

Sovellettu todennäköisyytlaskenta B

Antti Rasila

27. syyskuuta 2007

1 Diskreetit jakaumat

- Diskreetti tasainen jakauma
- Bernoulli-jakauma
- Binomijakauma
- Geometrisen jakauma
- Hypergeometrisen jakauma

Diskreetti tasainen jakauma

- Diskreetti tasainen jakauma kuvaa satunnaismuuttujaa, johon liittyvän otosvaruuden alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.
- Esimerkki tällaisesta tilanteesta on virheettömän rahan tai nopan heitto.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- Odotusarvo:

$$E(X) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

- Varianssi:

$$D^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

Bernoulli-jakauma

- Merkitään $X \sim \text{Bernoulli}(p)$
- Jakauma kuvaa yksittäistä tapahtuman A Bernoulli-koetta, jolla on vain kaksi vaihtoehtoista lopputulosta: A tapahtuu tai A ei tapahdu.
- A :n tapahtumisen todennäköisyys on $p > 0$.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1$$

- Odotusarvo:

$$E(X) = p$$

- Varianssi:

$$D^2(X) = pq$$

Esimerkki

- Epäsymmetrisen kolikko antaa heitettäessä kruunan todennäköisyydellä 0.6.
- Olkoon satunnaismuuttuja X "kruunien määrä yhdessä heitossa". Kuinka X jakautuu?
- Satunnaismuuttuja X noudattaa Bernoulli-jakaumaa parametrilla $p = 0.6$.
- Saadaan myös odotusarvo $E(X) = 0.6$ ja varianssi $D^2(X) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$.

Binomijakauma

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Kun Bernoulli-koetta toistetaan n kertaa, missä n on etukäteen päätetty, tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä X noudattaa Binomijakaumaa parametreinaan n ja p .
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

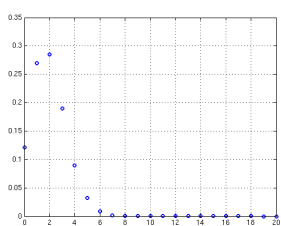
- Odotusarvo:

$$E(X) = np$$

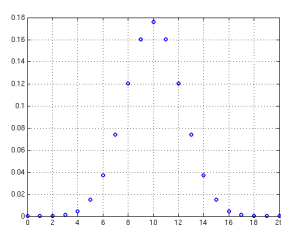
- Varianssi:

$$D^2(X) = npq$$

Binomijakauma



Bin(20, 0.1)



Bin(20, 0.5)

Esimerkki

- Erään valmistajan tuotteista 2% on viallisia. Asiakas ostaa tuotannosta 5 umpimähkään valittua tuotetta.
- Asiakkaan saamien viallisten tuotteiden lukumäärä on satunnaismuuttuja X . Kuinka X jakautuu?
- Kyseessä on toistokoe, 5 toistoa, ja kussakin toistossa tapahtuman "viallinen tuote" todennäköisyys on 0.02.
- Satunnaismuuttuja X noudattaa siis binomijakaumaa parametrein $n = 5$ ja $p = 0.02$.
- Odotusarvo $E(X) = 5 \cdot 0.02 = 0.10$. Asiakas saa siis keskimäärin 0.10 viallista tuotetta.

Esimerkki (Milton-Arnold) 1/2

- Tutkimukset lennonjohtajien työskentelystä osoittavat, että keskittymistä on vaikea ylläpitää, kun työskennellään pitkiä aikoja ruudulla näkyvän datan parissa.
- Tutkimuksen yllättävä tulos on, että tutkasignaalin havaitseminen muuttuu vaikeammaksi, jos havaittavia signaaleja on vähän.
- Signaalin havaitsemisen todennäköisyys on 0.9, jos keskimäärin 30 minuutin aikana signaaleja on 100. Todennäköisyys on vain 0.5, jos signaaleja on 10.
- Tuloksen arvellaan johtuvan siitä, että ajatukset lähtevät harhailemaan tilanteessa, joka ei pakota keskittymään.

Esimerkki (Milton-Arnold) 2/2

- Olkoon X oikein havaittujen signaalien lukumäärä 30 minuutin testijakson aikana. Testijaksossa esiintyy 10 signaalia. Miten X on jakautunut?
- Koe koostuu kymmenestä riippumattomasta Bernoullin kokeesta, jossa positiivinen tulos on signaalin havaitseminen. Onnistumisen todennäköisyys on 0.5.
- Koska X on onnistumisten lukumäärä, X on binomijakautunut. Parametrit ovat $n = 10$ ja $p = 0.5$.
- Pistetodennäköisyysfunktioksi saadaan siis

$$f(x) = \binom{10}{x} (1/2)^x (1/2)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, 10.$$

Geometrinen jakauma

- $X \sim \text{Geom}(p)$
- Kun Bernoulli-koetta toistetaan, kunnes tapahtuma A esiintyy ensimmäisen kerran, koetoistojen lukumäärä X noudattaa *Geometrista jakaumaa* parametrinaan p . Esimerkiksi heitetään rahaa kunnes saadaan klaava.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \Pr(X = x) = q^{x-1} p, \quad q = 1 - p, \quad x = 1, 2, \dots$$

- Odotusarvo:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Varianssi:

$$D^2(X) = \frac{q}{p^2}$$

Esimerkki

- Erään valmistajan tuotteista 2% on viallisia. Tuotteista valitaan umpimähkään tarkastettavaksi yksi kerrallaan niin monta kappaletta, kunnes saadaan ensimmäinen viallinen.
- Satunnaismuuttuja X on tarkastettujen tuotteiden lukumäärä. Kuinka X jakautuu?
- Tässä toistetaan koetta "saadaan viallinen tuote", jonka todennäköisyys on 0.02. Satunnaismuuttuja X on ensimmäiseen esiintymiseen tarvittavien toistojen lukumäärä.
- Satunnaismuuttuja X noudattaa siis geometrista jakaumaa parametrina $p = 0.02$.
- Odotusarvo $E(X) = 1/0.02 = 50.0$. Viallisen tuotteen löytämiseksi tarvitaan siis keskimäärin 50 toistoa.

Esimerkki

- Tuulivoimalla on rakennettu sellaiselle tuulen nopeudelle, joka esiintyy keskimäärin 50 vuoden välein.
- Tarkastellaan aikaa diskreettinä satunnaismuuttujana (yksikkö on vuosi). Voimalla rikkoutuu rakentamisen jälkeen vuonna X , $S = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kuinka X jakautuu?
- Oletetaan, että voimalan rakenteissa ei tapahdu väsymistä ja tuulen nopeudet vuosittain ovat riippumattomia tapahtumia.
- Tällöin X noudattaa geometrista jakaumaa odotusarvona $E(X) = 50$. Parametrin p arvo on siis $p = 1/50$.

Hypergeometrinen jakauma

- $X \sim \text{HyperGeom}(N, r, n)$
- Jakauma kuvaa ilmiötä, jossa perusjoukosta (koko N) poimitaan otos (kooltaan n). Tarkastellaan tässä otoksessa esiintyvien halutunlaisten alkioiden lukumäärää, kun niitä on perusjoukossa r kpl.
- Esimerkiksi rengastettujen lintujen osuus kaikista pyydystetyistä linnuista.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- Odotusarvo:

$$E(X) = \frac{nr}{N}$$

- Varianssi:

$$D^2(X) = \frac{nr}{N} \frac{N-r}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

Esimerkki (Laininen)

- Leipuri leipoo aamulla 40 munkkia ja sekoittaa niiden joukkoon 10 edellisenä päivänä myymättä jäänyttä munkkia.
- Ensimmäinen asiakas ostaa viisi satunnaisesti valittua munkkia.
- Asiakkaan saamien edellisenä päivänä myymättä jääneiden munkkien lukumäärä on X . Kuinka X jakautuu?
- Satunnaismuuttuja X noudattaa hypergeometrista jakaumaa parametrein perusjoukon koko $N = 50$, otoskoko $n = 5$ ja edellispäiväisten munkkien määrä $r = 10$.
- On odotettavissa, että asiakas saa $E(X) = 1$ kpl edellisenä päivänä myymättä jääneitä munkkeja.