

# Sovellettu todennäköyslaskenta B

Antti Rasila

4. lokakuuta 2007

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

1 / 17

## 1 Moniulotteiset todennäköisyysjakaumat

- Johdanto
- Kaksiulotteiset satunnaismuuttujat
- Kaksiulotteisen diskreetin jakauman pistetodennäköisyysfunktio
- Kaksiulotteisen jatkuvan jakauman tiheysfunktio
- Kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktio
- Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat

## 2 Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Kaksiulotteisen jakauman yleinen odotusarvo
- Reunajakaumien odotusarvot

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

2 / 17

## Johdanto

- Yksi satunnaismuuttuja ei riitä kuvaamaan kaikkia satunnaisilmiöitä.
- Jos ilmiöön liittyy useita satunnaisia tekijöitä, ovat näiden tekijöiden väliset riippuvuudet tilastollisen mallintamisen kannalta erityisen mielenkiintoisia.
- Näiden riippuvuuksien mallintaminen tapahtuu yhteisjakauman avulla.
- **Esimerkki 1:** Kahden nopan heiton yhteisjakauma.
- **Esimerkki 2:** Miten tupakoinnin määrä (1) ja kesto (2) vaikuttavat keuhkosyöpään (3).

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

3 / 17

## Kaksiulotteiset satunnaismuuttujat

- Olkoot  $X$  ja  $Y$  satunnaismuuttujia, joiden otosavaruudet ovat  $R$  ja  $S$ .
- Toisin sanoen:

$$X: R \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Y: S \rightarrow \mathbb{R}$$

- Olkoon  $R \times S$  otosavaruuksien  $R$  ja  $S$  karteesinen tulo:

$$R \times S = \{(r, s) \mid r \in R, s \in S\}$$

- Satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  järjestetty pari  $(X, Y)$  määrittelee kaksiulotteisen satunnaismuuttujan:

$$(X, Y): R \times S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

4 / 17

## Kaksiulotteisen diskreetin jakauman pistetodennäköisyysfunktio

- Reaaliarvoinen funktio

$$f_{XY}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

määrittelee diskreettien satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteisjakauman pistetodennäköisyysfunktion, jos

- $f_{XY}(x, y) \geq 0$  kaikilla  $x, y$ ,
  - $\sum_x \sum_y f_{XY}(x, y) = 1$ ,
  - $\Pr(X = x \cap Y = y) = f_{XY}(x, y)$ .
- Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^2$  jokin tapahtuma. Tällöin

$$\Pr((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} f_{XY}(x, y)$$

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

5 / 17

## Esimerkki

- Heitetään (virheetöntä) kolikkoa kolme kertaa. Olkoon  $X$  saatujen kruunien kokonaismäärä ja  $Y$  kahdessa ensimmäisessä heitossa saatujen klaavojen määrä.
- Nyt  $X$  saa jonkin arvoista 0, 1, 2, 3 ja  $Y$  jonkin arvoista 0, 1, 2.
- Karteesinen tulo  $S_{XY} = S_X \times S_Y$  on joukko

$$S_{XY} = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (3, 1), (3, 2)\}.$$

- Joukon  $S_{XY}$  pistetodennäköisyydet voidaan helposti laskea, ja ne on käytännöllistä esittää kaksiulotteisena taulukkona.

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

6 / 17

## Kaksiulotteisen jatkuvan jakauman tiheysfunktio

- Reaaliarvoinen jatkuva funktio

$$f_{XY}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

määrittelee jatkuvien satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteisjakauman tiheysfunktion, jos

- $f_{XY}(x, y) \geq 0$  kaikilla  $x, y$ ,

•

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = 1,$$

•

$$\Pr(a \leq X \leq b \cap c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dy dx$$

- Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^2$  jokin tapahtuma. Tällöin

$$\Pr((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{XY}(x, y) dy dx$$

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

7 / 17

## Kaksiulotteisten jakaumien kertymäfunktio

- Satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteisjakauman kertymäfunktio  $F_{XY}$  määritellään seuraavasti:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(X \leq x \cap Y \leq y)$$

- Diskreetille jaksomalle:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(X \leq x \cap Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f_{XY}(x_i, y_i)$$

- Jatkuvalle jaksomalle:

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) dv du$$

Antti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

8 / 17

## Kaksiulotteisten jakaumien reunajakaumat

- Yksittäisten satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  jakaumia sanotaan yhteisjakauman *reunajakaumiksi*.
- Diskreetissä tapauksessa satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumien pistetodennäköisyysfunktiot saadaan seuraavasti:

$$f_X(x) = \Pr(X = x) = \sum_y f_{XY}(x, y)$$

$$f_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_x f_{XY}(x, y)$$

- Vastaavasti jatkuvassa tapauksessa satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  reunajakaumien tiheysfunktiot saadaan seuraavasti:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

9 / 17

## Satunnaismuuttujien riippumattomuus, johdanto

- Olkoot satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  kertymäfunktiot  $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$  ja  $F_Y(y) = \Pr(Y \leq y)$ .

- Merkitään  $A = \{X \leq x\}$  ja  $B = \{Y \leq y\}$ .

- Nyt  $F_X(x) = \Pr(A)$  ja  $F_Y(y) = \Pr(B)$ , sekä

$$A \cap B = \{s \in S \mid X(s) \leq x \wedge Y(s) \leq y\}.$$

- Siten  $F_{XY}(x, y) = \Pr(A \cap B)$ . Tapahtumat  $A$  ja  $B$  ovat riippumattomia, jos  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ .

- Tällöin

$$F_{XY}(x, y) = \Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = F_X(x)F_Y(y).$$

- **Määritelmä:** Satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

10 / 17

## Satunnaismuuttujien riippumattomuus (yleisesti)

- Kaksi satunnaismuuttujaa ovat riippumattomia, jos ja vain jos seuraavat yhtäpitävät ehdot toteutuvat:

- 1  $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- 2  $F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

- Tässä  $F_X(x)$  ja  $F_Y(y)$  ovat reunajakaumien kertymäfunktiot ja  $f_X, f_Y$  vastaavasti tiheysfunktiot.

- Yleisesti satunnaismuuttujille  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , joiden yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ja reunajakaumien pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio ovat  $f_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (sekä vastaavat kertymäfunktiot merkittynä  $F_i$ :llä):

- 1  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$
- 2  $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

11 / 17

## Esimerkki (Laininen) 1/2

- Pyöreä tappi ja reikä tehdään koneellisesti toisistaan riippumatta. Tappin halkaisija  $X$  on tasaisesti jakautunut välille (20, 21) millimetriä ja reiän halkaisija  $Y$  välille (20.5, 22) mm. Lasketaan todennäköisyys, että tappi ei mahdu reikään.

- Tiheysfunktiot ovat:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 20 < x < 21, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/1.5, & \text{kun } 20.5 < y < 22, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

- Satunnaismuuttujat  $X$  ja  $Y$  ovat riippumattomia, joten

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = 1/1.5, \text{ kun } 20 < x < 21 \text{ ja } 20.5 < y < 22.$$

Muulla tiheysfunktio on nolla.

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

12 / 17

## Esimerkki (Laininen) 2/2

- Tappi ei mahdu reikään, jos  $X > Y$ .
- Saadaan

$$\begin{aligned} \Pr(X > Y) &= \int_{20.5}^{21} \int_{20.5}^x f_{XY}(x, y) dy dx \\ &= \int_{20.5}^{21} \int_{20.5}^x \frac{1}{1.5} dy dx \\ &= \frac{2}{3} \int_{20.5}^{21} (x - 20.5) dx = 0.083. \end{aligned}$$

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

13 / 17

## Esimerkki (Niemi) 1/2

- Olkoon  $f_{XY}(x, y) = |xy|e^{-x^2-y^2}$ .
- Funktio toteuttaa tiheysfunktiolta vaadittavat ehdot (1) ja (2), joten voidaan ajatella, että se on joidenkin jatkuvien satunnaismuuttujien  $X, Y$  yhteisjakauman tiheysfunktio.
- Reunajakaumat ovat

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |xy|e^{-x^2-y^2} dy = |x|e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} |y|e^{-y^2} dy \\ &= -|x|e^{-x^2} \int_{-\infty}^0 ye^{-y^2} dy + |x|e^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2}|x|e^{-x^2} + \frac{1}{2}|x|e^{-x^2} = |x|e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

14 / 17

## Esimerkki (Niemi) 2/2

- Vastaavasti saadaan  $f_Y(y) = |y|e^{-y^2}$ .
- Koska

$$f_{XY}(x, y) = |xy|e^{-x^2-y^2} = |x|e^{-x^2}|y|e^{-y^2} = f_X(x)f_Y(y),$$

satunnaismuuttujat  $X, Y$  ovat riippumattomia.

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

15 / 17

## Kaksiulotteisen jakauman yleinen odotusarvo

- Olkoon  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio.
- Tällöin diskreetissä tapauksessa:

$$E(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y)f_{XY}(x, y)$$

- Vastaavasti jatkuvassa tapauksessa:

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f_{XY}(x, y) dy dx$$

Annti Rasila ()

TodB

4. lokakuuta 2007

16 / 17

- Diskreetissä tapauksessa:

$$E(X) = \sum_x \sum_y x f_{XY}(x, y) = \sum_x x \sum_y f_{XY}(x, y) = \sum_x x f_X(x)$$

$$E(Y) = \sum_x \sum_y y f_{XY}(x, y) = \sum_y y \sum_x f_{XY}(x, y) = \sum_y y f_Y(y)$$

- Vastaavasti jatkuvassa tapauksessa:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \end{aligned}$$