Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

21. syyskuuta 2007

Satunnaismuuttujien riippumattomuus

- Oletetaan, että X ja Y ovat satunnaismuuttujia todennäköisyysavaruudessa $(S, \mathcal{F}, Pr)$.
- Tällöin X ja Y ovat *riippumattomia*, merkitään

$$X \perp\!\!\!\perp Y,$$

  jos tapahtumat $\{s \mid X(s) \in B_1\}$ ja $\{s \mid Y(s) \in B_2\}$ ovat riippumattomia kaikilla nk. Borel-joukoilla B_1, B_2.
- Tällä kurssilla ei tarkemmin syvennytä Borel-joukkoihin, vaan riittää tietää, että kaikki yhden pisteen joukot, numeroituvat joukot, välit (suljetut, avoimet, puoliavoimet) sekä suljetut tai avoimet joukot ovat Borel-joukkoja.

Esimerkki

- Tapahtuman A *indikaattori* on satunnaismuuttuja

$$1_A(s) = \begin{cases} 1, & \text{jos } s \in A, \\ 0, & \text{jos } s \in A^c. \end{cases}$$

- Indikaattorien riippumattomuus yhtyy vastaavien tapahtumien riippumattomuuteen, eli

$$1_A \perp\!\!\!\perp 1_B, \text{ jos ja vain jos } A \perp\!\!\!\perp B.$$

Riippumattomuuden kriteereitä

- Jos X ja Y ovat diskreettejä satunnaismuuttujia arvojoukkoina S_X ja S_Y, niin X ja Y ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$Pr\big(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_k\}\big) = Pr(X = x_i)Pr(Y = y_k)$$

  kaikilla $x_i \in S_X$ ja $y_k \in S_Y$.

- Yleisesti: Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, jos ja vain jos

$$Pr\big(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}\big) = Pr(X \leq x)Pr(Y \leq y)$$

  kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo

- Satunnaismuuttujan X *odotusarvo* on jakauman painopiste. Samalla se on piste, jonka ympärillä satunnaismuuttujan arvot vaihtelevat koetoistosta toiseen.
- Diskreetille jakaumalle odotusarvo määritellään seuraavasti:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i f(x_i).$$

- Tällöin edellytetään, että ko. sarja *suppenee itseisesti* eli

$$\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty.$$

- Mikäli sarja ei suppene itseisesti, sanotaan, että X:llä ei ole odotusarvoa.

Esimerkki

- Oletetaan, että satunnaismuuttujan X arvojoukko on $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$, ja sen jakauma on *tasainen* eli

$$Pr(X = x_i) = 1/n, \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

- Tällöin

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Esimerkki (Pietarin paradoksi)

- Nicolas Bernoulli asetti kysymyksen: Kuinka paljon kannattaa maksaa seuraavasta pelistä?
- Lanttia heitetään, kunnes saadaan ensimmäinen kruuna. Jos tarvittavien heittojen määrä on k, voittosumma on 2^k dukaattia, missä $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- Jos kriteerinä käytetään pelistä saatavan voiton X odotusarvoa, niin vastaus on ”mielivaltaisen paljon”, koska

$$p_k = Pr(X = 2^k) = \frac{1}{2^k},$$

ja siis

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot 2^k = \infty.$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo

- Vastaavasti, jos X:llä on jatkuva jakauma tiheysfunktiona f, niin odotusarvo määritellään:

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

- Tällöin edellytetään, että integraali on itseisesti suppeneva eli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx < \infty.$$

- Mikäli integraali ei suppene itseisesti, sanotaan, että X:llä ei ole odotusarvoa.

Esimerkki

- Olkoon
$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{kun } x \geq 1, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$
- Välittömästi nähdään, että f on tiheysfunktio.
- Jos jakauman tiheysfunktio on f, niin
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$
- Tällä jakaumalla siis ei ole odotusarvoa.

Odotusarvon ominaisuuksia 1/2

- Vakion odotusarvo on vakio itse, koska se ei vaihtele koetoistosta toiseen:

$$\mathrm{E}(a) = a$$

- Lineaarimuunnokselle $Y = a + bX$ pätee:

$$\mathrm{E}(Y) = a + b\mathrm{E}(X)$$

- Kahden satunnaismuuttujan summalle ja erotukselle pätee:

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \text{ ja } \qquad \mathrm{E}(X - Y) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)$$

- Yleisesti satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ painotetulle summalle pätee:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}(X_i)$$

- Odotusarvo diskreetin satunnaismuuttujan X funktiolle $g(X)$ saadaan seuraavasti:

$$\mathrm{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i = \sum_i g(x_i)f(x_i)$$

vastaavasti jatkuvalle muuttujalle:

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Varianssi ja standardipoikkeama eli keskihajonta

- Satunnaismuuttujan X *varianssi* on satunnaismuuttujan odotusarvosta lasketun poikkeaman neliön odotusarvo. Ts. varianssi kuvaa vaihtelun neliötä.
- Diskreetin satunnaismuuttujan varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_i = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f(x_i)$$

- Jatkuvan satunnaismuuttujan varianssi:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$$

- *Standardipoikkeama* eli *keskihajonta* saadaan varianssin neliöjuurena:

$$\mathrm{D}(X) = \sqrt{\mathrm{D}^2(X)} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Esimerkki 1/2

- Laatikossa on neljä mustaa ja kuusi valkoista palloa. Nostetaan kolme palloa. Määritetään satunnaismuuttujan $X =$"Mustien pallojen lukumäärä" jakauma ja lasketaan $Pr(1 \leq X \leq 2)$.
- X:n arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$. Alkeistapauksia on

$$\binom{10}{3} = 120.$$

- Lasketaan pistetodennäköisyydet

$$p_0 = Pr(X = 0) = \binom{6}{3}/120 = 1/6,$$

$$p_1 = Pr(X = 1) = \binom{4}{1}\binom{6}{2}/120 = 1/2,$$

- $p_2 = 3/10$, $p_3 = 1/30$.

Esimerkki 2/2

- Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo.

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{30} \cdot 3 = \frac{6}{5} = 1.20.$$

- Varianssi on

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D^2(X) &= \frac{1}{6}\left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{3}{10}\left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{30}\left(3 - \frac{6}{5}\right)^2 \\ &= 0.56. \end{aligned}$$

- Keskihajonta eli standardipoikkeama on siis

$$\sigma = D(X) = \sqrt{0.56} \approx 0.75.$$

Varianssin ominaisuuksia

- Vakion varianssi on nolla, koska vakio ei vaihtele:

$$\mathrm{D}^2(a) = 0$$

- Lineaarimuunnokselle $Y = a + bX$ pätee:

$$\mathrm{D}^2(Y) = b^2\mathrm{D}^2(X)$$

- Kahden riippumattoman satunnaismuuttujan summalle ja erotukselle pätee:

$$\mathrm{D}^2(X+Y) = \mathrm{D}^2(X) + \mathrm{D}^2(Y) \quad \mathrm{D}^2(X-Y) = \mathrm{D}^2(X) + \mathrm{D}^2(Y)$$

- Yleisesti riippumattomien satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ painotetulle summalle pätee:

$$\mathrm{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{D}^2(X_i)$$

Momentit

- Satunnaismuuttujan X *k. momentti* eli k. momentti origon suhteen on

$$\mathrm{E}(X^k) = \alpha_k$$

  erityisesti $\alpha_0 = 1$ ja $\alpha_1 = \mathrm{E}(X) = \mu_X$

- Satunnaismuuttujan X *k. keskusmomentti* eli k. momentti painopisteen suhteen on

$$\mathrm{E}((X - \mu_X)^k) = \mu_k$$

  erityisesti $\mu_1 = 0$ ja $\mu_2 = \mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X)$

- Usein varianssi on näppärempää laskea origomomenttien avulla kuin keskusmomenttina:

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$$

Kaavan todistus diskreetissä tapauksessa

Väite: Olkoon X diskreetti satunnaismuutuja. Tällöin

$$\mathrm{D}^2(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2,$$

missä $\mathrm{E}(X^2) = \sum_i p_i x_i^2$.

Todistus.

$$\mathrm{D}^2(X) = \sum_i p_i (x_i - \mathrm{E}(X))^2 = \sum_i p_i \left(x_i^2 - 2x_i \mathrm{E}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 \right)$$

$$= \sum_i p_i x_i^2 - 2\mathrm{E}(X) \sum_i p_i x_i + (\mathrm{E}(X))^2 \sum_i p_i$$

$$= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2.$$

$\square$

Suurten lukujen laki

- Olkoot satunnaismuuttujat $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita. Tällöin:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu \text{ ja } \mathrm{D}^2(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \ldots, n$$

- Olkoon satunnaismuuttujien $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ aritmeettinen keskiarvo:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

  ja $\varepsilon > 0$.

- Tällöin pätee (heikko) suurten lukujen laki:

$$\lim_{n \to +\infty} Pr\left(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0$$