkoon $\mathsf{F}$ äärellisen otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra ja olkoon $\varnothing$ mahdoton tapahtuma.

Boolen algebran aksiooman (i) mukaan

$$\varnothing \in \mathsf{F}$$

Lauseessa 1 on todistettu, että

$$S \in \mathsf{F}$$

Joukot $\varnothing$ ja $S$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen* eli

$$\varnothing \cup S = S$$

$$\varnothing \cap S = \varnothing$$

Todennäköisyyden aksioomien (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S) = \Pr(\varnothing \cup S) = \Pr(\varnothing) + \Pr(S) = \Pr(\varnothing) + 1$$

mikä ei voi olla totta, ellei

$$\Pr(\varnothing) = 0$$

■

**Lause 3.**

Olkoon $S$ äärellinen otosavaruus ja olkoon $\mathsf{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra. Oletetaan, että

$$A \in \mathsf{F}$$

Tällöin tapahtuman $A$ *komplementille* $A^c$ pätee:

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$

**Todistus:**

Olkoon $\mathsf{F}$ äärellisen otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra ja olkoon

$$A \in \mathsf{F}$$

Boolen algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A^c \in \mathsf{F}$$

Joukot $A$ ja $A^c$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen* eli

$$A \cup A^c = S$$

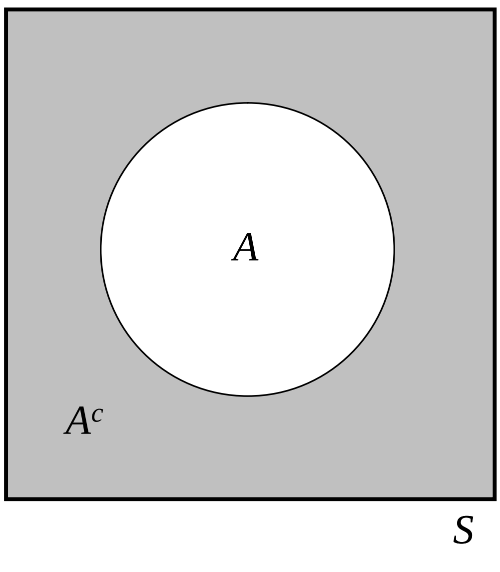
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Todennäköisyyden aksioomien (i) ja (iii) mukaan

$$1 = \Pr(S) = \Pr(A \cup A^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

joten

$$\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$$



■

**Lause 4.**

Olkoon $S$ äärellinen otosavaruus ja olkoon $\mathcal{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra. Oletetaan, että

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$$

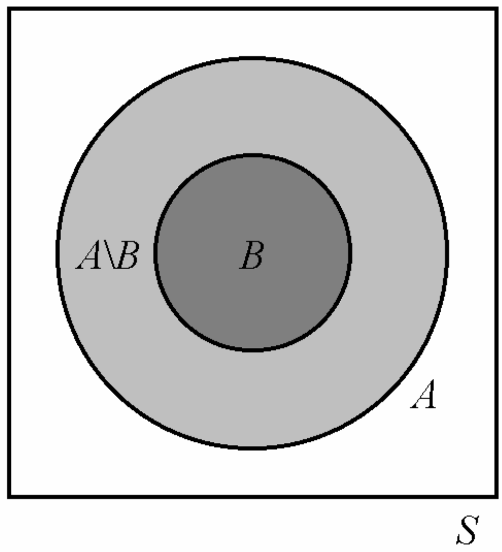
ja

$$B \subset A$$

Tällöin

$$\Pr(B) \leq \Pr(A)$$

**Todistus:**




Olkoon $\mathcal{F}$ äärellisen otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra ja olkoon

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$$

Oletetaan lisäksi, että

$$B \subset A$$

Lauseessa 1 on todistettu, että

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$$

Koska oletimme, että

$$B \subset A$$

niin joukot $B$ ja $A \setminus B$ muodostavat joukon $A$ *osituksen*:

$$B \cup (A \setminus B) = A$$

$$B \cap (A \setminus B) = \varnothing$$

Todennäköisyyden aksioomien (iii) ja (ii) mukaan

$$\Pr(A) = \Pr(B \cup (A \setminus B)) = \Pr(B) + \Pr(A \setminus B) \geq \Pr(B)$$

■

**Lause 5.**

Olkoon $S$ äärellinen otosavaruus ja olkoon $\mathcal{F}$ otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra. Oletetaan, että

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$$

Tällöin

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

**Todistus:**

Olkoon $\mathcal{F}$ äärellisen otosavaruuden $S$ osajoukoille määritelty Boolen algebra ja olkoon

$$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}$$

Boolen algebran aksioomien ja lauseen 1 mukaan

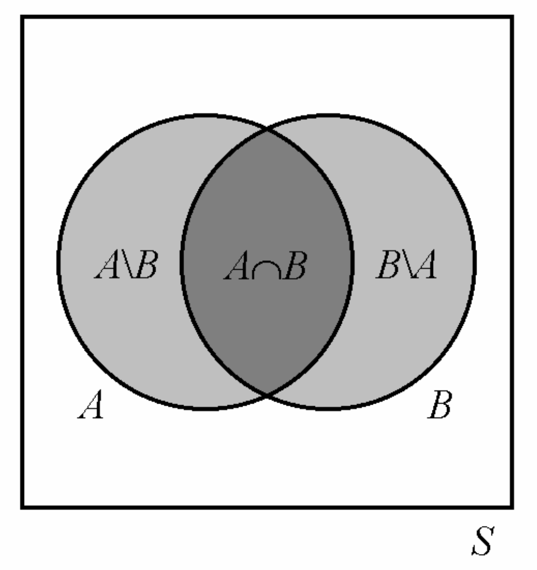
$$A \in \mathsf{F},\ B \in \mathsf{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathsf{F},\ A \cap B \in \mathsf{F},\ A \setminus B \in \mathsf{F},\ B \setminus A \in \mathsf{F}$$

Joukot $A$ ja $B \backslash A$ muodostavat joukon $A \cup B$ *osituksen*:

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A)$$

$$A \cap (B \backslash A) = \varnothing$$

Ks. viereistä kuvaa.




Todennäköisyyden aksiooman (iii) mukaan

(1) $$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$$

Joukot $A \cap B$ ja $B \backslash A$ muodostavat joukon $B$ *osituksen*:

$$B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$$

$$(A \cap B) \cap (B \backslash A) = \varnothing$$

Todennäköisyyden aksiooman (iii) mukaan

(2) $$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(B \backslash A)$$

Ratkaisemalla $\Pr(B \backslash A)$ yhtälöstä (2) ja sijoittamalla ratkaisu yhtälöön (1) saadaan väite:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

■

### Äärellinen todennäköisyyskenttä

Kolmikko

$$(S, \mathsf{F}, \Pr)$$

muodostaa **äärellisen todennäköisyyskentän**, jos $S$ on *äärellinen otosavaruus*, $\mathsf{F}$ on otosavaruudessa S määritelty *Boolen algebra* ja Pr on Boolen algebrassa $\mathsf{F}$ määritelty *todennäköisyysmitta*.

### Riippumattomuus ja riippumattomien tapahtumien tulosääntö

Sanomme, että tapahtumat $A$ ja $B$ ovat **riippumattomia**, jos ja vain jos *riippumattomien tapahtumien tulosääntö*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

pätee.

## 6.2. Klassinen todennäköisyys, suhteellinen frekvenssi ja ehdollinen todennäköisyys todennäköisyyksinä

### Klassinen todennäköisyys todennäköisyytenä

Olkoon

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*, jossa on

$$n = n(S)$$

alkeistapahtumaa. Oletetaan lisäksi, että otosavaruuden $S$ alkeistapahtumat ovat *symmetrisiä* eli yhtä todennäköisiä, jolloin

$$\Pr(s_i) = \frac{1}{n}\,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Olkoon

$$A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}\} \subset S$$

ko. satunnaiskokeeseen liittyvä *tapahtuma*, jossa on

$$k = n(A)$$

alkeistapahtumaa, joita sanotaan tapahtumalle $A$ *suotuisiksi*. Määritellään tapahtuman $A$ **klassinen todennäköisyys** $\Pr_c(A)$ kaavalla

$$\Pr_c(A) = \frac{k}{n}$$

jossa siis

$$k = n(A)$$

ja

$$n = n(S)$$

**Perustelu:**

Klassisen todennäköisyyden määritelmä voidaan perustella seuraavalla tavalla:

Olkoon

$$A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}\} \subset S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$$

Tällöin

$$A = \{s_{i_1}\} \cup \{s_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{s_{i_k}\}$$

ja lisäksi alkeistapahtumat

$$s_{i_j}\,,\; j = 1, 2, \ldots, k$$

ovat *pareittain toisensa poissulkevia*. Koska alkeistapahtumat $s_1, s_2, \ldots, s_n$ on oletettu *symmetrisiksi*, todennäköisyyden aksioomasta (iii) seuraa:

$$\Pr(A) = \Pr(s_{i_1}) + \Pr(s_{i_2}) + \cdots + \Pr(s_{i_k}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{k \text{ kpl}} = \frac{k}{n} = \Pr_c(A)$$

■

Klassinen todennäköisyys $\Pr_c(A)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii) äärellisille otosavaruuksille, joten **klassinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

**Perustelu:**

Aksiooma (i):

Koska

$n(S) = n$

niin

$$\Pr_c(S) = \frac{n}{n} = 1$$

Aksiooma (ii):

Kaikille tapahtumille $A \subset S$ pätee

$0 \le n(A) = k \le n = n(S)$

joten

$$0 \le \Pr_c(A) = \frac{k}{n} \le 1$$

Aksiooma (iii):

Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos

$A \cap B = \varnothing$

niin

$k_{A\cup B} = k_A + k_B$

Tällöin

$$\Pr_c(A \cup B) = \frac{k_{A\cup B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n} = \Pr_c(A) + \Pr_c(B)$$

■

Siten klassinen todennäköisyys on äärellisissä otosavaruuksissa määritellyn todennäköisyyden *erikoistapaus*.

### Suhteellinen frekvenssi todennäköisyytenä

Olkoon $S$ johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus* ja olkoon

$A \subset S$

ko. satunnaiskokeeseen liittyvä *tapahtuma*. *Toistetaan* satunnaiskoetta $n$ kertaa ja olkoon $f_A$ tapahtuman $A$ *frekvenssi* eli *lukumäärä* koetoistojen joukossa. Tällöin

$$\frac{f_A}{n}$$

on tapahtuman $A$ **suhteellinen frekvenssi**.

Käytetään tapahtuman $A$ suhteelliselle frekvenssille $f_A/n$ merkintää:

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

Suhteellinen frekvenssi $\Pr_f(A)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii) äärellisille otosavaruuksille, joten **suhteellinen frekvenssi on todennäköisyys**.

**Perustelu:**

Toistetaan satunnaiskoetta $n$ kertaa.

Aksiooma (i):

Koska otosavaruus $S$ on *varma tapahtuma*, se sattuu jokaisessa koetoistossa ja

$$f_S = n$$

Siten

$$\Pr_f(S) = \frac{f_S}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Aksiooma (ii):

Kaikille tapahtumille $A \subset S$ pätee

$$0 \le f_A \le n$$

Siten

$$0 \le \Pr_f(A) = \frac{f_A}{n} \le 1$$

Aksiooma (iii):

Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos

$$A \cap B = \emptyset$$

niin

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B$$

Tällöin

$$\Pr_f(A\cup B) = \frac{f_{A\cup B}}{n} = \frac{f_A + f_B}{n} = \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} = \Pr_f(A) + \Pr_f(B)$$

■

Siten suhteellinen frekvenssi on äärellisissä otosavaruuksissa määritellyn todennäköisyyden *erikoistapaus*.

## Empiirinen todennäköisyys

Jos tapahtuman $A$ suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

lähestyy (jossakin mielessä) toistokokeiden lukumäärän $n$ rajatta kasvaessa kiinteätä lukua $p$, sanotaan lukua $p$ tapahtuman $A$ **empiiriseksi todennäköisyydeksi**. Jos siis $p$ on tapahtuman $A$ empiirinen todennäköisyys, niin

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n} \to p \,,\; n \to \infty$$

jossa konvergenssi ei ole tavanomaista lukujonokonvergenssia; konvergenssikäsite täsmennetään luvussa **Stokastiikan konvergenssikäsitteet ja raja-arvolauseet**.

### Todennäköisyyden frekvenssitulkinta

Oletetaan, että tapahtuman $A$ todennäköisyys on $p$. Toistetaan sitä satunnaiskoetta, johon tapahtuma $A$ liittyy, $n$ kertaa. **Todennäköisyyden frekvenssitulkinnan** mukaan tapahtuman $A$ suhteellinen frekvenssi

$$\Pr_f(A) = \frac{f_A}{n}$$

*vaihtelee satunnaisesti koetoistosta toiseen, mutta saa keskimäärin tapahtuman todennäköisyyttä p lähellä olevia arvoja*.

### Ehdollinen todennäköisyys todennäköisyytenä

Olkoon $S$ johonkin satunnaiskokeeseen liittyvä äärellinen *otosavaruus*. Olkoot

$$A \subset S\,,\ C \subset S$$

ko. satunnaiskokeeseen liittyviä *tapahtumia* ja olkoon

$$\Pr(C) \neq 0$$

Määritellään tapahtuman $A$ **ehdollinen todennäköisyys** $\Pr(A|C)$ kaavalla

$$\Pr(A\,|\,C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)}$$

Ehdollinen todennäköisyys $\Pr(A|C)$ toteuttaa todennäköisyyden aksioomat (i)-(iii) äärellisille otosavaruuksille, joten **ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyys**.

**Perustelu:**

Aksiooma (i):

Kaikille tapahtumille $C \subset S$ pätee

$$S \cap C = C$$

Siten

$$\Pr(S\,|\,C) = \frac{\Pr(S \cap C)}{\Pr(C)} = \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

Aksiooma (ii):

Koska kaikille tapahtumille $A \subset S$ ja $C \subset S$ pätee

$$A \cap C \subset C$$

niin

$$0 \leq \Pr(A \cap C) \leq \Pr(C)$$

Siten

$$0 \leq \Pr(A\,|\,C) = \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} \leq \frac{\Pr(C)}{\Pr(C)} = 1$$

Aksiooma (iii):

Kaikille tapahtumille $A \subset S$, $B \subset S$ ja $C \subset S$ pätee ns. *distribuutiolaki*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Jos tapahtumat $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia* eli, jos

$$A \cap B = \varnothing$$

niin kaikille $C \subset S$ pätee

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \varnothing$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\Pr(A \cup B \mid C) &= \frac{\Pr((A \cup B) \cap C)}{\Pr(C)} \\
&= \frac{\Pr((A \cap C) \cup (B \cap C))}{\Pr(C)} \\
&= \frac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(C)} + \frac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(C)} \\
&= \Pr(A \mid C) + \Pr(B \mid C)
\end{aligned}$$

■

Siten ehdollinen todennäköisyys on todennäköisyyden käsitteen *laajennus*.

## 6.3. Todennäköisyys mielivaltaisissa otosavaruuksissa

Tarkastellaan todennäköisyyden määrittelemistä **mielivaltaisissa otosavaruuksissa**.

### $\sigma$-algebrat

Olkoon $S$ joukko ja jokin $\mathcal{F}$ joukon $S$ osajoukkojen muodostama *perhe* eli

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset S$$

Joukkoperhe $\mathcal{F}$ on **$\sigma$-algebra**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) *Tyhjä joukko* $\varnothing$ on joukkoperheen $\mathcal{F}$ alkio:

$$\varnothing \in \mathcal{F}$$

(ii) Jos joukko $A$ on joukkoperheen $\mathcal{F}$ alkio, niin myös sen *komplementti* $A^c$ on joukkoperheen $\mathcal{F}$ alkio:

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

(iii) Jos joukot $A_1$, $A_2$, $A_3$, … ovat joukkoperheen $\mathcal{F}$ alkioita, niin myös niiden *yhdiste* $\cup A_i$ on joukkoperheen $\mathcal{F}$ alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Jos joukkoperhe $\mathcal{F}$ toteuttaa *σ-algebran aksioomat*, niin se toteuttaa myös *Boolen algebran aksioomat*. Siten **kaikki Boolen algebroiden laskusäännöt pätevät σ-algebroille**. Erityisesti siis tämän luvun kappaleen **Todennäköisyys äärellisissä otosavaruuksissa** lausetta 1 vastaava lause pätee myös σ-algebroille:

**Lause 1.**

Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty *σ-algebra* ja oletetaan, että

$$A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F}$$

Tällöin

(a) $S \in \mathcal{F}$

(b) $A \cap B \in \mathcal{F}$

(c) $A \setminus B \in \mathcal{F}$

(d) $B \setminus A \in \mathcal{F}$

Lauseen 1 (b)-kohta voidaan laajentaa koskemaan *numeroituvaa* määrää σ-algebran joukkoja:

**Lause 2.**

Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty σ-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

Tällöin joukkojen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *leikkaus* $\cap A_i$ on σ-algebran $\mathcal{F}$ alkio:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

**Todistus:**

Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty σ-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

Todetaan ensin, että *De Morganin lain yleistyksen* mukaan

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c$$

σ-algebran aksiooman (ii) mukaan

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots \in \mathcal{F}$$

σ-algebran aksiooman (iii) mukaan

$$A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F}$$

σ-algebran aksiooman (ii) mukaan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

■

$\sigma$-algebran aksioomista ja lauseista 1 ja 2 seuraa, että $\sigma$-algebrat ovat **suljettuja** tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, kun operaatioita tehdään *korkeintaan numeroituva määrä*. Tällä tarkoitetaan siitä, että *numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *ei vie $\sigma$-algebran ulkopuolelle*: Jos $\sigma$-algebran $\mathcal{F}$ joukkoihin sovelletaan *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita *komplementti*, *yhdiste*, *leikkaus* ja *erotus*, niin tuloksena saatavat joukot kuuluvat edelleen $\sigma$-algebraan $\mathcal{F}$.

**Todennäköisyyslaskennassa** perusjoukkoa $S$ kutsutaan **otosavaruudeksi** ja otosavaruuden $S$ alkioita kutsutaan **alkeistapahtumiksi**. Jos siis $s$ on *alkeistapahtuma*, niin

$$s \in S$$

Jos $\mathcal{F}$ on jokin otosavaruudessa $S$ määritelty *$\sigma$-algebra*, niin kutsumme $\sigma$-algebraan $\mathcal{F}$ kuuluvia otosavaruuden $S$ osajoukkoja **tapahtumiksi**. Jos siis joukko $A$ on *tapahtuma*, niin

$$A \in \mathcal{F}$$

Olkoon $\mathcal{F}$ *otosavaruudessa* $S$ määritelty *$\sigma$-algebra*. Olkoot otosavaruuden $S$ osajoukot

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

*tapahtumia* eli oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

Koska edellä esitetyn mukaan $\sigma$-algebra $\mathcal{F}$ on *suljettu* tavanomaisten joukko-opin operaatioiden suhteen, kun operaatioita tehdään *korkeintaan numeroituva määrä*, niin myös joukot

$$A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

ovat *tapahtumia*. Tällä tarkoitetaan siis sitä, että

$$A_1^c, A_2^c, A_3^c, \ldots \in \mathcal{F}, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Tämä merkitsee siis sitä, että otosavaruuden tapahtumista voidaan johtaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin *korkeintaan numeroituva määrä* tavanomaisia joukko-opin operaatioita.

## Kolmogorovin aksioomat

Olkoon $S$ jokin joukko ja $\mathcal{F}$ jokin joukon $S$ osajoukkojen muodostama *$\sigma$-algebra*. Olkoon lisäksi Pr *joukkofunktio*, joka liittää jokaiseen $\sigma$-algebraan $\mathcal{F}$ kuuluvaan joukon $S$ osajoukkoon $A$ reaalikuvun eli

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subset S \Rightarrow \Pr(A) \in$$

Joukkofunktio Pr on **todennäköisyysmitta**, jos

(i) $\Pr(S) = 1$

(ii) $0 \le \Pr(A) \le 1$ kaikille $A \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j \Rightarrow \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$

Aksioomia (i)-(iii) kutsutaan **Kolmogorovin aksioomiksi todennäköisyydelle**.

Kolmogorovin aksioomien (i)-(iii) mukaan *todennäköisyys* Pr on *positiivinen*, *additiivinen* ja *normeerattu* **mitta**.

Aksioomat (i) ja (ii), *normeeraus* ja *positiivisuus*:

$$A \subset S \Rightarrow 0 \le \Pr(A) \le \Pr(S) = 1$$

Aksiooma (iii), *additiivisuus*:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \text{ ja } A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j \ \Rightarrow\ \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$$

Aksiooma (iii) on *yhteenlaskusääntö numeroituvalle määrälle toisensa poissulkevia tapahtumia*.

Aksioomien (i)-(iii) olennaisena sisältönä on siis se, että *todennäköisyys on mitta* matematiikan tarkoittamassa mielessä. Todennäköisyyslaskentaa voidaankin pitää matemaattisen *mittateorian* erikoistuneena osana. Aksioomien (i)-(iii) mukaan todennäköisyysmitalla on samat ominaisuudet kuin *pinta-alamitalla* paitsi, että todennäköisyysmitta on *normeerattu* niin, että sen ylärajana on 1.

Otosavaruuden tapahtumista voidaan muodostaa *uusia tapahtumia* soveltamalla niihin *$\sigma$-algebran aksioomia* ja niistä johdettuja joukko-opin laskusääntöjä. Uusien tapahtumien *todennäköisyydet* saadaan soveltamalla niihin *Kolmogorovin aksioomia* ja niistä johdettuja *todennäköisyys-laskennan laskusääntöjä*.

Jos joukkofunktio Pr toteuttaa *Kolmogorovin aksioomat*, niin se toteuttaa *todennäköisyyden aksioomat äärellisille otosavaruuksille*. Siten **kaikki äärellisen otosavaruuden todennäköisyyden aksioomista johdetut laskusäännöt pätevät yleiselle todennäköisyysmitalle**. Erityisesti siis kappaleen **Todennäköisyys äärellisissä otosavaruuksissa** lauseet 2-5 äärellisen otosavaruuden todennäköisyysmitalle pätevät myös yleiselle todennäköisyysmitalle.

## Todennäköisyyskenttä

Kolmikko

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

muodostaa **todennäköisyyskentän**, jos *S* on *otosavaruus*, $\mathcal{F}$ on otosavaruudessa *S* määritelty *$\sigma$-algebra* ja Pr on $\sigma$-algebrassa $\mathcal{F}$ määritelty *todennäköisyysmitta*.

## Mitalliset ja epämitalliset joukot

On syytä huomata, että jos otosavaruus *S* on ääretön, sen kaikille osajoukoille *ei välttämättä voida määritellä todennäköisyyttä*. Niitä otosavaruuden *S* osajoukkoja, joille todennäköisyys voidaan määritellä kutsutaan *mitallisiksi* ja niitä, joille todennäköisyyttä ei voida määritellä kutsutaan *epämitallisiksi*. Voidaan osoittaa, että *otosavaruuden S mitalliset osajoukot muodostavat $\sigma$-algebran*.

**Esimerkki.**

Jos otosavaruutena *S* on *reaalilukujen joukko* , niin siinä voidaan määritellä todennäköisyysmitta, jolle esimerkiksi kaikki reaaliakselin *välit* sekä *avoimet* ja *suljetut joukot* ovat *mitallisia* ja kelpaavat siis tapahtumiksi. Voidaan kuitenkin osoittaa, että reaalilukujen joukossa on myös sellaisia osajoukkoja, jotka ovat *epämitallisia* ja eivät siis kelpaa tapahtumiksi.

Voidaan osoittaa, että *kaikki* reaalilukujen joukon todennäköisyysmitan suhteen *mitalliset osajoukot* saadaan tyyppiä

$$(-\infty, b] = \{x \in \quad | -\infty < x \leq b\}$$

olevista puoliavoimista väleistä soveltamalla niihin *korkeintaan numeroituva määrä* komplementti-, yhdiste- ja leikkausoperaatiota.

Sanomme, että muotoa $(-\infty, b]$ olevat reaaliakselin välit **virittävät** reaalilukujen joukon mitallisten osajoukkojen muodostaman $\sigma$-algebran.

Tähän todennäköisyysmitan ominaisuuteen perustuu *kertymäfunktion* keskeinen asema *todennäköisyyslaskennassa* ja *matemaattisessa tilastotieteessä*; ks. lukua **Kertymäfunktio**.

## Kolmogorovin aksioomien seurauksia

Todistamme seuraavassa kaksi myöhemmin tarvittavaa lausetta, joiden todistamiseen *eivät riitä* äärellisen otosavaruuden aksioomat todennäköisyydelle: Kummassakin todistuksessa joudutaan vetoamaan *Kolmogorovin aksioomaan* (iii).

**Lause 3.**

Olkoon $(S, \mathcal{F}, \Pr)$ todennäköisyyskenttä ja olkoot

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

(a) Jos

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

niin

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \Pr(A_i)$$

(b) Jos

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

niin

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \Pr(A_i)$$

**Todistus:**

(a) Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty $\sigma$-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

ja

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

Määritellään

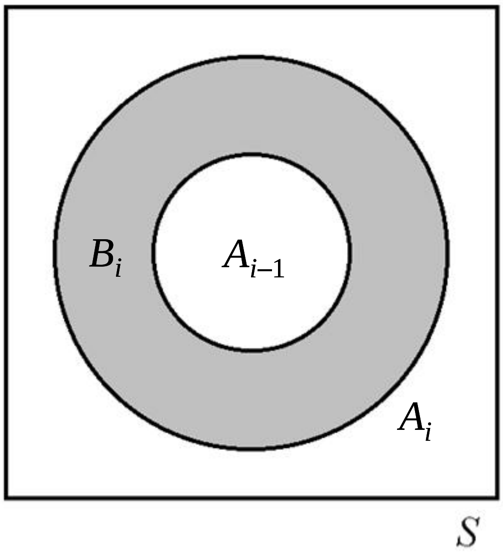
$$B_0 = A_0 = \varnothing$$
$$B_1 = A_1$$
$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$
$$B_3 = A_3 \setminus A_2$$

ja yleisesti

$$B_i = A_i \setminus A_{i-1} = A_i \cap A_{i-1}^c,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Joukot $B_i$ , $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ovat *pareittain toisensa poissulkevia*, koska oletuksen mukaan

$$A_{i-1} \subset A_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$




Oletuksesta

$$A_{i-1} \subset A_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

seuraa, että

$$\Pr(B_i) = \Pr(A_i \setminus A_{i-1}) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

Lisäksi on selvää, että

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Siten

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

Koska joukot $B_i$ , $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ovat pareittain toisensa poissulkevia, *Kolmogorovin aksioomasta* (iii) seuraa:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(B_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)$$

Sijoitetaan tähän

$$\Pr(B_i) = \Pr(A_i) - \Pr(A_{i-1})\ ,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i) &= \lim_{n\to+\infty} \{\Pr(B_1) + \Pr(B_2) + \Pr(B_3) + \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad + \Pr(B_{n-1}) + \Pr(B_n)\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \{\Pr(A_1) + [\Pr(A_2) - \Pr(A_1)] + [\Pr(A_3) - \Pr(A_2)] + \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad + [\Pr(A_{n-1}) - \Pr(A_{n-2})] + [\Pr(A_n) - \Pr(A_{n-1})]\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)
\end{aligned}$$

Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

(b) Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty $\sigma$-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

ja

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

Määritellään

$$C_0 = S$$
$$C_1 = A_1^c$$
$$C_2 = A_2^c$$
$$C_3 = A_3^c$$

ja yleisesti

$$C_i = A_i^c\,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Oletuksesta $A_{i-1} \supset A_i$ , $i$ = 1, 2, 3, … seuraa:

$$C_{i-1} = A_{i-1}^c \subset A_i^c = C_i\,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

Sovelletaan joukkoihin $C_i$ , $i$ = 1, 2, 3, … lauseen (a)-kohtaa:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(C_n)$$

Koska

$$C_i = A_i^c\,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

niin *komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavasta* seuraa, että

$$\Pr(C_i) = \Pr(A_i^c) = 1 - \Pr(A_i)\,,\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

*DeMorganin lain yleistyksen* mukaan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

*Komplementtitapahtuman todennäköisyyden kaavan* mukaan

$$\Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] = 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$$

Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \Pr\left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^c\right] \\
&= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} \Pr(C_n) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} [1 - \Pr(A_n)] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)
\end{aligned}$$

■

**Lause 4.**

Olkoon

$$(S, \mathcal{F}, \Pr)$$

todennäköisyyskenttä ja olkoot

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

Jos

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \to \varnothing$$

niin

$$\lim_{i\to\infty} \Pr(A_i) = 0$$

**Todistus:**

Olkoon $\mathcal{F}$ jokin perusjoukon $S$ osajoukoille määritelty $\sigma$-algebra ja oletetaan, että

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$$

ja

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \to \varnothing$$

Koska $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \to \varnothing$, niin

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$$

Siten

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \Pr(\varnothing) = 0$$

Lauseen 3 kohdan (b) mukaan

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n)$$

Yhdistämällä edellä johdetut tulokset saadaan lopulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n) = 0$$

■

Voidaan osoittaa, että Kolmogorovin aksiooma

(iii) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j \;\Rightarrow\; \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i)$

on yhtäpitävä aksioomien

(iii)´ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

(iv) $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \to \varnothing \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \Pr(A_n) = 0$

kanssa.

Aksiooma (iii)´ on tavanomainen *yhteenlaskusääntö kahdelle toisensa poissulkevalle tapahtumalle*. Aksioomaa (iv) kutsutaan tavallisesti todennäköisyyden **jatkuvuusaksioomaksi**.

# 7. Kokonaistodennäköisyyden ja Bayesin kaavat



Tarkastelemme tässä luvussa kahta hyödyllistä todennäköisyyslaskennan kaavaa, joita kutsutaan **kokonaistodennäköisyyden kaavaksi** ja **Bayesin kaavaksi**. On syytä huomata, että kaavat liittyvät läheisesti toisiinsa.


**Avainsanat:**

Bayesin kaava, Ehdollinen todennäköisyys, Kokonaistodennäköisyyden kaava, Käänteistodennäköisyys, Ositus, Posteriori-todennäköisyys, Priori-todennäköisyys, Systeemiteoria, Verkkodiagrammi

## 7.1. Johdatteleva esimerkki

Ruuvitehtaalla on kaksi konetta A ja B, joilla tehdään samanlaisia ruuveja. A- ja B-koneen valmistamat ruuvit sekoitetaan keskenään ja pakataan laatikoihin. Koska A-kone toimii hitaammin, laatikoihin tulee A- ja B-koneiden valmistamia ruuveja *suhteessa*

3:5

Osa kummankin koneen valmistamista ruuveista on *viallisia*:

5 % A-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.

8 % B-koneen valmistamista ruuveista on viallisia.

Valitaan *satunnaisesti* laatikollinen ruuveja tutkittavaksi ja poimitaan valitusta laatikosta *satunnaisesti* 1 ruuvi tutkittavaksi.

Kysymyksiä:

(1) Mikä on todennäköisyys, että poimittu *ruuvi on viallinen*?

(2a) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut A-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?

(2b) Mikä on todennäköisyys, että ruuvin on valmistanut B-kone, *jos ruuvi osoittautuu vialliseksi*?

Merkintöjä:

Otosavaruus $S$ = Laatikollinen ruuveja

Tapahtuma $A$ = ”Ruuvin on valmistanut A-kone”

Tapahtuma $B$ = ”Ruuvin on valmistanut B-kone”

Tapahtuma $V$ = ”Ruuvi on viallinen”

Seuraavat todennäköisyydet *tunnetaan*:

$\Pr(A) = 3/8$ $\Pr(V|A) = 0.05$

$\Pr(B) = 5/8$ $\Pr(V|B) = 0.08$

Seuraavia todennäköisyyksiä *kysytään*:

$\Pr(V)$, $\Pr(A|V)$, $\Pr(B|V)$

Tapahtumat $A$ ja $B$ muodostavat otosavaruuden $S$ **osituksen**. Tällä tarkoitetaan seuraavaa:

(i) $A$ ja $B$ ovat *epätyhjiä*:

$A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$

(ii) $A$ ja $B$ ovat *pistevieraita*:

$A \cap B = \emptyset$

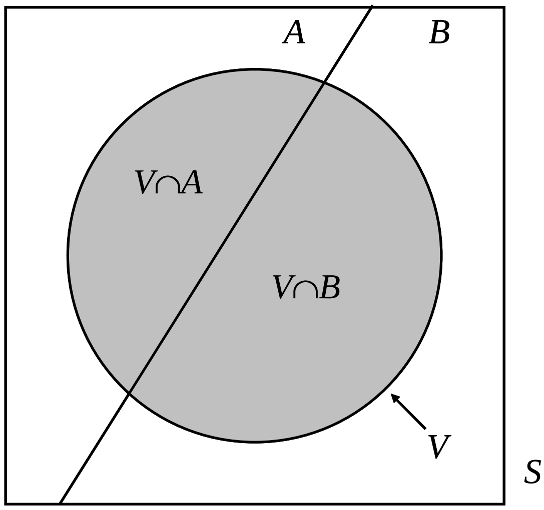
(iii) Joukkojen $A$ ja $B$ *yhdisteenä* saadaan *perusjoukko* $S$:

$S = A \cup B$

Otosavaruuden $S$ ositus $S = A \cup B$ **indusoi osituksen** tapahtumaan $V$. Tällä tarkoitetaan seuraavaa:

(i) Jos $V$ on epätyhjä eli $V \neq \emptyset$, niin ainakin toinen joukoista $V \cap A$ ja $V \cap B$ on *epätyhjä*:

$V \cap A \neq \emptyset$ tai $V \cap B \neq \emptyset$




(ii) $V \cap A$ ja $V \cap B$ ovat *pistevieraita*:

$$(V \cap A) \cap (V \cap B) = \varnothing$$

koska $A \cap B = \varnothing$

(iii) Joukkojen $V \cap A$ ja $V \cap B$ *yhdisteenä* saadaan joukko $V$:

$$V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$$

*Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* mukaan:

(1) $\Pr(V) = \Pr(V \cap A) + \Pr(V \cap B)$

*Yleisen tulosäännön* mukaan:

(2) $\Pr(V \cap A) = \Pr(A)\Pr(V|A)$

(3) $\Pr(V \cap B) = \Pr(B)\Pr(V|B)$

Sijoittamalla lausekkeet (2) ja (3) kaavaan (1) saadaan todennäköisyydeksi, että satunnaisesti poimittu ruuvi on viallinen:

$$\begin{aligned}\Pr(V) &= \Pr(A)\Pr(V \mid A) + \Pr(B)\Pr(V \mid B) \\ &= \frac{3}{8} \times 0.05 + \frac{5}{8} \times 0.08 = 0.06875 = 6.875\%\end{aligned}$$

Todennäköisyys $\Pr(V)$ on määrätty **kokonaistodennäköisyyden kaavalla**.

*Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* perusteella

(4) $$\Pr(A \mid V) = \frac{\Pr(V \cap A)}{\Pr(V)}$$

(5) $$\Pr(B \mid V) = \frac{\Pr(V \cap B)}{\Pr(V)}$$

*Yleisen tulosäännön* mukaan

(6) $\Pr(V \cap A) = \Pr(V|A)\Pr(A)$

(7) $\Pr(V \cap B) = \Pr(V|B)\Pr(B)$

Edellä on todettu, että

(8) $\Pr(V) = \Pr(A)\Pr(V|A) + \Pr(B)\Pr(V|B)$

Sijoittamalla lausekkeet (6) ja (8) kaavaan (4) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** $\Pr(A|V)$:

$$\begin{aligned}\Pr(A \mid V) = \frac{\Pr(V \cap A)}{\Pr(V)} &= \frac{\Pr(A)\Pr(V \mid A)}{\Pr(A)\Pr(V \mid A) + \Pr(B)\Pr(V \mid B)} \\ &= \frac{\frac{3}{8} \times 0.05}{\frac{3}{8} \times 0.05 + \frac{5}{8} \times 0.08} = \frac{3}{11} = 0.27\end{aligned}$$

Ehdollinen todennäköisyys $\Pr(A|V)$ on määrätty **Bayesin kaavalla**.

Sijoittamalla lausekkeet (7) ja (8) kaavaan (5) saadaan **ehdolliseksi todennäköisyydeksi** Pr($B$|$V$):

$$\begin{aligned}\Pr(B\,|\,V) &= \frac{\Pr(V\cap B)}{\Pr(V)} \\ &= \frac{\Pr(B)\Pr(V\,|\,B)}{\Pr(A)\Pr(V\,|\,A)+\Pr(B)\Pr(V\,|\,B)} \\ &= \frac{\frac{5}{8}\times 0.08}{\frac{3}{8}\times 0.05+\frac{5}{8}\times 0.08} = \frac{8}{11} = 0.73\end{aligned}$$

Ehdollinen todennäköisyys Pr($B$|$V$) on määrätty **Bayesin kaavalla**.

## 7.2. Ositukset

Joukon $S$ osajoukot

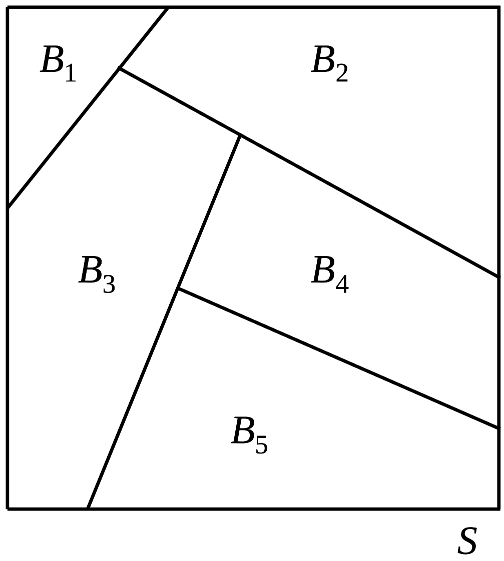
$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

muodostavat joukon $S$ **osituksen**, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) $B_i \neq \emptyset\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset\,,\ i \neq j$

(iii) $S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$




Otosavaruuden $S$ *ositus* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ muodostaa otosavaruuden $S$ alkioiden *jaon toisensa poissulkeviin luokkiin* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ , koska:

(i) Joukot $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ovat *epätyhjiä*.

(ii) Joukot $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ovat *pareittain pistevieraita*.

(iii) $S = \cup B_i$

Jos tapahtumat $B_1, B_2, \ldots, B_n$ muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*, *täsmälleen yksi* tapahtumista $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sattuu aina, kun se satunnaisilmiö, jonka tulosvaihtoehtoja otosavaruus $S$ kuvaa, esiintyy.

## 7.3. Kokonaistodennäköisyyden kaava

Olkoon $A$ epätyhjä otosavaruuden $S$ osajoukko:

$$A \subset S\,,\ A \neq \emptyset$$

Oletetaan, että joukot

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*. Tällöin pätee **kokonaistodennäköisyyden kaava**

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A\,|\,B_i)$$

**Perustelu:**

Oletetaan, että

$A \subset S$ , $A \neq \varnothing$

ja että joukot

$B_1, B_2, \ldots , B_n$

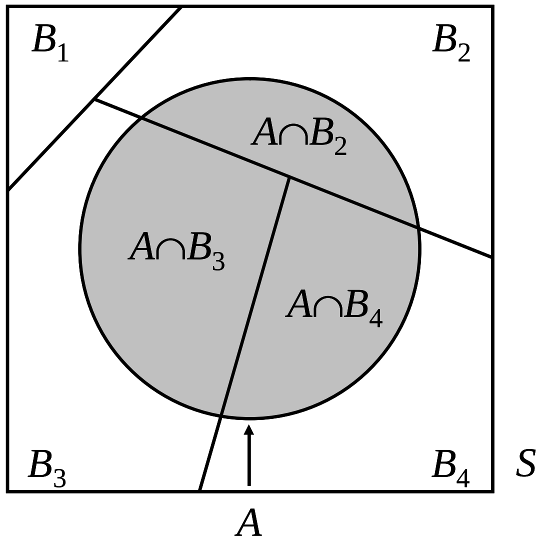
muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*.

Tällöin

(i) $B_i \neq \varnothing$ , $i = 1, 2, \ldots , n$

(ii) $B_i \cap B_j = \varnothing$ , $i \neq j$

(iii) $S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$




Otosavaruuden $S$ ositus $B_1, B_2, \ldots , B_n$ **indusoi osituksen** joukkoon $A$:

$(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) = \varnothing,\ i \neq j$

ja

$$\begin{aligned} A &= A\cap S \\ &= A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n) \\ &= (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n) \end{aligned}$$

*Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön* perusteella

$$\Pr(A) = \Pr((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n)) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(A\cap B_i)$$

Koska *yleisen tulosäännön* perusteella

$$\Pr(A\cap B_i) = \Pr(B_i)\Pr(A\,|\,B_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots , n$$

saamme lopulta

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(B_i)\Pr(A\,|\,B_i)$$

■

*Kokonaistodennäköisyyden kaava* ilmaisee otosavaruuden $S$ osajoukon $A$ todennäköisyyden Pr($A$) otosavaruuden $S$ *osituksen* $B_1, B_2, \ldots , B_n$ määräämien todennäköisyyksien

$\Pr(B_i)$ , $i = 1, 2, \ldots , n$

ja ehdollisten todennäköisyyksien

$\Pr(A|B_i)$ , $i = 1, 2, \ldots , n$

avulla. Kokonaistodennäköisyyden kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

## 7.4. Bayesin kaava

Olkoon $A$ epätyhjä otosavaruuden $S$ osajoukko:

$$A \subset S\,,\ A \neq \varnothing$$

Oletetaan, että joukot

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*. Tällöin pätee *Bayesin kaava*

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

**Perustelu:**

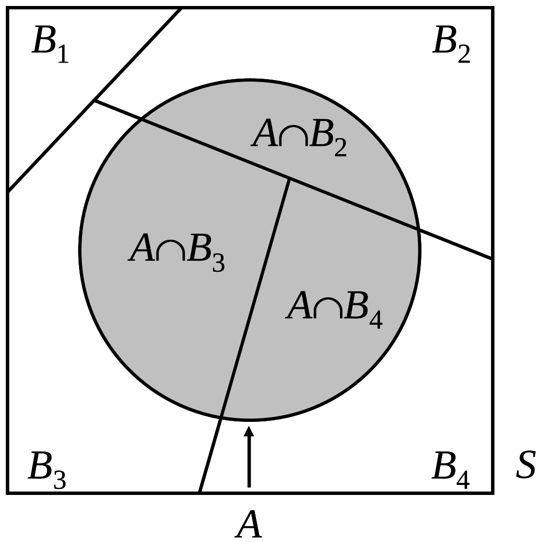
Oletetaan, että

$$A \subset S\,,\ A \neq \varnothing$$

ja että joukot

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

muodostavat otosavaruuden $S$ *osituksen*.




Tällöin

(i) $B_i \neq \varnothing\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $B_i \cap B_j = \varnothing\,,\ i \neq j$

(iii) $S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$

Otosavaruuden $S$ ositus $B_1, B_2, \ldots, B_n$ **indusoi osituksen** joukkoon $A$:

$$(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j) = \varnothing,\ i \neq j$$

ja

$$\begin{aligned} A &= A\cap S \\ &= A\cap(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n) \\ &= (A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\cdots\cup(A\cap B_n) \end{aligned}$$

*Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän* perusteella

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(A)}$$

Jos sovellamme tämän kaavan osoittajaan *yleistä tulosääntöä*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)$$

ja nimittäjään *kokonaistodennäköisyyden kaavaa*

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)$$

niin saamme lopulta

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

■

Bayesin kaavan todennäköisyyksiä

$\Pr(B_i)$ , $i = 1, 2, \ldots , n$

on tapana kutsua **priori-todennäköisyyksisi**; *prior* (*lat.*), edeltävä, aikaisempi.

Nimitys priori-todennäköisyys johtuu siitä, että todennäköisyyksille $\Pr(B_i)$ voidaan antaa seuraava tulkinta: Todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ kuvaavat *ennakkokäsityksiämme* tapahtumien $B_i$ todennäköisyydestä *ennen kuin käytettävissämme on tieto tapahtuman A sattumisesta*.

Bayesin kaavan todennäköisyyksiä

$\Pr(B_i|A)$ , $i = 1, 2, \ldots , n$

on tapana kutsua **posteriori-todennäköisyyksiksi**; *posterior* (*lat.*), jälkeen tuleva, myöhempi.

Nimitys posteriori-todennäköisyys johtuu siitä, että todennäköisyyksille $\Pr(B_i|A)$ voidaan antaa seuraava tulkinta: Todennäköisyydet $\Pr(B_i|A)$ kuvaavat *millaisiksi ennakkokäsityksiämme* tapahtumien $B_i$ todennäköisyyksistä *kannattaa muuttaa sen jälkeen, kun on saamme tietää, että tapahtuma A on sattunut*.

Bayesin kaava kertoo siis miten *ennakkokäsityksiä* tapahtumien $B_i$ todennäköisyyksistä on järkevää *korjata, sen jälkeen kun tapahtuma A on havaittu* tai miten *tietoa tapahtuman A sattumisesta voidaan käyttää hyväksi* tapahtumien $B_i$ todennäköisyyksien arvioinnissa.

Posteriori-todennäköisyyksiä $\Pr(B_i|A)$ kutsutaan usein myös *käänteistodennäköisyyksiksi*, koska ne ovat ”käänteisiä” *tunnettuihin* todennäköisyyksiin $\Pr(A|B_i)$ nähden.

Bayesin kaava on käyttökelpoinen sellaisissa tilanteissa, joissa priori-todennäköisyydet $\Pr(B_i)$ ja ehdolliset todennäköisyydet $\Pr(A|B_i)$ ovat *tunnettuja*.

## 7.5. Kokonaistodennäköisyyden kaavan ja Bayesin kaavan systeemiteoreettinen tulkinta

Oletetaan, että **systeemissä** on *alkutila L*, *välitilat*

$B_1, B_2, \ldots , B_n$

ja yksi sen *lopputiloista* on *A*. Oletetaan lisäksi, että *alkutilasta L voidaan päästä lopputilaan A vain käymällä jossakin välitiloista* $B_1, B_2, \ldots , B_n$ .

Olkoot

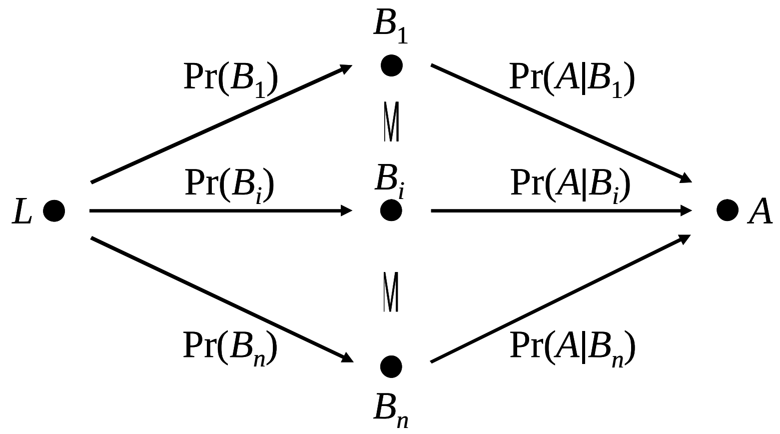
$\Pr(B_i)$ = Pr(Käymme välitilassa $B_i$)

$\Pr(A| B_i)$ = Pr(Pääsemme välitilasta $B_i$ lopputilaan $A$)

$\Pr(A)$ = Pr(Pääsemme lopputilaan $A$)

$\Pr(B_i\,|A)$ = Pr(Olemme tulleet lopputilaan $A$ välitilan $B_i$ kautta)

Systeemiä voidaan havainnollistaa seuraavan **verkkodiagrammin** avulla:




**Kokonaistodennäköisyyden kaavan** mukaan

$$\Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)$$

Voimme nyt antaa *kokonaistodennäköisyyden kaavalle* seuraavan *systeemiteoreettisen tulkinnan*: Todennäköisyys Pr($A$) on todennäköisyys, että pääsemme lopputilaan $A$, kun lopputilaan $A$ ei voi päästä käymättä jossakin välitiloista $B_1$, $B_2$, … , $B_n$ . Huomaa, että lopputilaan $A$ pääsemisen todennäköisyys Pr($A$) saadaan *laskemalla yhteen* alkutilasta $L$ lopputilaan $A$ välitilojen $B_1$, $B_2$, … , $B_n$ kautta kulkevien *reittien* todennäköisyydet

$$\Pr(A \cap B_i) = \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Tässä sovellettu sääntö saa lisävalaistusta tutkittaessa ns. **puumaisten verkkojen** soveltamista todennäköisyyslaskentaan; lisätietoja: ks. lukua **Verkot ja todennäköisyyslaskenta** ja liitteen **Todennäköisyyslaskenta ja puumaiset verkot** kappaletta **Puut ja todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt**.

**Bayesin kaavan** mukaan

$$\Pr(B_i \mid A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(B_i)\Pr(A \mid B_i)}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Voimme nyt antaa *Bayesin kaavalle* seuraavan *systeemiteoreettisen tulkinnan*: Todennäköisyys Pr($B_i$|$A$) on *ehdollinen todennäköisyys* sille, että *olemme käyneet* välitilassa $B_i$ , kun *ehtotapahtumana* on se, että *olemme päässeet* lopputilaan $A$.

# 8. Verkot ja todennäköisyyslaskenta

## 8.1. Johdatteleva esimerkki

## 8.2. Puudiagrammit ja todennäköisyyslaskenta

## 8.3. Toimintaverkot ja niiden toimintatodennäköisyydet

Tarkastelemme tässä luvussa *todennäköisyyslaskennan ongelmien esittämistä* ja *ratkaisemista* **puumaisten verkkojen** *avulla*. Lisäksi tarkastelemme ns. **toimintaverkkojen toimintatodennäköisyyksien** määräämistä.

Lisätietoja *verkkoteorian alkeista* ja *puumaisista verkoista* eli *puista* sekä *puumaisten verkkojen soveltamisesta todennäköisyyslaskentaan*: ks. liitettä **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit**.

### Avainsanat:

Insidenssikuvaus, Piste, Puu, Puutodennäköisyys, Päätöspuut, Reitti, Rinnan kytkentä, Sarjaan kytkentä, Silmukka, Särmä, Toimintatodennäköisyys, Toimintaverkko, Tulosääntö, Verkko, Yhteenlaskusääntö, Yhtenäisyys

## 8.1. Johdatteleva esimerkki

Tehdään lasten syntymisestä seuraavat (yksinkertaistavat) oletukset:

(i) Lapset syntyvät perheisiin yksi kerrallaan.

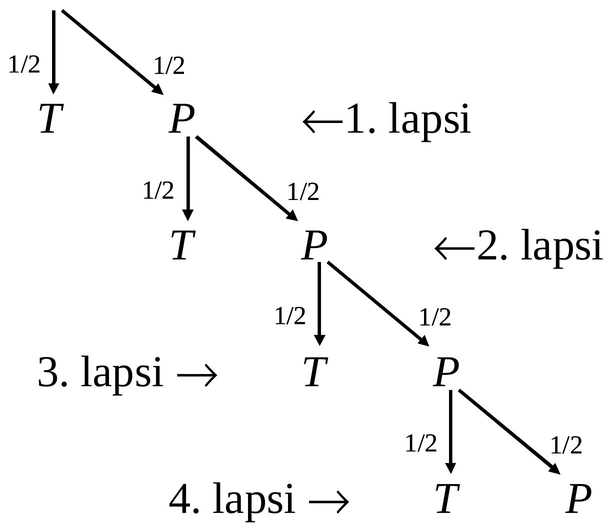
(ii) Syntyvän lapsen sukupuoli *ei riipu* siitä, mitä sukupuolta ovat olleet aikaisemmin perheeseen syntyneet lapset.

(iii) Tytön todennäköisyys on sama kuin pojan todennäköisyys:

$$\Pr(\text{Syntyy tyttö}) = \Pr(\text{Syntyy poika}) = 1/2$$

Eräs aviopari haluaa oletusten (i)-(iii) pätiessä saada *tytön*, mutta *ei halua* hankkia *neljää lasta enempää*. Siksi pari päättää käyttää lasten hankkimisessa seuraavaa *strategiaa*: Lapsia hankitaan *kunnes* saadaan tyttö, mutta lapsia ei kuitenkaan hankita *neljää enempää*. Jos siis neljäskin lapsi on poika, pari on *epäonnistunut* strategiassaan. Mikä on todennäköisyys, että pari *onnistuu* strategiassaan?

Voimme rakentaa paria kohtaavista tapahtumavaihtoehdoista alla olevan **puudiagrammin**.




Puudiagrammissa:

$T$ = Tyttö

$P$ = Poika

Puun vasemmanpuoleiset *särmät* johtavat strategian onnistumiseen ja oikeanpuoleiset *särmät* johtavat strategian epäonnistumiseen.

Jokaisen särmän *todennäköisyys* = 1/2.

Olkoon

$A$ = Pari onnistuu strategiassaan

$T_i$ = $i$. lapsi on tyttö

$P_i$ = $i$. lapsi on poika

$T$ = Syntyy tyttö

$P$ = Syntyy poika

Tapahtumat $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ muodostavat tapahtuman $A$ *osituksen*:

$$A = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4\ ,\ \ T_i \cap T_j = \varnothing\ ,\ i \neq j$$

Tapahtumien $T_i$ ja $P_i$ todennäköisyydet

$$\Pr(T_i)\ ,\ \Pr(P_i)\ ,\ i = 1, 2, 3, 4$$

voidaan määrätä *rekursiivisesti*.

Riippumattomien tapahtumien *tulosäännön* nojalla:

$$\Pr(T_1) = \Pr(T) = \frac{1}{2} = \Pr(P_1)$$

$$\Pr(T_2) = \Pr(T \cap P_1) = \Pr(T)\Pr(P_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \Pr(P_2)$$

$$\Pr(T_3) = \Pr(T \cap P_2) = \Pr(T)\Pr(P_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \Pr(P_3)$$

$$\Pr(T_4) = \Pr(T \cap P_3) = \Pr(T)\Pr(P_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = \Pr(P_4)$$

Strategian *onnistumisen todennäköisyydeksi* saadaan toisensa poissulkevien tapahtumien *yhteenlaskusäännön* nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) \\ &= \Pr(T_1) + \Pr(T_2) + \Pr(T_3) + \Pr(T_4) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}\end{aligned}$$

Voimme ajatella, että yo. laskutoimitukset on tehty seuraavalla tavalla:

(i) Todennäköisyydet

$$\Pr(T_1) = \frac{1}{2},\ \Pr(T_2) = \frac{1}{4},\ \Pr(T_3) = \frac{1}{8},\ \Pr(T_4) = \frac{1}{16}$$

on saatu määräämällä puun *loppupisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet* ja reittien todennäköisyydet on saatu *reitin muodostavien puun särmien* todennäköisyyksien *tulona*.

(ii) Strategian onnistumisen todennäköisyys

$$\Pr(A) = \frac{15}{16}$$

on saatu laskemalla *loppupisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet yhteen*.

Johdattelevassa esimerkissä esitetty tekniikka voidaan *yleistää* ja sitä voidaan käyttää menestyksellisesti monien todennäköisyyslaskennan laskutehtävien ratkaisemiseen. Tämä perustuu siihen, että kaikkia äärellisten otosavaruuksien todennäköisyyksien laskusääntöjä voidaan havainnollistaa sopivasti konstruoitujen puudiagrammien avulla; lisätietoja: ks. liitettä **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit**.

## 8.2. Puudiagrammit ja todennäköisyyslaskenta

Periaatteessa jokainen *alkeistodennäköisyyslaskennan* tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä apuna ns. **puudiagrammeja**. Jos tehtävän satunnaisilmiö on osattu kuvata puudiagrammilla, tehtävän ratkaisemisessa tarvittavat **puutodennäköisyydet** saadaan määrätyksi käyttämällä kahta yksinkertaista laskusääntöä, **tulosääntöä** ja **yhteenlaskusääntöä**.

### Verkot

**Verkko** eli **graafi** koostuu **pisteistä**, **särmistä** ja **insidenssikuvauksesta**, joka kertoo *mitkä pisteet ovat särmien yhdistämiä*. Koska ajattelemme, että jokaisella särmällä on **alkupiste** ja **loppupiste**, tässä tarkasteltavat verkot ovat *suunnattuja verkkoja*. Tämä merkitsee sitä, että jokaisella särmällä on *suunta*, joka osoittaa särmän alkupisteestä särmän loppupisteeseen.

Pisteestä $v$ on **reitti** pisteeseen $w$, jos on olemassa (suunnattujen) särmien jono, joka vie pisteestä $v$ pisteeseen $w$ niin, että jokaisen särmän alkupiste (pistettä $v$ lukuun ottamatta) on edellisen särmän loppupiste. Reitti muodostaa **silmukan**, jos $v = w$.

Verkko on **yhtenäinen**, jos sen pisteiden joukkoa *V ei voida osittaa* kahdeksi *epätyhjäksi* osajoukoksi siten, että verkon *jokaisen* särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat *samaan* osajoukkoon.

Lisätietoja verkoista: ks. liitteen **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit** kappaletta **Verkot**.

## Puut

Sanomme, että verkko on **puu**, jonka **juurena** on piste $v_1$, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) Verkko on *yhtenäinen*.

(ii) Verkossa ei ole *silmukoita*.

(iii) Jos $w \neq v_1$ on mielivaltainen verkon piste, pisteestä $v_1$ pisteeseen $w$ pääsee *täsmälleen yhtä reittiä* pitkin.

Lisätietoja puista: ks. liitteen **Todennäköisyyslaskenta ja puudiagrammit** kappaletta **Puut**.

## Puiden konstruointi

Satunnaisilmiötä voidaan kuvata **puudiagrammilla**, jos ilmiö voidaan esittää seuraavassa muodossa:

(i) Ilmiöllä on **alkutila** ja useita vaihtoehtoisia **lopputiloja**.

(ii) Ilmiö koostuu **tapahtumajonoista**, joissa alkutilasta siirrytään *vaiheittain* johonkin ilmiön vaihtoehtoisista lopputiloista.

(iii) Jokaisessa ilmiön **vaiheessa** kohdataan yksi tai useampia **tapahtumavaihtoehtoja**, joista yksi *realisoituu* ja johtaa *uusin* tapahtumavaihtoehtoihin.

Satunnaisilmiötä vastaavan **puudiagrammin konstruointi**:

1. Asetetaan puun **juuri** vastaamaan ilmiön *alkutilaa*.
2. Asetetaan puun **loppupisteet** (”oksien kärjet”) vastaamaan ilmiön *lopputiloja*.
3. Asetetaan puun **pisteet** (”oksien haarautumiskohdat”) vastaamaan ilmiön *tapahtumia*.
4. Viedään puun jokaisesta pisteestä **särmä** (”oksa”) kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat *tapahtumavaihtoehdot* ovat ilmiön *siinä vaiheessa mahdollisia*.
5. Liitetään jokaiseen pisteestä *lähtevään* särmään *siinä vaiheessa* mahdollisten **tapahtumavaihtoehtojen todennäköisyydet**.

**Havainnollistus**:

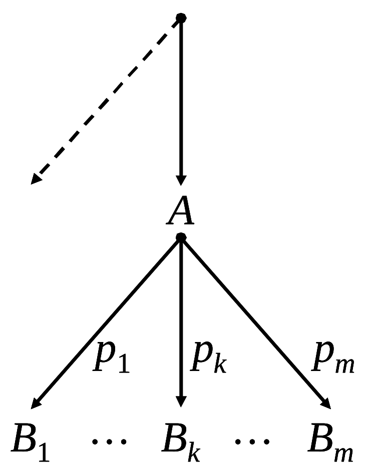
Puudiagrammin konstruointia voidaan havainnollistaa viereisellä kuviolla. Siinä tarkastellaan jotakin satunnaisilmiötä sellaisessa vaiheessa, jossa tapahtuma $A$ on sattunut.

Olkoot tapahtuman $A$ sattumisen jälkeen *mahdolliset tapahtumavaihtoehdot*

$$B_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Viedään pisteestä $A$ *särmä* jokaiseen pisteistä

$$B_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, m$$



Liitetään jokaiseen särmään

$(A, B_i)$ , $i = 1, 2, \dots , m$

*ehdollinen todennäköisyys*

$$p_i = \Pr(B_i \mid \vec{A})$$

jossa $\vec{A}$ on tapahtumajono, joka on tuonut pisteeseen $A$. Koska $A$:n sattumisen jälkeen *ei ole muita mahdollisia tapahtumavaihtoehtoja* kuin

$B_i$ , $i = 1, 2, \dots , m$

niin todennäköisyyksien

$p_i$ , $i = 1, 2, \dots , m$

on toteutettava ehto

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} \Pr(B_i \mid \vec{A}) = 1$$

**Huomautuksia**:

- Puudiagrammi *piirretään* tavallisesti *joko* niin, että sen alkupiste on *ylhäällä* ja loppupisteet ovat *alhaalla tai* niin, että sen alkupiste on *vasemmalla* ja loppupisteet ovat *oikealla*.
- Useat puun pisteet saattavat vastata *samaa* tapahtumaa.
- Mistä tahansa puun pisteestä *lähtevien särmien* todennäköisyyksien summa on 1.

### Puutodennäköisyydet

**Puutodennäköisyydellä** tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä *puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään yhdistettyyn tapahtumaan*. Mielivaltaisen puun *pisteen todennäköisyys* saadaan määräämällä alkupisteestä ko. pisteeseen vievän *reitin todennäköisyys*.

*Reitin todennäköisyys* saadaan soveltamalla reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksiin **tulosääntöä**. *Usean pisteen määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys* saadaan soveltamalla ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksiin **yhteenlaskusääntöä**.

### Tulosääntö puutodennäköisyyksille

*Reitin todennäköisyys* saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*. Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien tulosäännöksi**.

**Perustelu**:

(1) Reitti on *tapahtumajono*, jonka muodostavat reitin pisteet.

(2) Reitin muodostava tapahtumajono sattuu, jos *jokainen jonon tapahtumista sattuu*.

(3) Todennäköisyyslaskennan *yleisen tulosäännön mukaan* reitin todennäköisyys saadaan määräämällä reittiin kuuluvien särmien todennäköisyyksien *tulo*.

Olkoon siis

$L, A_1, A_2, \dots , A_k$

jokin niistä vaihtoehtoisista *tapahtumajonoista*, joista satunnaisilmiö muodostuu.

Tällöin parit

$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$

muodostavat satunnaisilmiön *alkutilasta* $L$ satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilaan* $A_k$ *vievän reitin särmät*. Liitetään reitin

$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$

särmiin *todennäköisyydet* seuraavalla tavalla:

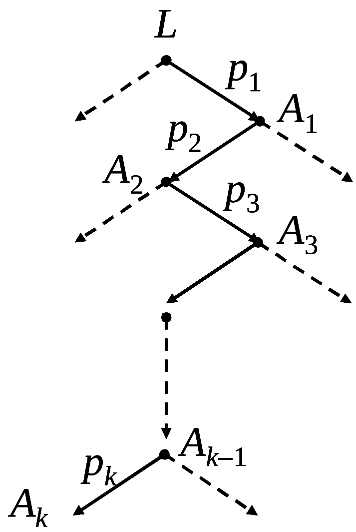
$(L, A_1) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_1) = p_1$

$(A_1, A_2) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_2 \mid A_1) = p_2$

$(A_2, A_3) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = p_3$

$\ldots$

$(A_{k-1}, A_k) \quad \rightarrow \quad \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) = p_k$



Reitti $k$

Reitin

$(L, A_1), (A_1, A_2), (A_2, A_3), \ldots , (A_{k-1}, A_k)$

todennäköisyys on **yleisen tulosäännön** nojalla:

$$\begin{aligned}
&\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\
&= \Pr(A_1) \times \Pr(A_2 \mid A_1) \times \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \\
&\quad \cdots \times \Pr(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \\
&= p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k
\end{aligned}$$

■

*Puutodennäköisyyksien tulosääntöä* voidaan havainnollistaa yllä olevalla *puudiagrammilla*. Reitin $k$ todennäköisyys on puutodennäköisyyksien tulosäännön mukaan

$$\Pr(\text{Reitti } k) = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k$$

## Yhteenlaskusääntö puutodennäköisyyksille

Jos useita (loppu-) tiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, näin saadun *yhdistetyn tapahtuman* todennäköisyys saadaan määräämällä ko. tiloihin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*. Sääntöä kutsutaan **puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännöksi**.

**Perustelu**:

(1) Puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*.

(2) *Toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön mukaan* useista (loppu-) pisteistä yhdistämällä saatavan tapahtuman todennäköisyys saadaan määräämällä ko. pisteisiin vievien reittien todennäköisyyksien *summa*.

Yhdistetään satunnaisilmiön (*loppu*-) *tilat* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ *yhdeksi tapahtumaksi*

$$C = B_1 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

Olkoot *tiloja* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ vastaavat *reitit*

Reitti 1, Reitti 2, … , Reitti $k$

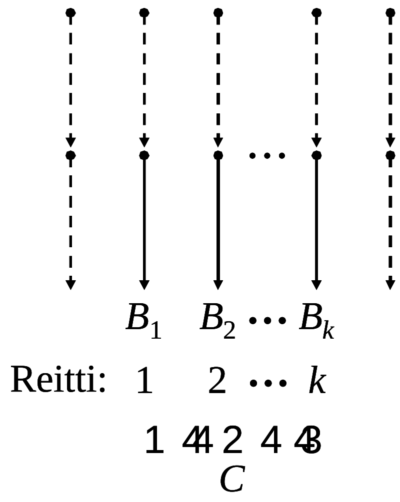
Koska puun eri pisteisiin vievät reitit ovat *toisensa poissulkevia*, tapahtuman $C$ todennäköisyys on **toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusäännön** nojalla:

$$\begin{aligned}\Pr(C) &= \Pr(\text{Reitti 1 } \textit{tai} \text{ Reitti 2 } \textit{tai} \ldots \textit{tai} \text{ Reitti } k) \\ &= \Pr(\text{Reitti 1}) + \Pr(\text{Reitti 2}) + \cdots + \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$

■

*Puutodennäköisyyksien yhteenlaskusääntöä* voidaan havainnollistaa viereisellä *puudiagrammilla*:

$$\begin{aligned}\Pr(C) = &\ \Pr(\text{Reitti 1}) \\ &+ \Pr(\text{Reitti 2}) \\ &\ \cdots \\ &+ \Pr(\text{Reitti } k)\end{aligned}$$




### Päätöspuut: Esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa *päätöstilannetta*:

*Munuaistaudissa* potilaan munuaiset lopettavat vähitellen toimintansa, mikä johtaa potilaan kuolemaan. Oletetaan, että potilas voisi vapaasti valita hoidoksi joko *dialyysin* (munuaiskoneen) tai *munuaisensiirron*. Oletetaan edelleen, että hoitotuloksista on käytettävissä seuraavat tiedot:

Dialyysipotilaat:

68 % elää 5:n vuoden kuluttua

32 % on kuollut 5:n vuoden kuluttua

Munuaisensiirtopotilaat:

48 %:lla siirretty munuainen toimii normaalisti ja potilas elää 5:n vuoden kuluttua

43 %:lla siirretty munuainen ei toimi kunnolla ja he joutuvat dialyysiin

42 % näistä potilaista elää 5:n vuoden kuluttua

58 % näistä potilaista on kuollut 5:n vuoden kuluttua

9 % kuolee siirron aiheuttamiin komplikaatioihin

*Kumpi hoidoista potilaan kannattaa valita*, *jos hän haluaa maksimoida todennäköisyyden olla elossa viiden vuoden kuluttua*?

Merkitään:

$D$ = ”Potilasta hoidetaan dialyysilla”

$S$ = ”Potilaalle tehdään munuaisensiirto”

$SD$ = ”Siirtopotilas joutuu dialyysiin”

$E$ = ”Potilas elää 5 vuoden kuluttua”

$K$ = ”Potilas on kuollut 5 vuoden kuluttua”

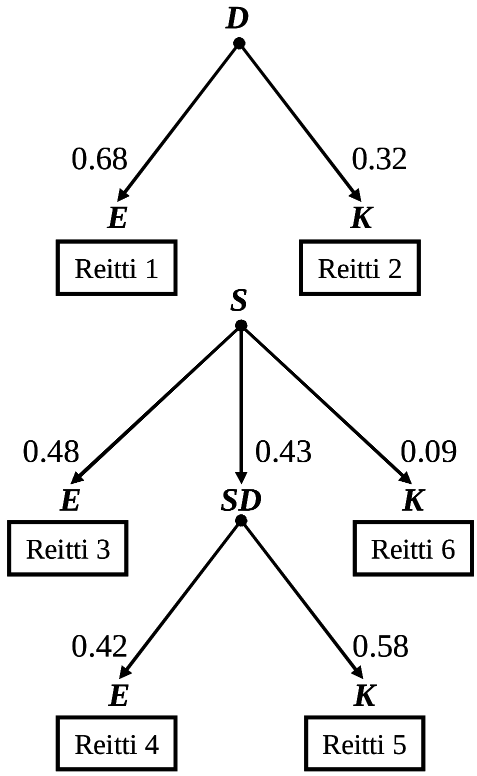
Hoitotulokset voidaan esittää seuraavina *ehdollisina todennäköisyyksinä*:

$\Pr(E|D) = 0.68$ $\Pr(K|D) = 0.32$

$\Pr(E|S) = 0.48$ $\Pr(SD|S) = 0.43$ $\Pr(K|S) = 0.09$

$\Pr(E|SD) = 0.42$ $\Pr(K|SD) = 0.58$

Voimme konstruoida potilaan edessä olevista vaihtoehtoisista tulevaisuuksista alla olevan *puudiagrammin*.




Jos potilas haluaa *maksimoida* todennäköisyyden olla elossa 5:n vuoden kuluttua, hänen on *verrattava* reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyyttä reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyyteen.

Reitin 1 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

$\Pr(\text{Reitti } 1) = 0.68$

Reitin 3 määräämän tapahtuman todennäköisyys:

$\Pr(\text{Reitti } 3) = 0.48$

Reitin 4 määräämän tapahtuman todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien tulosäännön* mukaan:

$\Pr(\text{Reitti } 4) = 0.43 \times 0.42 = 0.1806$

Reittien 3 ja 4 määräämän yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys on *puutodennäköisyyksien yhteenlaskusäännön* mukaan:

$\Pr(\text{Reitti 3 } \textit{tai} \text{ Reitti } 4)$

$= 0.48 + 0.1806 = 0.6606$

Koska

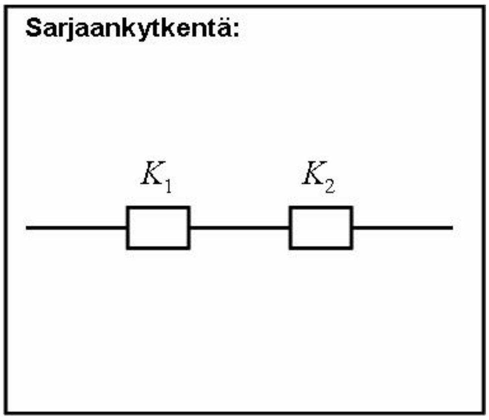
$\Pr(\text{Reitti 3 } \textit{tai} \text{ Reitti } 4) = 0.6606 < \Pr(\text{Reitti } 1) = 0.68$

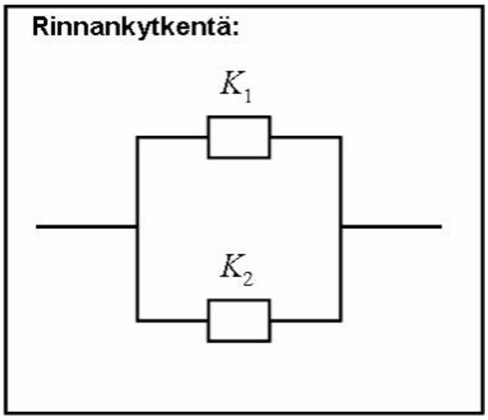
*potilaan kannattaa valita dialyysi, jos hän haluaa maksimoida todennäköisyyden olla elossa viiden vuoden kuluttua.*

## 8.3. Toimintaverkot ja niiden toimintatodennäköisyydet

### Toimintaverkot

**Toimintaverkko** on *systeemi*, joka koostuu *komponenteista*, jotka on kytketty joko **sarjaan** tai **rinnan**. Alla olevat kytkentäkaaviot kuvaavat kahden komponentin $K_1$ ja $K_2$ muodostamia sarjaan- ja rinnankytkentöjä.




Tarkastellaan sarjaan kytkennän ja rinnankytkennän *toimintaehtoja*.

Merkitään

$T$ = Komponentti *toimii*

$F$ = Komponentti *ei toimi*

Komponenttien $K_1$ ja $K_2$ muodostama *sarjaan kytkentä toimii*, *jos komponentti $K_1$ toimii ja komponentti $K_2$ toimii*. Komponenttien $K_1$ ja $K_2$ sarjaan kytkennän *toimintaehdot* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

| $K_1$ | $K_2$ | $K_1$ *ja* $K_2$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

Komponenttien $K_1$ ja $K_2$ muodostama *rinnankytkentä toimii*, *jos komponentti $K_1$ toimii tai komponentti $K_2$ toimii tai molemmat toimivat*. Komponenttien $K_1$ ja $K_2$ rinnankytkennän *toiminta-ehdot* voidaan esittää seuraavana taulukkona:

| $K_1$ | $K_2$ | $K_1$ *tai* $K_2$ |
|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

## Sarjaan kytkennän toimintatodennäköisyys

Oletetaan, että komponentit $K_1$ ja $K_2$ on kytketty *sarjaan* ja oletetaan lisäksi, että komponentin $K_1$ toiminta (tai toimimattomuus) *ei riipu* komponentin $K_2$ toiminnasta (ja kääntäen).

Määritellään tapahtumat

$A_1$ = ”Komponentti $K_1$ toimii”

$A_2$ = ”Komponentti $K_2$ toimii”

Olkoot tapahtumien $A_1$ ja $A_2$ todennäköisyydet

$$p_1 = \Pr(A_1)$$

$$p_2 = \Pr(A_2)$$

Koska tapahtumat $A_1$ ja $A_2$ ovat oletuksen mukaan *riippumattomia*, komponenttien $K_1$ ja $K_2$ muodostama *sarjaan kytkennän toimintatodennäköisyys* on *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* mukaan

Pr(Komponentti $K_1$ toimii *ja* komponentti $K_2$ toimii)

$= \Pr(A_1 \cap A_2)$

$= \Pr(A_1)\Pr(A_2)$

$= p_1 p_2$

= Pr(Komponentti $K_1$ toimii)Pr(Komponentti $K_2$ toimii)

## Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys

Oletetaan, että komponentit $K_1$ ja $K_2$ on kytketty *rinnan* ja oletetaan lisäksi, että komponentin $K_1$ toiminta (tai toimimattomuus) *ei riipu* komponentin $K_2$ toiminnasta (ja kääntäen).

Määritellään tapahtumat

$A_1$ = ”Komponentti $K_1$ toimii”

$A_2$ = ”Komponentti $K_2$ toimii”

Olkoot tapahtumien $A_1$ ja $A_2$ todennäköisyydet

$$p_1 = \Pr(A_1)$$

$$p_2 = \Pr(A_2)$$

Koska tapahtumat $A_1$ ja $A_2$ ovat oletuksen mukaan *riippumattomia*, komponenttien $K_1$ ja $K_2$ muodostaman *rinnan kytkennän toimintatodennäköisyys* on *yleisen yhteenlaskusäännön* ja *riippumattomien tapahtumien tulosäännön* mukaan

Pr(Komponentti $K_1$ toimii *tai* komponentti $K_2$ toimii)

$= \Pr(A_1 \cup A_2)$

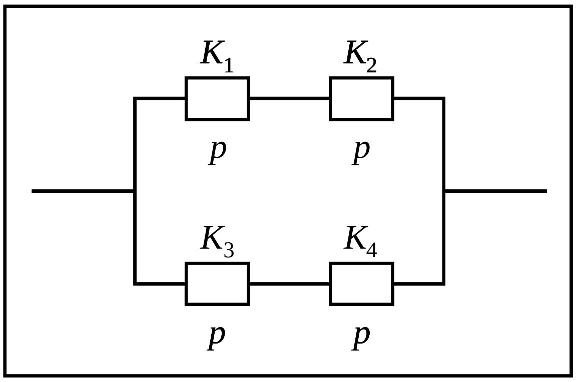
$= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1 \cap A_2)$

$= \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - \Pr(A_1)\Pr(A_2)$

$= p_1 + p_2 - p_1 p_2$

= Pr(Komponentti $K_1$ toimii) + Pr(Komponentti $K_2$ toimii)
– Pr(Komponentti $K_1$ toimii)Pr(Komponentti $K_2$ toimii)

### Sovellus




Viereinen kuva esittää toimintaverkkoa, joka koostuu 4:stä komponentista $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ seuraavalla tavalla:

(i) Komponentit $K_1$ ja $K_2$ on kytketty *sarjaan*.

(ii) Komponentit $K_3$ ja $K_4$ on kytketty *sarjaan*.

(iii) Komponenttipari $K_1$ ja $K_2$ on kytketty *rinnan* komponenttiparin $K_3$ ja $K_4$ kanssa.

Olkoon

$$\Pr(K_i \text{ toimii}) = p,\ i = 1, 2, 3, 4$$

Oletetaan lisäksi, että yhdenkään komponentin toiminta *ei riipu* muiden komponenttien toiminnasta.

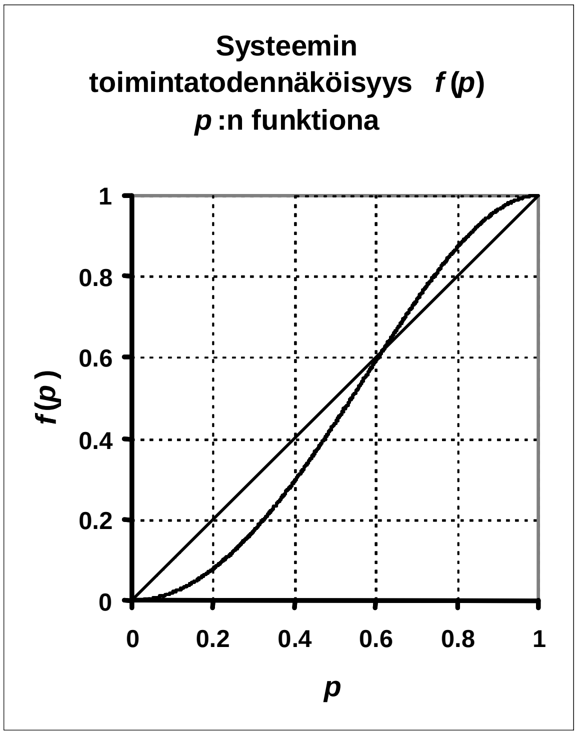
*Sarjaan kytkennän toimintatodennäköisyyden kaavan* mukaan

$$\Pr(K_1 \text{ toimii } \textit{ja } K_2 \text{ toimii}) = p \times p = p^2$$

$$\Pr(K_3 \text{ toimii } \textit{ja } K_4 \text{ toimii}) = p \times p = p^2$$

*Rinnan kytkennän toimintatodennäköisyyden kaavan* mukaan

$$\Pr(\text{Systeemi toimii}) = p^2 + p^2 - p^2 \times p^2 = 2p^2 - p^4$$




Kuva oikealla esittää esimerkin systeemin toimintatodennäköisyyttä

$$f(p) = 2p^2 - p^4$$

yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyyden $p$ funktiona.

Kuvioon on piirretty myös suora

$$f(p) = p$$

Kuviosta nähdään:

(i) $f(p)$ on $p$:n *kasvava funktio*.

(ii) Esimerkin systeemin toimintatodennäköisyys voi olla *suurempi*, *pienempi* tai *yhtä suuri* kuin yksittäisen komponentin toimintatodennäköisyys.