Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

10. lokakuuta 2007

Esimerkki (Tuominen) 1/2

- Katkaistaan jana ympimähkään kahdesta kohdasta toisitaan riippumatta. Millä todennäköisyydellä janasta voidaan muodostaa kolmio?
- Oletusten nojalla

$$X \perp\!\!\!\perp Y, \qquad X \sim \mathrm{Tas}(0,1),\ Y \sim \mathrm{Tas}(0,1).$$

- Parin (X, Y) jakauma on siten tasainen yksikköneliössä

$$A(x,y) = \{(x,y) \,|\, 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 1\}.$$

- Koska tilanne on symmetrinen, voidaan tarkastella tapausta $X < Y$.
- Tällöin kolmion sivut ovat X, $Y - X$ ja $1 - Y$.

Esimerkki (Tuominen) 2/2

- Kolmio syntyy täsmälleen silloin, kun kahden palasen pituuksien summa on suurempi kuin kolmannen pituus. Siis

$$X < 1/2,\ \ Y > 1/2 \text{ ja } Y < X + 1/2.$$

- Vastaavasti tapaus $Y \geq X$ saadaan symmetrisesti. Merkitään suotuisten tapausten joukkoa B:llä.
- Siis

$$Pr((X,Y) \in B) = \frac{m(A \cap B)}{m(A)} = \frac{1}{4},$$

missä $m(\cdot)$ tarkoittaa ko. joukon pinta-alaa.

Reunajakaumien varianssit

- Olkoon (X, Y) satunnaismuuttujapari, jonka yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktiota merkitään $f_{XY}(x,y)$
- Diskreetissä tapauksessa:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2,$$
$$\text{missä } \mathrm{E}(X^2) = \sum_x x^2 f_X(x)$$

- Jatkuvassa tapauksessa:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2,$$
$$\text{missä } \mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

Kovarianssi

- Kovarianssi kuvaa kahden satunnaismuuttujan yhteisvaihtelua niiden yhteisjakauman painopisteen (μ_X, μ_Y) ympärillä.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = \mathrm{E}\big((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

- Laskukaavat diskreeteille ja jatkuville jakaumille:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x,y)$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$

- $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$ ja $\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(Y)$.

Esimerkki (Tuominen) 1/2

- Olkoon satunnaismuuttujaparilla (X, Y) tiheysfunktiona

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{kun } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < x\}.$$

- Tällöin

$$f_X(x) = \int_0^x 8xy\, dy = 4x^3,\ \text{kun } x \in (0,1),$$
$$f_Y(y) = \int_y^1 8xy\, dx = 4y(1 - y^2),\ \text{kun } y \in (0,1).$$

- Huomaa, että tässä tapauksessa X ja Y eivät ole riippumattomia, koska

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y).$$

Esimerkki (Tuominen) 2/2

- Reunatiheysfunktioiden avulla saadaan

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 4x^3\, dx = \frac{4}{5},$$
$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot 4y(1 - y^2)\, dy = \frac{8}{15}.$$

- Valitsemalla $g(X,Y) = XY$ voidaan laskea

$$\mathrm{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^x xy \cdot 8xy\, dx\, dy = \int_0^1 8x^2 \Big(\int_0^x y^2\, dy \Big)\, dx$$
$$= \int_0^1 8x^2 \cdot \frac{x^3}{3}\, dx = \frac{4}{9}.$$

- Tästä saadaan X:n ja Y:n kovarianssi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{4}{225}.$$

Kovarianssiin liittyviä laskukaavoja

- Summan ja erotuksen varianssi yleisessä tapauksessa

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_{XY}$$

- Olkoot (vakiot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$W = a + bX \qquad Z = c + dY$$

Tällöin

$$\mathrm{Cov}(W, Z) = bd\mathrm{Cov}(X, Y) = bd\sigma_{XY}$$

- Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, mutta käänteinen ei aina päde.

Korrelaatiokerroin

- Korrelaatiokerroin kuvaa kahden satunnaismuuttujan **lineaarisen** riippuvuuden voimakkuutta.

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{D}(X)\mathrm{D}(Y)} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Korrelaatiokertoimen ominaisuudet:
  1. $-1 \le \mathrm{Cor}(X, Y) \le 1$
  2. Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$, mutta käänteinen ei aina päde.
  3. $\mathrm{Cor}(X, Y) = \pm 1$ jos ja vain jos $Y = \alpha + \beta X$, missä vakiot $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\beta \neq 0$

Huomautus

- Korrelaatiokerroin voi olla 0 vaikka X:n ja Y:n välillä vallitsisi funktionaalinen riippuvuus.
- Jos esimerkiksi

$$X \sim N(0, 1), \qquad Y = X^2,$$

niin $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X^3) = 0$, koska funktio $f(x) = x^3$ on symmetrinen origon suhteen.

- Siten myös $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$.

Ehdollinen jakauma

- Satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma satunnaismuuttujan Y suhteen eli ehdolla Y on

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad \text{jos } f_Y(y) > 0$$

- Kahdella riippumattomalle satunnaismuuttujalla on seuraava ominaisuus

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x), \quad \text{jos } f_Y(y) > 0$$

Ehdollinen odotusarvo

- Ehdollinen odotusarvo satunnaismuuttujalle X satunnaismuuttujan Y suhteen on diskreetissä tapauksessa

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \sum_x x f_{X|Y}(x|y)$$

ja jatkuvassa tapauksessa

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

- Määritellään funktio $u\colon S_y \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$u(y) = \mathrm{E}(X|Y = y), \text{ kun } y \in S_y.$$

- Satunnaismuuttujaa u kutsutaan X:n odotusarvoksi ehdolla Y ja merkitään $\mathrm{E}(X|Y)$.

Esimerkki (Niemi; Leon-Garcia) 1/2

- Oletetaan, että palvelupisteeseen saapuvien asiakkaiden määrä X aikavälillä $[0, t]$ on Poisson-jakautunut: $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 t)$.
- Oletetaan lisäksi, että asiakkaan palveluaika T on eksponenttijakautunut: $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$.
- Olkoon Y palvelupisteeseen saapuvien uusien asiakkaiden lukumäärä edellisen asiakkaan palvelun kestäessä. Oletetaan, että uusien asiakkaiden saapuminen ei riipu palveluajasta.
- Saadaan

$$\begin{aligned} Pr(Y = k) &= \int_0^\infty Pr(Y = k|T = t)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\, dt = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_2 k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt. \end{aligned}$$

Esimerkki 2/2

- Sijoittamalla $r = (\lambda_1 + \lambda)t$ saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\, dt &= \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} \int_0^\infty r^k e^{-r}\, dr \\ &= \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} \Gamma(k+1). \end{aligned}$$

- Kun muistetaan, että $\Gamma(k+1) = k!$, saadaan edelleen

$$\frac{\lambda_1^k \lambda_2}{k!(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}} \Gamma(k+1) = \frac{\lambda_1^k \lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^{k+1}}.$$

- Satunnaismuuttuja Y on siis geometrisesti jakautunut.

Esimerkki (Tuominen) 1/2

- Olkoot $U \perp\!\!\!\perp V$ ja $U, V \sim \mathrm{Tas}(0, 1)$. Määritellään

$$X = \max\{U, V\}, \qquad Y = \min\{U, V\}.$$

- Parille (X, Y) voidaan johtaa tiheysfunktio

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{kun } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < 1 \text{ ja } 0 < y < x\}.$$

- Reunatiheysfunktioiksi saadaan tässä tapauksessa

$$f_X(x) = 2x, \qquad x \in (0, 1),$$

$$f_Y(y) = 2(1 - y), \qquad y = (0, 1).$$

Esimerkki (Tuominen) 2/2

- Ehdolliset tiheysfunktiot ovat siten

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{1-y}, \qquad x \in (y,1),$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}, \qquad y \in (0,x),$$

kun $x \in (0,1)$ ja $y \in (0,1)$.

- Kyseiset jakaumat ovat tasaisia.
- Ehdolliset odotusarvot ovat

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = \frac{y+1}{2}, \qquad \mathrm{E}(Y|X=x) = \frac{x}{2}.$$

Moniulotteisia jakaumia

- Multinomijakauma (esimerkkinä kolmiulotteinen):

$$(X_1, X_2, X_3) \sim \mathrm{Multinom}(p_1, p_2, p_3, n)$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \binom{n}{x_1\ x_2\ x_3} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3}$$

- Kaksiulotteinen normaalijakauma

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} e^{-\frac{Q(x,y)}{2(1-\rho_{XY}^2)}}$$

$$\text{jossa } Q(x,y) = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho_{XY}\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}$$