# Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

8. marraskuuta 2007







## Esimerkki (momenttimenetelmä)

- Tarkkaillaan peräkkäisten autojen aikaväliä (sekunteja) maantiellä. Oletetaan, että aikaväli $X$ on eksponenttijakautunut parametrina $\lambda$. Tällöin $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$.
- Tarkkailija havaitsi seuraavat aikavälin pituudet:
  18 4 7 33 28 5 6 14 9 18
  Havaintojen aritmeettinen keskiarvo on 142/10=14.2.
- Asetetaan odotusarvo ja aritmeettinen keskiarvo yhtäsuuriksi ja ratkaistaan $\lambda$: $1/\lambda = 14.2$, joten $\lambda = 0.0704$.
- Peräkkäisten autojen väliaikaa siis kuvaa parhaiten (y.o. aineiston perusteella) se eksponenttijakauma, jonka tiheysfunktio on

$$f_X(x) = 0.0704 \cdot e^{-0.0704x}.$$



## Esimerkki (suurimman uskottavuuden menetelmä)

- Sovitetaan edellisen esimerkin havaintoihin eksponenttijakauma $f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- Havaintoaikojen summa on 142.
- Likelihood-funktioksi tulee

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda 18} \lambda e^{-\lambda 4} \cdot \ldots \cdot \lambda e^{-\lambda 18} = \lambda^{10} e^{-142\lambda}.$$

- Asetetaan derivaatta nollaksi, jolloin saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(\lambda) = 10\lambda^9 e^{-142\lambda} - 142\lambda^{10} e^{-142\lambda} = 0.$$

- Derivaatta on nolla arvolla $\lambda = 10/142 = 0.0704$. Päädyttiin samaan ratkaisuun kuin momenttimenetelmällä.



## Tilastollinen testaus

- *Tilastollisessa testauksessa* tutkitaan tutkimuskohteita koskevien oletusten tai väitteiden paikkansapitävyyttä havaintojen avulla.
- Testattavat oletukset tai väitteet tulee muotoilla tutkimuskohteiden tutkittavaa ominaisuutta kuvaavaa jakaumaa tai sen parametreja koskeviksi *hypoteeseiksi*.
- Testausasetelma kiinnitetään tekemällä seuraavat kolme oletusta:
  (i) Testausasetelmaa koskevia yleisiä oletuksia kutsutaan testin *yleiseksi hypoteesiksi*.
  (ii) Testattavaa väitettä tai oletusta kutsutaan testin *nollahypoteesiksi*.
  (iii) Jos nollahypoteesi hylätään testissä, astuu voimaan *vaihtoehtoinen hypoteesi*.



## Yleinen hypoteesi

- *Yleinen hypoteesi $H$* sisältää oletukset
  - perusjoukosta
  - käytetystä otantamenetelmästä
  - perusjoukon jakaumasta
- Yleisen hypoteesin oletuksista pidetään kiinni koko testauksen ajan.
- Yleisen hypoteesin sisältämiä jakaumaoletuksia voidaan ja on yleensä syytä testata erikseen.



## Nollahypoteesi

- Testattavaa perusjoukon jakauman parametreja koskevaa väitettä tai oletusta kutsutaan *nollahypoteesiksi* ja merkitään $H_0$.
- Nollahypoteesi $H_0$ hyväksytään, elleivät havaintojen sisältämät todisteet nollahypoteesia vastaan ole kyllin voimakkaita.
- Yksinkertaisissa testausasetelmissa nollahypoteesi on muotoa

$$H_0 : \theta = \theta_0$$



## Vaihtoehtoinen hypoteesi

- *Vaihtoehtoinen hypoteesi $H_1$* on oletus, joka astuu voimaan, jos nollahypoteesi $H_0$ hylätään.
- Vaihtoehtoista hypoteesia, joka on muotoa

$$H_1 : \theta > \theta_0 \text{ tai muotoa } H_1 : \theta < \theta_0$$

  kutsutaan *yksisuuntaiseksi*.
- Muotoa

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

  olevaa vaihtoehtoista hypoteesia kutsutaan *kaksisuuntaiseksi*.

## Testisuure

- Tilastollinen testi perustuu *testisuureeseen*, joka mittaa havaintojen ja nollahypoteesin $H_0$ yhteensopivuutta.
- Testisuure on satunnaismuuttuja, jonka arvo riippuu havainnoista ja nollahypoteesista $H_0$.
- Havaintojen ja nollahypoteesin $H_0$ yhteensopivuuden mittaaminen tarkoittaa sitä, että tutkitaan kuinka todennäköistä on saada sellaisia testisuureen arvoja kuin on saatu, ehdolla että $H_0$ pätee.
- Yhteensopivuuden mittaaminen vaatii siis *testisuureen jakauman* tuntemista.



## Testisuureen normaaliarvo

- Testisuureen odotusarvoa nollahypoteesin $H_0$ pätiessä kutsutaan testisuureen *normaaliarvoksi*.
- Jos testisuureen havaittu arvo on lähellä normaaliarvoa, havainnot ovat sopusoinnussa nollahypoteesin $H_0$ kanssa.
- Jos testisuureen havaittu arvo poikkeaa merkitsevästi normaaliarvosta, havainnot sisältävät todisteita nollahypoteesia $H_0$ vastaan.



## Virheet testauksessa

- Jos nollahypoteesi $H_0$ hylätään silloin kun se on tosi, tehdään *hylkäysvirhe*.
- Hylkäysvirheen todennäköisyys $\alpha$ on muotoa

$$Pr(H_0 \text{ hylätään} | H_0 \text{ on tosi}) = \alpha$$

- Jos nollahypoteesi $H_0$ jätetään voimaan silloin kun se ei ole tosi, tehdään *hyväksymisvirhe*.
- Hyväksymisvirheen todennäköisyys $\beta$ on muotoa

$$Pr(H_0 \text{ jätetään voimaan} | H_0 \text{ ei ole tosi}) = \beta$$

- Hylkäysvirhettä kutsutaan usein *ensimmäisen lajin virheeksi*. Tällöin hyväksymisvirhettä kutsutaan *toisen lajin virheeksi*.



## Testin tulos ja maailman tilat

Maailman tilat ja testin tulos voidaan ryhmitellä seuraavaksi nelikentäksi:

| | | **Maailman tila** | |
|---|---|---|---|
| | | Nollahypoteesi pätee | Nollahypoteesi ei päde |
| **Testin tulos** | Nollahypoteesi jää voimaan | **Oikea johtopäätös** | Hyväksymisvirhe |
| | Nollahypoteesi hylätään | Hylkäysvirhe | **Oikea johtopäätös** |



## Hylkäys- ja hyväksymisalueet

- Jaetaan testisuureen saamien mahdollisten arvojen joukko kahteen osaan:
  - (i) Jos testisuureen havainnoista laskettu arvo joutuu *hylkäysalueelle*, niin nollahypoteesi $H_0$ hylätään.
  - (ii) Jos testisuureen havainnoista laskettu arvo joutuu *hyväksymisalueelle*, niin nollahypoteesi $H_0$ hyväksytään.
- Jos testisuureen havaittu arvo joutuu nollahypoteesin $H_0$ pätiessä hylkäysalueelle, niin seuraksena on hylkäysvirhe. Tämän todennäköisyys on $\alpha$.



## Merkitsevyystaso

- Testin *merkitsevyystaso* $\alpha$ on todennäköisyys sille, että testisuureen havainnoista laskettu arvo on hylkäysalueella, vaikka nollahypoteesi $H_0$ pätee.
- Merkitsevyystaso $\alpha$ on siis hylkäysvirheen todennäköisyys.
- *Tavanomaiset merkitsevyystasot* ovat

$$\alpha = 0.05$$
$$\alpha = 0.01$$
$$\alpha = 0.001$$

(i) Jos nollahypoteesti voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.05$, sanotaan, että testin tulos on *melkein merkitsevä*.
(ii) Jos nollahypoteesti voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.01$, sanotaan, että testin tulos on *merkitsevä*.
(iii) Vastaavasti, jos nollahypoteesti voidaan hylätä merkitsevyystasolla $\alpha = 0.001$, sanotaan, että testin tulos on *erittäin merkitsevä*.



## Hylkäysalueen määrääminen yksisuuntaisessa testissä

- Olkoon parametria $\theta$ koskeva nollahypoteesi muotoa $H_0 : \theta = \theta_0$.
- olkoon testisuureena satunnaismuuttuja $Z$, jonka mahdolliset arvot ovat välillä $(a, b)$.
- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \theta > \theta_0$, on hylkäysalue (yleensä) väli $(u, b)$, jossa *kriittinen raja* $u$ määrätään siten, että

$$Pr(Z \geq u \,|\, H_0) = \alpha$$

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \theta < \theta_0$, on hylkäysalue (yleensä) väli $(a, l)$, jossa *kriittinen raja* $l$ määrätään siten, että

$$Pr(Z \leq l \,|\, H_0) = \alpha$$



## Hylkäysalueen määrääminen kaksisuuntaisessa testissä

- Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa $H_1 : \theta \neq \theta_0$, on hylkäysalue (yleensä) joukko $(a, l) \cup (u, b)$, jossa *kriittiset rajat* $l$ ja $u$ määrätään siten, että

$$Pr(Z \geq u \,|\, H_0) = Pr(Z \leq l \,|\, H_0) = \alpha/2$$

- **Huom.** Jos testisuureen $Z$ jakauma on symmetrinen origon suhteen, pätee kriittisille rajoille

$$l = -u$$

## Tilastollisen testin suorittamisen vaiheet

Hylkäysalueen määrääminen yksisuuntaisessa testissä

- Tilastollisen testin suorittaminen sisältää seuraavat vaiheet:
  (1) Asetetaan testin *hypoteesit*.
  (2) Valitaan *testisuure*.
  (3) Valitaan *merkitsevyystaso* $\alpha$ ja muodostetaan sitä vastaava *hylkäysalue*.
  (4) Poimitaan *otos* niin, että yleisen hypoteesin oletukset pitävät.
  (5) Lasketaan *testisuureen arvo* havainnoista.
  (6) Tehdään *päätös* nollahypoteesin hylkäämisestä.



## $p$-arvo

- Nollahypoteesin $H_0$ hyväksyminen tai hylkääminen voidaan perustaa etukäteen valitun merkitsevyystason ja sitä vastaavan hylkäysalueen sijasta testin *p-arvoon*.
- Testin $p$-arvo on pienin merkitsevyystaso, jolla nollahypoteesi hylätään.
- Testin $p$-arvo määritetään:
  (i) Lasketaan testisuureen arvo havainnoista.
  (ii) Määrätään (olettaen, että $H_0$ pätee) todennäköisyys sille, että testisuure saa (normaaliarvoon verrattuna) niin poikkeuksellisen arvon kuin se on saanut tai vielä poikkeuksellisempia arvoja.
- Nollahypoteesi hylätään, jos $p$-arvo on kyllin pieni.