

Sovellettu todennäköisyytlaskenta B

Antti Rasila

21. syyskuuta 2007

1 Satunnaismuuttujien riippumattomuus

2 Jakauman tunnusluvut

- Odotusarvo
- Odotusarvon ominaisuuksia
- Varianssi ja standardipoikkeama eli keskihajonta
- Momentit

3 Suurten lukujen laki

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Oletetaan, että X ja Y ovat satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudessa (S, \mathcal{F}, Pr) .
- Tällöin X ja Y ovat *riippumattomia*, merkitään

$$X \perp\!\!\!\perp Y,$$

jos tapahtumat $\{s \mid X(s) \in B_1\}$ ja $\{s \mid Y(s) \in B_2\}$ ovat riippumattomia kaikilla nk. Borel-joukoilla B_1, B_2 .

- Tällä kurssilla ei tarkemmin syvennytä Borel-joukkoihin, vaan riittää tietää, että kaikki yhden pisteen joukot, numeroituvat joukot, välit (suljetut, avoimet, puoliavoimet) sekä suljetut tai avoimet joukot ovat Borel-joukkoja.

Esimerkki

- Tapahtuman A *indikaattori* on satunnaismuuttuja

$$1_A(s) = \begin{cases} 1, & \text{jos } s \in A, \\ 0, & \text{jos } s \in A^c. \end{cases}$$

- Indikaattorien riippumattomuus yhtyy vastaavien tapahtumien riippumattomuuteen, eli

$$1_A \perp\!\!\!\perp 1_B, \text{ jos ja vain jos } A \perp\!\!\!\perp B.$$

Riippumattomuuden kriteereitä

- Jos X ja Y ovat diskreettejä satunnaismuuttujia arvojoukkoina S_X ja S_Y , niin X ja Y ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$Pr(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_k\}) = Pr(X = x_i)Pr(Y = y_k)$$

kaikilla $x_i \in S_X$ ja $y_k \in S_Y$.

- Yleisesti: Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$Pr(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = Pr(X \leq x)Pr(Y \leq y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on jakauman painopiste. Samalla se on piste, jonka ympärillä satunnaismuuttujan arvot vaihtelevat koetoistosta toiseen.

- Diskreetille jakeumalle odotusarvo määritellään seuraavasti:

$$E(X) = \mu_X = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i f(x_i).$$

- Tällöin edellytetään, että ko. sarja *suppenee itseisesti* eli

$$\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty.$$

- Mikäli sarja ei suppene itseisesti, sanotaan, että X :llä ei ole odotusarvoa.

Esimerkki

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X arvojoukko on $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ja sen jakauma on *tasainen* eli

$$Pr(X = x_i) = 1/n, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

- Tällöin

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Esimerkki (Pietarin paradoksi)

- Nicolas Bernoulli asetti kysymyksen: Kuinka paljon kannattaa maksaa seuraavasta pelistä?
- Lanttia heitetään, kunnes saadaan ensimmäinen kruuna. Jos tarvittavien heittojen määrä on k , voittosumma on 2^k dukaattia, missä $k = 1, 2, 3, \dots$
- Jos kriteerinä käytetään pelistä saatavan voiton X odotusarvoa, niin vastaus on "mielivaltaisen paljon", koska

$$p_k = Pr(X = 2^k) = \frac{1}{2^k},$$

ja siis

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot 2^k = \infty.$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo

- Vastaavasti, jos X :llä on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f , niin odotusarvo määritellään:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

- Tällöin edellytetään, että integraali on itseisesti suppeneva eli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx < \infty.$$

- Mikäli integraali ei suppene itseisesti, sanotaan, että X :llä ei ole odotusarvoa.

Esimerkki

- Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{kun } x \geq 1, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- Välittömästi nähdään, että f on tiheysfunktio.
- Jos jakauman tiheysfunktio on f , niin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

- Tällä jakaumalla siis ei ole odotusarvoa.

Odotusarvon ominaisuuksia 1/2

- Vakion odotusarvo on vakio itse, koska se ei vaihtele koetoistosta toiseen:

$$E(a) = a$$

- Lineaarimuunnokselle $Y = a + bX$ pätee:

$$E(Y) = a + bE(X)$$

- Kahden satunnaismuuttujan summalle ja erotukselle pätee:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{ja} \quad E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

- Yleisesti satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ painotetulle summalle pätee:

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

Odotusarvon ominaisuuksia 2/2

- Odotusarvo diskreetin satunnaismuuttujan X funktiolle $g(X)$ saadaan seuraavasti:

$$E(g(X)) = \sum_i g(x_i) p_i = \sum_i g(x_i) f(x_i)$$

vastaavasti jatkuvalla muuttujalle:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Varianssi ja standardipoikkeama eli keskihajonta

- Satunnaismuuttujan X varianssi on satunnaismuuttujan odotusarvosta lasketun poikkeaman neliön odotusarvo. Ts. varianssi kuvaa vaihtelun neliötä.

- Diskreetin satunnaismuuttujan varianssi:

$$D^2(X) = \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f(x_i)$$

- Jatkuvan satunnaismuuttujan varianssi:

$$D^2(X) = \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$$

- Standardipoikkeama eli keskihajonta saadaan varianssin neliöjuurena:

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Esimerkki 1/2

- Laatikossa on neljä mustaa ja kuusi valkoista palloa. Nostetaan kolme palloa. Määritetään satunnaismuuttujan X = "Mustien pallojen lukumäärä" jakauma ja lasketaan $Pr(1 \leq X \leq 2)$.

- X :n arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$. Alkeistapauksia on

$$\binom{10}{3} = 120.$$

- Lasketaan pistetodennäköisyydet

$$p_0 = Pr(X = 0) = \binom{6}{3} / 120 = 1/6,$$

$$p_1 = Pr(X = 1) = \binom{4}{1} \binom{6}{2} / 120 = 1/2,$$

- $p_2 = 3/10, p_3 = 1/30$.

Esimerkki 2/2

- Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$\mu = E(X) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{30} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1.20.$$

- Varianssi on

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D^2(X) &= \frac{1}{6} \left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{3}{10} \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{30} \left(3 - \frac{6}{5}\right)^2 \\ &= 0.56. \end{aligned}$$

- Keskihajonta eli standardipoikkeama on siis

$$\sigma = D(X) = \sqrt{0.56} \approx 0.75.$$

Varianssin ominaisuuksia

- Vakion varianssi on nolla, koska vakio ei vaihtele:

$$D^2(a) = 0$$

- Lineaarimuunnokselle $Y = a + bX$ pätee:

$$D^2(Y) = b^2 D^2(X)$$

- Kahden riippumattoman satunnaismuuttujan summalle ja erotukselle pätee:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) \quad D^2(X - Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

- Yleisesti riippumattomien satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ painotetulle summalle pätee:

$$D^2\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D^2(X_i)$$

Momentit

- Satunnaismuuttujan X k . *momentti* eli k . momentti origon suhteen on

$$E(X^k) = \alpha_k$$

erityisesti $\alpha_0 = 1$ ja $\alpha_1 = E(X) = \mu_X$

- Satunnaismuuttujan X k . *keskusmomentti* eli k . momentti painopisteen suhteen on

$$E((X - \mu_X)^k) = \mu_k$$

erityisesti $\mu_1 = 0$ ja $\mu_2 = D^2(X) = \text{Var}(X)$

- Usein varianssi on näppärempiä laskea origomomenttien avulla kuin keskusmomenttina:

$$D^2(X) = \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Kaavan todistus diskreetissä tapauksessa

Väite: Olkoon X diskreetti satunnaismuuttaja. Tällöin

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

missä $E(X^2) = \sum_i p_i x_i^2$.

Todistus.

$$D^2(X) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_i p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2)$$

$$= \sum_i p_i x_i^2 - 2E(X) \sum_i p_i x_i + (E(X))^2 \sum_i p_i$$

$$= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2. \quad \square$$

Suurten lukujen laki

- Olko satunnaismuuttujat $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tällöin:

$$E(X_i) = \mu \text{ ja } D^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$$

- Olkoon satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ aritmeettinen keskiarvo:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

ja $\varepsilon > 0$.

- Tällöin pätee (heikko) suurten lukujen laki:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Pr(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$