Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

8. marraskuuta 2007

Z-testi

- Oletetaan, että testisuure $\theta \sim \mathrm{N}(0,1)$. Käytetään parametrin θ arvon tarkasteluun harhatonta estimaattoria $\hat{\theta}$.
- Monissa sovelluksissa estimaattori on joko eksaktisti tai ainakin asymptoottisesti normaalijakautunut.
- Jos keskihajonta σ_θ on tunnettu, niin

$$Z_0 = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_\theta} \sim Z \qquad (1)$$

  missä θ_0 on estimaattorin odotusarvo ja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.
- Jos havaittu arvo $\hat{\theta}$ poikkeaa huomattavasti odotusarvosta θ_0, niin vastaavasti suureen (1) arvo poikkeaa nollasta.
- Poikkeaman merkitsevyys voidaan laskea suoraan standardinormaalijakaumasta.

Normaalijakauman odotusarvon testaus, keskihajonta tunnetaan 1/2

- Olkoon $X_1, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Odotusarvon estimaattori on keskiarvo $\overline{X}$, joka on normaalijakautunut keskihajontana $\sigma/\sqrt{n}$.
- Tällöin testisuure odotusarvon μ tarkastelussa on

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z$$

  missä $\bar{x}$ on otoksesta laskettu keskiarvo $\bar{x} = \sum x_i/n$, μ_0 nollahypoteesin määräämä vakio, z_0 testisuureen Z_0 saama arvo ja $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Normaalijakauman odotusarvon testaus, keskihajonta tunnetaan 2/2

- Tavallisimpien hypoteesien tapauksessa p-arvo lasketaan seuraavasti:
  - $H_0 : \mu \le \mu_0, \qquad H_1 : \mu > \mu_0$
    p-arvo $= Pr(Z \ge z_0)$.
  - $H_0 : \mu \ge \mu_0, \qquad H_1 : \mu < \mu_0$
    p-arvo $= Pr(Z \le z_0)$.
  - $H_0 : \mu = \mu_0, \qquad H_1 : \mu \ne \mu_0$
    p-arvo $= Pr(|Z| \ge |z_0|)$.
- Ensimmäiset kaksi testiä ovat yksisuuntaisia, kolmas on kaksisuuntainen.
- Kun riskitaso α on valittu (esim. $\alpha = 0.05$), hypoteesi H_0 hylätään ja H_1 hyväksytään, jos p-arvo $\le \alpha$.

Esimerkki (Laininen)

- Pakkauskoneella tehdään 1000 g:n pakkauksia. Pakkauksen paino $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$, $\sigma = 10$ g.
- Jotta ei syntyisi liian paljon pakkauksia, joiden paino on alle 1000 g, pyritään odotusarvo pitämään arvossa $\mu_0 = 1005$ g. Säätöarvo tarkastetaan ajoittain punnitsemalla $n = 20$ umpimähkään valittua pakkausta ja testaamalla riskitasolla $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \mu \ge 1005, \qquad H_1 : \mu < 1005.$$

- Taskastuksessa saadaan painojen keskiarvoksi $\bar{x} = 1001.2$ Hyväksytäänkö H_0?

$$z_0 = \frac{1001.2 - 1005}{10/\sqrt{20}} = -1.699.$$

- p-arvo on siis $Pr(Z \le -1.699) = 0.0446$.
- p-arvo on alle 0.05, joten H_0 hylätään.

Esimerkki (Laininen)

- Kone valmistaa laakerikuulia, joiden halkaisijan tulee olla 5 mm. Oletetaan, että halkaisija $X \sim \mathrm{N}(\mu, 0.1)$.
- Säätöarvot tarkastetaan valitsemalla umpimähkään 30 laakerikuulaa, joiden halkaisija mitataan ja tekemällä testi riskitasolla 0.05

$$H_0 : \mu = 5, \qquad H_1 : \mu \ne 5.$$

- Tarkastuksessa saadaan keskiarvoksi $\bar{x} = 5.03$ mm. Hyväksytäänkö H_0?

$$z_0 = \frac{5.03 - 5}{0.2/\sqrt{30}} = 1.643.$$

- p-arvo on $Pr(|Z| \ge 1.643) = 0.1006$.
- p-arvo ylittää riskitason $\alpha = 0.05$, joten H_0 hyväksytään. Tarkastus ei antanut aihetta säädön korjaamiseen.

Kahden normaalijakauman erotus, varianssit tunnetaan

- Olkoot $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ja $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ja $(X_1, \ldots, X_m)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ riippumattomat satunnaisotokset muuttujista X, Y.
- Odotusarvojen vertailussa tarkastellaan erotusta $\mu_1 - \mu_2$, jonka estimaattori on keskiarvojen erotus

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n).$$

- Odotusarvojen erotuksen testaus tapahtuu testisuureella

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim Z.$$

  missä $\bar{x} = \sum x_i/m$, $\bar{y} = \sum y_j/n$ ja $\Delta\mu_0$ on se erotuksen $\mu_1 - \mu_2$ arvo, jolla p-arvo lasketaan (usein 0).

Esimerkki (Laininen): tasajakautunut X

- Laudan paksuuden säätöarvo on μ tuumaa. Sahauslaitteistossa esiintyvän väljyyden johdosta laudan paksuus X on tasajakautunut välille $\mu \pm 0.05$ tuumaa.
- Saadaan $\mathrm{E}(X) = \mu$ ja $\mathrm{D}^2(X) = (2 \cdot 0.05)^2/12 = 0.000833$. Säädön täytyisi olla 0.75 tuumaa. Testataan riskitasolla 0.05.
- Mitataan kymmenen laidan paksuus. Keskiarvomuuttuja $\overline{X}$ on likimain normaalinen, $\overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2_{\bar{x}})$, missä $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{0.000833/10} = 0.00913$.
- Havaitaan $\bar{x} = 0.770$ tuumaa. Testisuureen arvoksi tulee

$$z_0 = \frac{0.770 - 0.75}{0.00913} = 2.19.$$

- p-arvo on siis

$$Pr(|Z| \geq 2.19) = 0.029.$$

- p-arvo on alle 0.05, joten nollahypoteesi hylätään. Säätöarvo on pielessä.

Esimerkki: binomijakautunut X 1/2

- Tietoliikennelinjan vioista tietty osuus p johtuu ulkoisista häiriöistä. Oletetaan, että $p \leq 0.70$.
- Testataan riskitasolla 0.05

$$H_0 : p \leq 0.70, \qquad H_1 : p > 0.70.$$

- Vikojen lukumäärä $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ ja p:n estimaattori on $\hat{p} = X/n$.
- Estimaattori on asymptoottisesti normaalinen

$$\hat{p} \sim \mathrm{N}\Big(p, \frac{p(1-p)}{n}\Big),$$

joten hypoteesia voidaan testata testisuureella

$$z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \sim Z,$$

missä $p_0 = 0.70$.

Esimerkki: binomijakautunut X 2/2

- Saadaan $\hat{p} = 147/200 = 0.735$ ja

$$z_0 = \frac{0.735 - 0.70}{\sqrt{0.70 \cdot 0.30/200}} = 1.08.$$

- p-arvo on

$$Pr(Z \geq 1.08) = 0.140.$$

- Koska p-arvo on yli 0.05, hypoteesi H_0 hyväksytään.

Normaalijakauman odotusarvon testaus, varianssi tuntematon

- Olkoon $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ja $X_1, \ldots, X_n$ satunnaisotos X:stä. Otoksesta lasketaan odotusarvon ja varianssin harhattomat estimaattorit $\bar{x} = \sum x_i/n$ ja $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$
- Tällöin testisuureen arvo otoksessa noudattaa t-jakaumaa vapausasteilla $n - 1$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim T,$$

jos odotusarvo on $\mu = \mu_0$ ja $T \sim t(n-1)$.
- Keskihajonnan σ ollessa tuntematon ei voida käyttää normaalijakautunutta testisuuretta.
- Tilastollinen päättely testisuureesta tapahtuu samalla tavalla kuin z_0:n tapauksessa, ainoastaan p-arvo lasketaan eri jakaumalla.

Kahden keskiarvon erotuksen t-testi

- Tarkastellaan kahta riippumatonta satunnaismuuttujaa

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2), \qquad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2).$$

Muuttujilla siis on sama varianssi.
- Odotusarvojen vertaamiseksi estimoidaan μ_1, μ_2 ja tarkastellaan estimaattien erotusta.
- Otoksista saadaan estimaatit $\hat{\mu}_1 = \bar{x}_1$ ja $\hat{\mu}_2 = \bar{x}_2$ sekä kaksi varianssin σ estimaattia s_1^2, s_2^2.
- Erotusta $\mu_1 - \mu_2$ koskevia hypoteeseja voidaan testata testisuureella

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \Delta\mu_0}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim T, \qquad \nu = n_1 + n_2 - 2,$$

missä $\Delta\mu_0$ on nollahypoteesin mukainen arvo erotukselle $\mu_1 - \mu_2$, n_1, n_2 ovat otoskoot ja

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Esimerkki (Laininen) 1/2

- Tutkitaan, vaikuttaako langan värjäys vetolujuuteen (kg). Koe järjestetään ottamalla samasta lankarullasta 30 näytettä, joista 15 arvotaan värjättäväksi. Verrataan keskiarvoa värjätyistä ja värjäämättämistä langoista.
- Olkoon $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ värjäämättömien ja $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ värjättyjen lujuus.
- Oletetaan, että värjäys vaikuttaa jokaiseen näytteeseen siten, että lujuuden odotusarvo voi muuttua, varianssi ei.
- Hypoteesit ovat:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$$

- Koetulokset:

Värjäämätön:					Värjätty				
12.4	12.0	11.1	13.0	10.9	9.4	12.7	8.2	12.8	10.8
10.6	11.7	11.1	12.6	13.3	11.3	10.0	10.7	11.6	10.7
12.5	12.6	11.7	12.7	12.2	11.2	10.4	10.6	13.4	10.1

Esimerkki (Laininen) 2/2

- Tunnusluvut $\bar{x} = 12.027$, $s_x = 0.8154$, $\bar{y} = 10.927$, $s_y = 1.3430$,

$$s_p^2 = \frac{15 - 1) \cdot 0.8154^2 + (15 - 1) \cdot 1.3430^2}{15 + 15 - 2} = 1.2343.$$

- Testisuureen arvo

$$t_0 = \frac{12.027 - 10.927}{\sqrt{1.2343}\sqrt{1/15 + 1/15}} = 2.71.$$

- p-arvo on vastaavasti

$$Pr(|T| \geq 2.71) = 0.0113.$$

- Tavanomaisella riskitasolla 0.05 tulos joudutaan hylkäämään H_0. Tulos siis on, että värjäys vaikuttaa (heikentävästi) vetolujuuteen.