Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

27. syyskuuta 2007

1. Diskreetit jakaumat
   - Diskreetti tasainen jakauma
   - Bernoulli-jakauma
   - Binomijakauma
   - Geometrinen jakauma
   - Hypergeometrinen jakauma

Diskreetti tasainen jakauma

- Diskreetti tasainen jakauma kuvaa satunnaismuuttujaa, johon liittyvän otosavaruuden alkeistapahtumat ovat symmetrisiä.
- Esimerkki tällaisesta tilanteesta on virheettömän rahan tai nopan heitto.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

- Odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

- Varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$$

Bernoulli-jakauma

- Merkitään $X \sim \mathrm{Bernoulli(p)}$
- Jakauma kuvaa yksittäistä tapahtuman A *Bernoulli-koetta*, jolla on vain kaksi vaihtoehtoista lopputulosta: A tapahtuu tai A ei tapahdu.
- A:n tapahtumisen todennäköisyys on $p > 0$.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = p^x q^{1-x}, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1$$

- Odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X) = p$$

- Varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = pq$$

Esimerkki

- Epäsymmetrinen kolikko antaa heitettäessä kruunan todennäköisyydellä 0.6.
- Olkoon satunnaismuuttuja X "kruunien määrä yhdessä heitossa". Kuinka X jakautuu?
- Satunnaismuuttuja X noudattaa Bernoulli-jakaumaa parametrilla $p = 0.6$.
- Saadaan myös odotusarvo $\mathrm{E}(X) = 0.6$ ja varianssi $\mathrm{D}^2(X) = 0.6 \cdot 0.4 = 0.24$.

Binomijakauma

- $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- Kun Bernoulli-koetta toistetaan n kertaa, missä n on etukäteen päätetty, tapahtuman A esiintymiskertojen lukumäärä X noudattaa *Binomijakaumaa* parametreinaan n ja p.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad q = 1 - p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

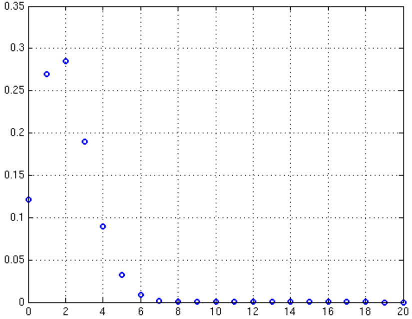
- Odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X) = np$$

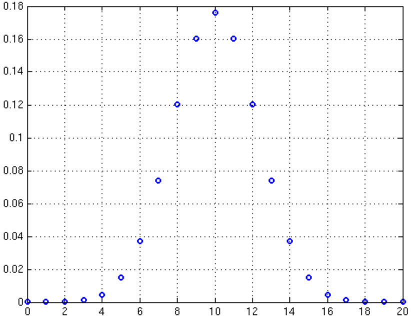
- Varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = npq$$

Binomijakauma



$\mathrm{Bin}(20, 0.1)$



$\mathrm{Bin}(20, 0.5)$

Esimerkki

- Erään valmistajan tuotteista 2% on viallisia. Asiakas ostaa tuotannosta 5 umpimähkään valittua tuotetta.
- Asiakkaan saamien viallisten tuotteiden lukumäärä on satunnaismuuttuja X. Kuinka X jakautuu?
- Kyseessä on toistokoe, 5 toistoa, ja kussakin toistossa tapahtuman ”viallinen tuote” todennäköisyys on 0.02.
- Satunnaismuuttuja X noudattaa siis binomijakaumaa parametrein $n = 5$ ja $p = 0.02$.
- Odotusarvo $\mathrm{E}(X) = 5 \cdot 0.02 = 0.10$. Asiakas saa siis keskimäärin 0.10 viallista tuotetta.

Esimerkki (Milton-Arnold) 1/2

- Tutkimukset lennonjohtajien työskentelystä osoittavat, että keskittymistä on vaikea ylläpitää, kun työskennellään pitkiä aikoja ruudulla näkyvän datan parissa.
- Tutkimuksen yllättävä tulos on, että tutkasignaalien havaitseminen muuttuu vaikeammaksi, jos havaittavia signaaleja on vähän.
- Signaalin havaitsemisen todennäköisyys on 0.9, jos keskimäärin 30 minuutin aikana signaaleja on 100. Todennäköisyys on vain 0.5, jos signaaleja on 10.
- Tuloksen arvellaan johtuvan siitä, että ajatukset lähtevät harhailemaan tilanteessa, joka ei pakota keskittymään.

Esimerkki (Milton-Arnold) 2/2

- Olkoon X oikein havaittujen signaalien lukumäärä 30 minuutin testijakson aikana. Testijaksossa esiintyy 10 signaalia. Miten X on jakautunut?
- Koe koostuu kymmenestä riippumattomasta Bernoullin kokeesta, jossa positiivinen tulos on signaalin havaitseminen. Onnistumisen todennäköisyys on 0.5.
- Koska X on onnistumisten lukumäärä, X on binomijakautunut. Parametrit ovat $n = 10$ ja $p = 0.5$.
- Pistetodennäköisyysfunktioksi saadaan siis

$$f(x) = \binom{10}{x}(1/2)^x(1/2)^{10-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, \dots, 10.$$

Geometrinen jakauma

- $X \sim \mathrm{Geom}(p)$
- Kun Bernoulli-koetta toistetaan, kunnes tapahtuma A esiintyy ensimmäisen kerran, koetoistojen lukumäärä X noudattaa *Geometrista jakaumaa* parametrinaan p. Esimerkiksi heitetään rahaa kunnes saadaan klaava.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = q^{x-1}p, \quad q = 1 - p, \quad x = 1, 2, \ldots$$

- Odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p}$$

- Varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{q}{p^2}$$

Esimerkki

- Erään valmistajan tuotteista 2% on viallisia. Tuotteista valitaan umpimähkään tarkastettavaksi yksi kerrallaan niin monta kappaletta, kunnes saadaan ensimmäinen viallinen.
- Satunnaismuuttuja X on tarkastettujen tuotteiden lukumäärä. Kuinka X jakautuu?
- Tässä toistetaan koetta "saadaan viallinen tuote", jonka todennäköisyys on 0.02. Satunnaismuuttuja X on ensimmäiseen esiintymiseen tarvittavien toistojen lukumäärä.
- Satunnaismuuttuja X noudattaa siis geometrista jakaumaa parametrina $p = 0.02$.
- Odotusarvo $\mathrm{E}(X) = 1/0.02 = 50.0$. Viallisen tuotteen löytämiseksi tarvitaan siis keskimäärin 50 toistoa.

Esimerkki

- Tuulivoimala on rakennettu sellaiselle tuulen nopeudelle, joka esiintyy keskimäärin 50 vuoden välein.
- Tarkastellaan aikaa diskreettinä satunnaismuuttujana (yksikkö on vuosi). Voimala rikkoutuu rakentamisen jälkeen vuonna X, S=$\{1,2,3,\dots\}$. Kuinka X jakautuu?
- Oletetaan, että voimalan rakenteissa ei tapahdu väsymistä ja tuulen nopeudet vuosittain ovat riippumattomia tapahtumia.
- Tällöin X noudattaa geometrista jakaumaa odotusarvona $\mathrm{E}(X) = 50$. Parametrin p arvo on siis $p = 1/50$.

Hypergeometrinen jakauma

- $X \sim \mathrm{HyperGeom}(N, r, n)$
- Jakauma kuvaa ilmiötä, jossa perusjoukosta (koko N) poimitaan otos (kooltaan n). Tarkastellaan tässä otoksessa esiintyvien halutunlaisten alkioiden lukumäärää, kun niitä on perusjoukossa r kpl.
- Esimerkiksi rengastettujen lintujen osuus kaikista pyydystetyistä linnuista.
- Pistetodennäköisyysfunktio:

$$f(x) = Pr(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- Odotusarvo:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{nr}{N}$$

- Varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = \frac{nr}{N}\frac{N-r}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Esimerkki (Laininen)

- Leipuri leipoo aamulla 40 munkkia ja sekoittaa niiden joukkoon 10 edellisenä päivänä myymättä jäänyttä munkkia.
- Ensimmäinen asiakas ostaa viisi satunnaisesti valittua munkkia.
- Asiakkaan saamien edellisenä päivänä myymättä jääneiden munkkien lukumäärä on X. Kuinka X jakautuu?
- Satunnaismuuttuja X noudattaa hypergeometrista jakaumaa parametrein perusjoukon koko $N = 50$, otoskoko $n = 5$ ja edellispäiväisten munkkien määrä $r = 10$.
- On odotettavissa, että asiakas saa $\mathrm{E}(X) = 1$ kpl edellisenä päivänä myymättä jääneitä munkkeja.