

## Sovellettu todennäköisyytlaskenta B

Antti Rasila

15. marraskuuta 2007

### 4 Tilastollisia testejä (jatkoa)

- Yhden otoksen  $\chi^2$ -testi varianssille
- Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille
- Suhteellisen osuuden testaus
- Suhteellisten frekvenssien vertailutesti

### Yhden otoksen $\chi^2$ -testi varianssille 1/3

- Oletetaan, että  $X_1, \dots, X_n$  riippumattomia ja

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Nollahypoteesi:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array} \right\} \text{ (yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

### Yhden otoksen $\chi^2$ -testi varianssille 2/3

- Olkoot

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ ja } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

tavanomaiset harhattomat estimaattorit parametreille  $\mu$  ja  $\sigma^2$ .

- Määritellään  $\chi^2$ -testisuure

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$

joka nollahypoteesin pätiessä noudattaa  $\chi^2$ -jakaumaa vapausastein  $(n-1)$ , eli  $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$ . Valitaan merkitsevyytasoksi  $\alpha$ .

### Yhden otoksen $\chi^2$ -testi varianssille 3/3

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ , niin *kriittinen arvo* saadaan ehdosta

$$Pr(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa  $(\chi_{\alpha}^2, +\infty)$ .
- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ , niin kriittinen arvo  $\chi_{1-\alpha}^2$  saadaan ehdosta  $Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha$  ja hylkäysalue on muotoa  $(0, \chi_{1-\alpha}^2)$ .
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  kriittiset arvot  $\chi_{1-\alpha/2}^2$  ja  $\chi_{\alpha/2}^2$  saadaan ehdoista

$$Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2) = Pr(\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa  $(0, \chi_{1-\alpha/2}^2) \cup (\chi_{\alpha/2}^2, +\infty)$ .

### Esimerkki

- Herkkiä teknisiä laitteita sisältävässä tilassa ilman suhteellisen kosteuden tulisi pysyä mahdollisimman tarkaan vakiona 45% ja hajonnan saisi olla korkeintaan 3%. Tutkitaan, täytyykö hajonnalle asetettu vaatimus merkitsevyytasolla 0.05, kun mitatut suhteelliset kosteudet ovat

40 42 45 37 46 55 45  
43 48 43 43 47 47 43

- Oletetaan ilman kosteus normaalijakautuneeksi ja asetetaan nollahypoteesiksi oletus, että kosteus vaihtelee sallituissa rajoissa. Siis  $H_0 : \sigma \leq 3$ ,  $H_1 : \sigma > 3$ .
- Otoskeskihajonta  $s = 4.201$  ja otoskoko  $n = 14$ , joten

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{13 \cdot 4.201^2}{3^2} \approx 25.49 > 22.36 = \chi_{0.95}^2.$$

- Testin tulos on selvästi hylkäysalueella, joten kosteuden säätöä on syytä parantaa.

### Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille 1/3

- Olkoot  $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ja  $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , missä  $i = 1, \dots, m$  ja  $j = 1, \dots, n$ . Oletetaan, että havainnot  $X_i, Y_j$  ovat riippumattomia kaikilla  $i, j$ .

- Nollahypoteesi  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ .

- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{array} \right\} \text{ (yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

### Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille 2/3

- Määritellään *F-testisuure*

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2},$$

missä  $s_X$  (vast.  $s_Y$ ) on havaintojen  $X_i$  (vast.  $Y_j$ ) harhaton otosvarianssi.

- Nollahypoteesin pätiessä testisuure  $F$  noudattaa F-jakaumaa vapausastein  $m-1$  ja  $n-1$ , eli

$$F \sim F(m-1, n-1).$$

Valitaan merkitsevyytasoksi  $\alpha$ .

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ , niin *kriittinen arvo*  $F_{\alpha}$  saadaan ehdosta

$$Pr(F \geq F_{\alpha}) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa  $(F_{\alpha}, +\infty)$ .

## Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille 3/3

- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ , niin kriittinen arvo  $F_{1-\alpha}$  saadaan ehdosta  $Pr(F \leq F_{1-\alpha}) = \alpha$  ja hylkäysalue on muotoa  $(0, F_{1-\alpha})$ .
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  ja kriittiset arvot  $F_{1-\alpha/2}$  ja  $F_{\alpha/2}$  saadaan ehdoista

$$Pr(F \leq F_{1-\alpha/2}) = Pr(F \leq F_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa  $(0, F_{1-\alpha/2}) \cup (F_{\alpha/2}, +\infty)$ .

## Esimerkki (Niemi) 1/3

- Tutkittiin, onko kahden eri valmistajan katalysaattoreilla eroa. Valittiin kokeeseen 32 samanmerkkistä ja mallista autoa. Näistä valittiin umpimähkään 16 autoa, joihin asennettiin valmistajan A katalysaattori, loppuihin valmistajan B.
- Autoja käytettiin samanlaisissa olosuhteissa ja mitattiin pakokaasun häkäpitoisuus. Tulokset olivat:

A	0.051	0.055	0.052	0.053	0.051	0.058	0.056	0.056
B	0.048	0.051	0.058	0.046	0.049	0.045	0.056	0.049
	0.048	0.052	0.050	0.051	0.046	0.048	0.043	0.052
	0.052	0.051	0.048	0.048	0.055	0.049	0.045	0.053

- Oletetaan häkäpitoisuus normaalijakautuneeksi ja testataan, ovatko valmistajien A ja B katalysaattoreiden suodattamien pakokaasujen häkäpitoisuuksien keskiarvot samat vai eivät.
- Testataan aluksi, ovatko häkäpitoisuuksien hajonnat samat.

## Esimerkki (Niemi) 2/3

- Testissä  $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$  ja  $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$ . Valitaan  $\alpha = 0.05$ .
- Otoshajonnat ovat  $s_A = 0.00410$  ja  $s_B = 0.00316$ .
- Testimuuttuja

$$F = \frac{0.00410^2}{0.00316^2} = 1.68$$

ja kriittiset arvot  $F_{0.975}(15, 15) = 2.86$  ja  $F_{0.025}(15, 15) = 1/F_{0.975}(15, 15) = 0.38$ .

- Hajontoja siis voidaan pitää yhtäsuurina. Tätä voisi perustella myös sillä, että testiin valitut autot olivat samanlaisia.
- Tutkitaan seuraavaksi merkitsevyytasolla 0.01, onko häkäpitoisuuksissa eroja.

## Esimerkki (Niemi) 3/3

- Nyt  $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$  ja  $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$ .
- Otoskeskiarvot ovat  $\bar{x}_A = 0.0521$  ja  $\bar{x}_B = 0.0494$ . Saadaan

$$s_p = \sqrt{\frac{(16-1) \cdot 0.00410^2 + (16-1) \cdot 0.00316^2}{16+16-2}} = 0.00366.$$

- Testisuureen arvo

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_p \sqrt{1/n_A + 1/n_B}} = \frac{0.0521 - 0.0494}{0.00366 \sqrt{2/16}} = 2.121.$$

- Kriittinen arvo  $t_{0.995}(30) = 2.750$ , joten nollassuhteeksi jää voimaan. Ei ole riittävä näyttöä sille, että valmistajien A ja B katalysaattoreissa olisi eroa.
- Tulos on kuitenkin melko lähellä hylkäämisrajaa, ja nollassuhteeksi olisi hylätty merkitsevyytasolla 0.05.

## Suhteellisen osuuden testaus 1/3

- Olkoon A tapahtuma ja  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta, jossa  $p = Pr(A)$ .
- Oletetaan, että  $X_1, \dots, X_n$  ovat riippumattomia ja  $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ .
- Nollahypoteesi  $H_0: p = p_0$ .
- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1: p > p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{array} \right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1: p \neq p_0 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

## Suhteellisen osuuden testaus 2/3

- Olkoon

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = f/n,$$

missä  $f$  on tapahtuman A frekvenssi otoksessa ja  $f/n$  on suhteellinen frekvenssi.

- Määritellään Z-testisuure

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

- Jos nollassuhteeksi  $H_0: p = p_0$  on tosi, niin Z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa  $N(0, 1)$ . Vrt. esimerkki viime viikon luennoissa.
- Approksimaatio on tavallisesti riittävän hyvä, jos  $n\hat{p} \geq 10$  ja  $n(1-\hat{p}) \geq 10$ . Valitaan merkitsevyytasoksi  $\alpha$ .

## Suhteellisen osuuden testaus 3/3

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1: p > p_0$ , niin kriittinen arvo  $+z_\alpha$  saadaan ehdosta

$$Pr(Z \geq +z_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa  $(+z_\alpha, +\infty)$ .
- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1: p < p_0$ , niin kriittinen arvo  $-z_\alpha$  saadaan ehdosta  $Pr(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$  ja hylkäysalue on muotoa  $(-\infty, -z_\alpha)$ .
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa  $H_1: p \neq p_0$  kriittiset arvot  $-z_{\alpha/2}$  ja  $+z_{\alpha/2}$  saadaan ehdoista

$$Pr(Z \leq -z_{\alpha/2}) = Pr(Z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa  $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$ .

## Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 1/4

- Olkoon A tapahtuma ja  $X_{ik}, i = 1, 2, \dots, n_k, k = 1, 2$  satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta, jossa  $p_k = Pr(A)$ .
- Oletetaan, että  $X_{1k}, \dots, X_{nk}$  ovat riippumattomia ja  $X_{ik} \sim \text{Bernoulli}(p_k), i = 1, \dots, n_k, k = 1, 2$ .
- Nollahypoteesi  $H_0: p_1 = p_2 = p$ .
- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left. \begin{array}{l} H_1: p_1 > p_2 \\ H_1: p_1 < p_2 \end{array} \right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1: p_1 \neq p_2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

## Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 2/4

- Olkoon

$$\hat{p} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_j = f_k/n_k,$$

missä  $f_k$  on tapahtuman  $A$  frekvenssi otoksessa  $k$  ja  $f_k/n_k$  on suhteellinen frekvenssi.

- Nyt

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \sim \text{Bin}(n_k, p_k), \quad k = 1, 2.$$

- Jos nollahypoteesi  $H_0 : p_1 = p_2 = p$  pätee, otokset voidaan yhdistää ja parametrin  $p$  harhaton estimaattori  $\hat{p}$  on

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}.$$

## Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 3/4

- Määritellään Z-testisuure

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}.$$

- Jos nollahypoteesi  $H_0 : p_1 = p_2 = p$  on tosi, niin  $Z$  noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa  $N(0, 1)$ .
- Approksimaatio on tavallisesti riittävän hyvä, jos  $n_k \hat{p}_k \geq 5$  ja  $n_k(1 - \hat{p}_k) \geq 5$ . Valitaan merkitsevyytasoksi  $\alpha$ .
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1 : p_1 > p_2$ , niin kriittinen arvo  $+z_\alpha$  saadaan ehdosta

$$\Pr(Z \geq +z_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa  $(+z_\alpha, +\infty)$ .

## Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 4/4

- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa  $H_1 : p_1 < p_2$ , niin kriittinen arvo  $-z_\alpha$  saadaan ehdosta  $\Pr(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$  ja hylkäysalue on muotoa  $(-\infty, -z_\alpha)$ .
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa  $H_1 : p_1 \neq p_2$  kriittiset arvot  $-z_{\alpha/2}$  ja  $+z_{\alpha/2}$  saadaan ehdoista

$$\Pr(Z \leq -z_{\alpha/2}) = \Pr(Z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa  $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$ .