Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

22. marraskuuta 2007

χ^2-riippumattomuustesti

- χ^2-*riippumattomuustestillä* testataan, ovatko perusjoukon alkion tekijät A ja B *riippumattomia*.
- Käytännössä testin suorittaminen muistuttaa χ^2-homogeenisuustestiä.
- Yleinen hypoteesi: Oletetaan, että perusjoukosta on poimittu yksinkertainen satunnaisotos ja havaintoyksiköt voidaan luokitella ristiin tekijöiden A ja B suhteen.

H_0: Tekijät A ja B *ovat* riippumattomia.

H_1: Tekijät A ja B *eivät ole* riippumattomia.

χ^2-riippumattomuustestin suorittaminen 1/4

- Testi suoritetaan seuraavasti: valitaan havainnoille toisensa poissulkevat *luokitukset* tekijöiden A ja B suhteen.
- Luokitellaan havainnot tekijöiden A ja B suhteen, ja määrätään *havaitut luokkafrekvenssit*.

χ^2-riippumattomuustestin suorittaminen 2/4

Kuten χ^2-homogeenisuustestin tapauksessa, nämä voidaan esittää taulukkona:

	1	2	...	c	Σ
1	O_{11}	O_{12}	...	O_{1c}	R_1
2	O_{21}	O_{22}	...	O_{2c}	R_2
...	...	...	...	...	...
r	O_{r1}	O_{r2}	...	O_{rc}	R_r
Σ	C_1	C_2	...	C_c	n

Tässä r on A-luokkien lukumäärä, c B-luokkien lukumäärä, O_{ij} havaittu frekvenssi luokassa, jonka määrää A-luokka i ja B-luokka j, R_i havaittu frekvenssi A-luokassa i, C_j havaittu frekvenssi B-luokassa j ja n havaintojen kokonaislukumäärä.

χ^2-riippumattomuustestin suorittaminen 3/4

- Erityisesti pätee, että
  (i) $\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = n_i$,
  (ii) $\sum_{i=1}^{r} O_{ij} = C_j$, ja
  (iii)
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = \sum_{i=1}^{r} R_i = \sum_{j=1}^{c} C_j = n.$$
- Määrätään tehdyn riippumattomuusoletuksen mukaiset *odotetut luokkafrekvenssit* E_{ij} yhtälöillä:
$$E_{ij} = nP_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}, \qquad i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, c.$$
- Kuten edellä, näistä voidaan muodostaa taulukko.

χ^2-riippumattomuustestin suorittaminen 4/4

- Verrataan havaittuja ja odotettuja luokkafrekvenssejä toisiinsa χ^2-*testisuureella*:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}.$$
- Jos nollahypoteesi pätee, testisuure noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti χ^2-jakaumaa vapausastein $f = (r-1)(c-1)$, missä r on A-luokkien ja c B-luokkien lukumäärä.
- Approksimaatio on tavallisesti riittävän hyvä, jos $E_{ij} > 1$ ja keskimääräiset frekvenssit $R_j/c > 5$ ja $C_j/r > 5$.
- Testisuureen normaaliarvo eli odotusarvo nollahypoteesin pätiessä on $\mathrm{E}(\chi^2) = f$.
- Normaaliarvoa merkitsevästi suuremmat χ^2-testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi ei päde.

Esimerkki 1/2

- Tehtaassa pyrittiin parantamaan tuotteen laatua. Ennen muutostöitä todettiin tarkastuksessa, että 80 tuotteen joukosta 65 oli täysin virheettömiä ja muutosten jälkeen 110 tuotteen joukosta 98 oli täysin virheettömiä. Paraniko tuotteiden laatu?
- Valitaan hypoteesiksi H_0: Muutostöillä ei ollut vaikutusta tuotteen laatuun (eli virheellisyys/virheettömyys on riippumatonta muutostöistä).
- Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1: Muutostöillä oli vaikutusta.
- Luokitellaan tekijöiden (A) Muutostyöt ennen/jälkeen (=1/2) ja (B) virheetön/virheellinen (=1/2).
- Muodostetaan nelikenttä

	A_1	A_2	Σ
B_1	65	98	163
B_2	15	12	27
Σ	80	110	190

Esimerkki 2/2

- Odotetut frekvenssit E_{ij}:

	A_1	A_2	Σ
B_1	68.63	94.37	163
B_2	11.37	15.63	27
Σ	80	110	190

- χ^2-testisuure:

$$\chi^2 = \frac{(65-68.64)^2}{68.64} + \frac{(98-94.37)^2}{94.37} + \frac{(15-11.37)^2}{11.37} + \frac{(12-15.63)^2}{15.63} \approx 2.335$$

- Testataan merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$. Käytetään χ^2-jakaumaa vapausasteilla $f = (2-1)(2-1) = 1$.
- Hylkäysalueeksi saadaan $(3.84, \infty)$, joten nollahypoteesi hyväksytään merkitsevyystasoilla 0.05. Muutostöillä ei ollut tilastollisesti merkitsevää vaikutusta tuotteen laatuun.

Johdatus regressioanalyysiin

- Oletetaan, että haluamme selittää jonkin *selitettävän muuttujan* havaittujen arvojen vaihtelun *selittävien muuttujien* havaittujen arvojen vaihtelun avulla.
- *Regressioanalyysissa* selitettävän muuttujan tilastolliselle riippuvuudelle selittävistä muuttujista pyritään rakentamaan tilastollinen malli, jota kutsutaan *regressiomalliksi*.
- Regressioanalyysin mahdollisia tavoitteita ovat:
  (i) Selitettävän muuttujan ja selittävien muuttujien *tilastollisen riippuvuuden luonteen kuvaaminen*.
  (ii) Selitettävän muuttujan arvojen ennustaminen.

Regressiomalli

- Regressiomallissa

$$y_j = f(x_j; \beta) + \varepsilon_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

on seuraavat osat:

y_j = *Selitettävän muuttujan* havaittu arvo havaintoyksikössä j.
x_j = *Selittävän muuttujan* havaittu arvo havaintoyksikössä j.
β = Tuntematon ei-satunnainen *parametri*.
ε_j = Satunnainen *virhetermi* havaintoyksikössä j.

Regressio-ongelma

- Regressioanalyysissa pyritään valitsemaan regressiomallin parametrin β arvo siten, että kaikista virhetermeistä ε_j tulee samanaikaisesti mahdollisimman pieniä.
- Pyritään siis valitsemaan parametri β siten, että käyrä

$$y = f(x; \beta)$$

kulkisi mahdollisimman läheltä jokaista havaintopistettä

$$(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

- Erään ratkaisun tähän käyränsovitusongelmaan tarjoaa *pienimmän neliösumman menetelmä*.

Pienimmän neliösumman menetelmä

- Pienimmän neliösumman menetelmässä pyritään minimoimaan regressiomallin

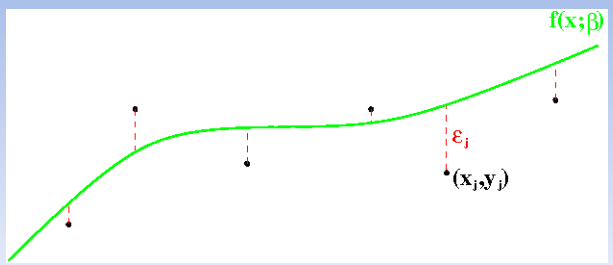
$$y_j = f(x_j; \beta) + \varepsilon_j\,,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

virhetermien ε_j neliöden summaa muuttamalla parametrin β arvoa eli funktiota

$$F(\beta) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - f(x_j; \beta))^2.$$

- Optimaalinen β:n arvo on parametrin β *pienimmän neliösumman estimaatti* eli *PNS-estimaatti*.

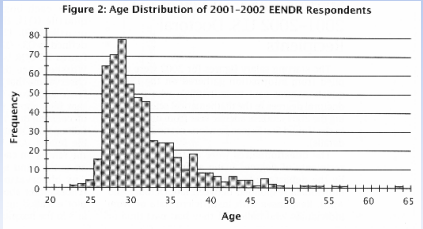
PNS-menetelmä



PNS-suoran sovittaminen: Kuvassa vihreällä parametr(e)ista β riippuva sovitettava funktio $f(x; \beta)$ jollakin parametrin arvolla, datapisteet (x_j, y_j) ja vastaavat virhetermit ε_j.

Esimerkki 1/3

Eräässä tutkimuksessa selvitettiin tohtorintutkinnon matematiikassa suorittavien ikää väitösvuotena. Tulokset olivat seuraavat:



Esimerkki 2/3

- Sovitetaan dataan muotoa

$$f(x; \beta) = \beta_1 x^2 e^{-\beta_2 x}$$

oleva funktio.
- Tässä tapauksessa sovituksen tekeminen käsin ei ole helppoa. Tietokoneella (MATLAB) se kuitenkin onnistuu.
- Muodostetaan aluksi mallifunktio:
`f=inline('beta(1)*x.^2.* exp(-beta(2)*x)','x','beta');`
- Minimoitava funktio $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ on

$$F(\beta) = \sum_{j=1}^{n} \big(y_j - f(x_j; \beta)\big)^2,$$

eli MATLAB:illa
`fobj=inline('norm(feval(f,x,beta)-y)','beta');`
missä `x` ja `y` ovat datan sisältävät vektorit.

Esimerkki 3/3

- Minimointi voidaan suorittaa käskyllä `fminsearch`, eli `beta=fminsearch(fobj,beta0)`, missä `beta0` on minimin hakemisessa käytettävä alkuarvaus.
- Tulokseksi saadaan sovitus: