Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

15. marraskuuta 2007

1. Tilastollisia testejä (jatkoa)
   - Yhden otoksen χ^2-testi varianssille
   - Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille
   - Suhteellisen osuuden testaus
   - Suhteellisten frekvenssien vertailutesti

Yhden otoksen χ^2-testi varianssille 1/3

- Oletetaan, että $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia ja

$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Nollahypoteesi:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1 : & \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}\right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

Yhden otoksen χ^2-testi varianssille 2/3

- Olkoot
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ ja } s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
tavanomaiset harhattomat estimaattorit parametreille μ ja σ^2.
- Määritellään χ^2-testisuure
$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},$$
joka nollahypoteesin pätiessä noudattaa χ^2-jakaumaa vapausastein $(n-1)$, eli $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$. Valitaan merkitsetvyystasoksi α.

Yhden otoksen χ^2-testi varianssille 3/3

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, niin *kriittinen arvo* saadaan ehdosta

$$Pr(\chi^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa $(\chi^2_\alpha, +\infty)$.
- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, niin kriittinen arvo $\chi^2_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta $Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha-1}) = \alpha$ ja hylkäysalue on muotoa $(0, \chi^2_{1-\alpha})$.
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ kriittiset arvot $\chi^2_{1-\alpha/2}$ ja $\chi^2_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$Pr(\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = Pr(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa $(0, \chi^2_{1-\alpha/2}) \cup (\chi^2_{\alpha/2}, +\infty)$.

Esimerkki

- Herkkiä teknisiä laitteita sisältävässä tilassa ilman suhteellisen kosteuden tulisi pysyä mahdollisimman tarkaan vakiona 45% ja hajonnan saisi olla korkeintaan 3%. Tutkitaan, täyttykö hajonnalle asetettu vaatimus merkitsevyystasolla 0.05, kun mitatut suhteelliset kosteudet ovat

40	42	45	37	46	55	45
43	48	43	43	47	47	43

- Oletetaan ilman kosteus normaalijakautuneeksi ja asetetaan nollahypoteesiksi oletus, että kosteus vaihtelee sallituissa rajoissa. Siis $H_0 : \sigma \leq 3$, $H_1 : \sigma > 3$.
- Otoskeskihajonta $s = 4.201$ ja otoskoko $n = 14$, joten

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{13 \cdot 4.201^2}{3^2} \approx 25.49 > 22.36 = \chi^2_{0.95}.$$

- Testin tulos on selvästi hylkäysalueella, joten kosteuden säätöä on syytä parantaa.

Kahden riippumattoman otoksen F-testi varianseille 1/3

- Olkoot $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $Y_j \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, missä $i = 1, \ldots, m$ ja $j = 1, \ldots, n$. Oletetaan, että havainnot X_i, Y_j ovat riippumattomia kaikilla i, j.
- Nollahypoteesi $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.
- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1: & \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ H_1: & \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{array}\right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

Kahden riippumattoman otoksen F-testi varianseille 2/3

- Määritellään *F-testisuure*

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2},$$

missä s_X (vast. s_Y) on havaintojen X_i (vast. Y_j) harhaton otosvarianssi.

- Nollahypoteesin pätiessä testisuure F noudattaa F-jakaumaa vapausastein $m-1$ ja $n-1$, eli

$$F \sim F(m-1, n-1).$$

Valitaan merkitsevyystasoksi α.

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, niin *kriittinen arvo* F_α saadaan ehdosta

$$Pr(F \geq F_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa $(F_\alpha, +\infty)$.

Kahden riippumattoman otoksen F-testi variansseille 3/3

- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, niin kriittinen arvo $F_{1-\alpha}$ saadaan ehdosta $Pr(F \leq F_{1-\alpha}) = \alpha$ ja hylkäysalue on muotoa $(0, F_{1-\alpha})$.
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ ja kriittiset arvot $F_{1-\alpha/2}$ ja $F_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$Pr(F \leq F_{1-\alpha/2}) = Pr(F \leq F_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa $(0, F_{1-\alpha/2}) \cup (F_{\alpha/2}, +\infty)$.

Esimerkki (Niemi) 1/3

- Tutkittiin, onko kahden eri valmistajan katalysaattoreilla eroa. Valittiin kokeeseen 32 samanmerkkistä ja mallista autoa. Näistä valittiin umpimähkään 16 autoa, joihin asennettiin valmistajan A katalysaattori, loppuihin valmistajan B.
- Autoja käytetiin samanlaisissa olosuhteissa ja mitattiin pakokaasun häkäpitoisuus. Tulokset olivat:

A	0.051	0.055	0.052	0.053	0.051	0.058	0.056	0.056
	0.048	0.051	0.058	0.046	0.049	0.045	0.056	0.049
B	0.048	0.052	0.050	0.051	0.046	0.048	0.043	0.052
	0.052	0.051	0.048	0.048	0.055	0.049	0.045	0.053

- Oletetaan häkäpitoisuus normaalijakautuneeksi ja testataan, ovatko valmistajien A ja B katalysaattoreiden suodattamien pakokaasujen häkäpitoisuuksien keskiarvot samat vai eivät.
- Testataan aluksi, ovatko häkäpitoisuuksien hajonnat samat.

Esimerkki (Niemi) 2/3

- Testissä $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ ja $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. Valitaan $\alpha = 0.05$.
- Otoshajonnat ovat $s_A = 0.00410$ ja $s_B = 0.00316$.
- Testimuuttuja

  $$F = \frac{0.00410^2}{0.00316^2} = 1.68$$

  ja kriittiset arvot $F_{0.975}(15, 15) = 2.86$ ja $F_{0.025}(15, 15) = 1/F_{0.975}(15, 15) = 0.38$.
- Hajontoja siis voidaan pitää yhtäsuurina. Tätä voisi perustella myös sillä, että testiin valitut autot olivat samanlaisia.
- Tutkitaan seuraavaksi merkitsevyystasolla 0.01, onko häkäpitoisuuksissa eroja.

Esimerkki (Niemi) 3/3

- Nyt $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ ja $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.
- Otoskeskiarvot ovat $\bar{x}_A = 0.0521$ ja $\bar{x}_B = 0.0494$. Saadaan

$$s_p = \sqrt{\frac{(16-1) \cdot 0.00410^2 + (16-1) \cdot 0.00316^2}{16+16-2}} = 0.00366.$$

- Testisuureen arvo

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s_p \sqrt{1/n_A + 1/n_B}} = \frac{0.0521 - 0.0494}{0.00366\sqrt{2/16}} = 2.121.$$

- Kriittinen arvo $t_{0.995}(30) = 2.750$, joten nollahypoteesi jää voimaan. Ei ole riittävää näyttöä sille, että valmistajien A ja B katalysaattoreissa olisi eroa.
- Tulos on kuitenkin melko lähellä hylkäämisrajaa, ja nollahypoteesi olisi hylätty merkitsevyystasolla 0.05.

Suhteellisen osuuden testaus 1/3

- Olkoon A tapahtuma ja X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta, jossa $p = Pr(A)$.
- Oletetaan, että $X_1, \ldots, X_n$ ovat riippumattomia ja $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$.
- Nollahypoteesti $H_0 : p = p_0$.
- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1 : & p > p_0 \\ H_1 : & p < p_0 \end{array}\right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1 : p \neq p_0 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

Suhteellisen osuuden testaus 2/3

- Olkoon

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j = f/n,$$

missä f on tapahtuman A frekvenssi otoksessa ja f/n on suhteellinen frekvenssi.

- Määritellään Z-testisuure

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

- Jos nollahypoteesi $H_0 : p = p_0$ on tosi, niin Z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0,1)$. Vrt. esimerkki viime viikon luennoissa.
- Approksimaatio on tavallisesti riittävän hyvä, jos $n\hat{p} \geq 10$ ja $n(1-\hat{p}) \geq 10$. Valitaan merkitsevyystasoksi α.

Suhteellisen osuuden testaus 3/3

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : p > p_0$, niin kriittinen arvo $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$Pr(Z \geq +z_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa $(+z_\alpha, +\infty)$.
- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : p < p_0$, niin kriittinen arvo $-z_\alpha$ saadaan ehdosta $Pr(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$ ja hylkäysalue on muotoa $(-\infty, -z_\alpha)$.
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa $H_1 : p \neq p_0$ kriittiset arvot $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$Pr(Z \leq -z^2_{\alpha/2} = Pr(Z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$.

Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 1/4

- Olkoon A tapahtuma ja X_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, 2$ satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta, jossa $p_k = Pr(A)$.
- Oletetaan, että $X_{1k}, \ldots, X_{n_k k}$ ovat riippumattomia ja $X_{ik} \sim \mathrm{Bernoulli}(p_k)$, $i = 1, \ldots, n_k$, $k = 1, 2$.
- Nollahypoteesti $H_0 : p_1 = p_2 = p$.
- Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1 : & p_1 > p_2 \\ H_1 : & p_1 < p_2 \end{array}\right\} \text{(yksisuuntaiset), tai}$$

$$H_1 : p_1 \neq p_2 \text{ (kaksisuuntainen).}$$

Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 2/4

- Olkoon

$$\hat{p} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_j = f_k / n_k,$$

missä f_k on tapahtuman A frekvenssi otoksessa k ja f_k/n_k on suhteellinen frekvenssi.

- Nyt

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \sim \mathrm{Bin}(n_k, p_k), \qquad k = 1, 2.$$

- Jos nollahypoteesi $H_0 : p_1 = p_2 = p$ pätee, otokset voidaan yhdistää ja parametrin p harhaton estimaattori $\hat{p}$ on

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}.$$

Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 3/4

- Määritellään Z-testisuure

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}.$$

- Jos nollahypoteesi $H_0 : p_1 = p_2 = p$ on tosi, niin Z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, 1)$.
- Approksimaatio on tavallisesti riittävän hyvä, jos $n_k \hat{p}_k \geq 5$ ja $n_k(1 - \hat{p}_k) \geq 5$. Valitaan merkitsevyystasoksi α.
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : p_1 > p_2$, niin kriittinen arvo $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$Pr(Z \geq +z_\alpha) = \alpha.$$

- Testin hylkäysalue on muotoa $(+z_\alpha, +\infty)$.

Suhteellisten frekvenssien vertailutesti 4/4

- Vastaavasti, jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : p_1 < p_2$, niin kriittinen arvo $-z_\alpha$ saadaan ehdosta $Pr(Z \leq -z_\alpha) = \alpha$ ja hylkäysalue on muotoa $(-\infty, -z_\alpha)$.
- Kaksisuuntaisessa tapauksessa $H_1 : p_1 \neq p_2$ kriittiset arvot $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$Pr(Z \leq -z_{\alpha/2}) = Pr(Z \geq +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

ja hylkäysalue on muotoa $(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$.