

Sovellettu todennäköisyytlaskenta B

Antti Rasila

20. syyskuuta 2007

- 1 Kolmogorovin aksioomat
 - σ -algebra
 - Tapahtuman todennäköisyys
- 2 Satunnaismuuttajat
 - Todennäköisyysjakauma
 - Satunnaismuuttujien tyyppiä
 - Diskreettejä satunnaismuuttujia
 - Jatkuvia satunnaismuuttujia
 - Tiheysfunktio
 - Pistetodennäköisyysfunktio
 - Kertymäfunktio

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)



σ -algebra

Kokoelma \mathcal{F} perusjoukon osajoukkoja S on σ -algebra, seuraavat ehdot pätevät:

- (σA_1) $S \in \mathcal{F}$.
- (σA_2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$.
- (σA_3) Jos $A_i \in \mathcal{F}$, kun $i = 1, 2, 3, \dots$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Kolmogorovin aksioomat

Tapahtuman A todennäköisyys $Pr(A)$ on reaaliluku, jonka on oltava yksikäsitteisesti määritelty, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu.

Määritelmä. Funktio $Pr: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ on todennäköisyys, jos:

- (TN_1) $Pr(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.
- (TN_2) $Pr(S) = 1$.
- (TN_3) Täysadditiivisuus: Jos $A_i \in \mathcal{F}$ ($i = 1, 2, \dots$), ja

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ kun } i \neq j \text{ niin } Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(A_i).$$

- Kolmikko (S, \mathcal{F}, Pr) on *todennäköisyysvaruus*, jos S on epätyhjä joukko, \mathcal{F} on σ -algebra ja $Pr: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ on todennäköisyys.

Satunnaismuuttajat

- Jos satunnaisilmiötä halutaan mallintaa matemaattisesti, on ilmiön tulosvaihtoehdot kuvattava *numeerisessa muodossa*.
- Tämä tapahtuu liittämällä satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoihin reaaliarvoinen funktio, jota kutsutaan *satunnaismuuttujaksi*
- Satunnaismuuttujan arvoihin liitetään todennäköisyydet määrittelemällä satunnaismuuttujan *todennäköisyysjakauma*.
- Satunnaismuuttujien tarkastelu jaetaan kahteen luokkaan:
 - (a) *Diskreetit satunnaismuuttajat*.
 - (b) *Jatkuvat satunnaismuuttajat*.

Satunnaismuuttujan määritelmä

- Olkoon ξ *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon \mathbb{R} :
 $\xi: S \rightarrow \mathbb{R}$
- Tällöin ξ on *satunnaismuuttaja*.
- Satunnaismuuttuja on funktiona täysin määrätty, mutta sattuma määrää, mikä alkeistapahtumista realisoituu ja sitä kautta myös minkä arvon satunnaismuuttuja saa.

Todennäköisyysjakauma

- Olkoon kolmikko (S, \mathcal{F}, Pr) otosavaruudessa S määritelty *todennäköisyyskenttä*, jossa on seuraavat elementit:
 - (i) S on otosavaruus
 - (ii) \mathcal{F} on otosavaruuden S osajoukkojen joukossa määritelty σ -algebra
 - (iii) Pr on σ -algebran \mathcal{F} alkiuille määritelty todennäköisyysmitta.
- Satunnaismuuttujan ξ *todennäköisyysjakaumalla* tarkoitetaan kuvauksen $\xi: S \rightarrow \mathbb{R}$ reaalilukujen joukkoon indusoimaa todennäköisyysmittaa.
- **Selitys:** *Todennäköisyysjakauma* kuvaa otosavaruuden todennäköisyysmassan (= 1) jakautumista otosavaruudessa määritellyn satunnaismuuttujan arvoalueelle.
- *Tilastollinen malli* on satunnaismuuttujan ja sen jakauman yhdistelmä.

Satunnaismuuttujien tyyppejä

(a) Diskreetit satunnaismuuttajat

- Satunnaismuuttuja on diskreetti, jos sen arvoalue on diskreetti joukko eli muodostuu erillisistä reaaliakselin pisteistä.
- Diskreetin muuttujan jakauma määrittelee alkeistapahtumien todennäköisyydet.

(b) Jatkuvat satunnaismuuttajat

- Satunnaismuuttuja on jatkuva, jos sen arvoalue on jokin reaaliakselin osaväli.
- Jatkuvan muuttujan jakauma määrittelee muuttujan arvoalueeseen kuuluvien reaaliakselin välien todennäköisyydet.

Diskreettejä satunnaismuuttujia

- Kone tekee tuotetta n kpl päivässä. Satunnaisesti valittu tuote on viallinen todennäköisyydellä p . Viallisten tuotteiden lukumäärä päivän aikana tehtyjen tuotteiden joukossa on satunnaismuuttuja, joka noudattaa *binomijakaumaa*.
- Pyydytetään järvestä joukko kaloja, merkitään ne ja päästetään takaisin järveen. Pyydytetään myöhemmin uusi joukko kaloja. Merkittyjen kalojen määrä uudessa saaliissa on satunnaismuuttuja, joka noudattaa *hypergeometrista jakaumaa*.
- Palvelujonoon tulee keskimäärin k asiakasta aikayksikköä kohden. Jonakin aikavälinä saapuvien asiakkaiden lukumäärä on satunnaismuuttuja joka noudattaa *Poisson-jakaumaa*.
- Nämä jakaumat esitellään tarkemmin ensi viikon luennoilla.

Jatkuvia satunnaismuuttujia

- Vapaasti pyörivän onnenpyörä osoittimen kulman muutos osoitinta pyöräytettäessä on tasajakautunut eli tasaisesti jakautunut jatkuva satunnaismuuttuja.
- Palvelujonoon tulee keskimäärin k asiakasta aikayksikköä kohden. Seuraavan jonoon tulevan asiakkaan odotusaika on jatkuva satunnaismuuttuja, joka noudattaa *eksponenttijakaumaa*.
- Viisivuotiaden tyttöjen pituus on jatkuva satunnaismuuttuja, jonka voidaan sanoa noudattavan approksimatiivisesti *normaalijakaumaa*.

Tiheysfunktio

- Reaaliarvoinen funktio f määrittelee (todennäköisyys-) tiheysfunktion jatkuvalle satunnaismuuttujalle ξ , jos

- 1 $f(x)$ on x :n jatkuva funktio,
- 2 $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$,
- 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

4

$$Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Tiheysfunktion vakioita sanotaan jakauman parametreiksi, ja ne määräävät tiheysfunktion muodon ts. jakauman muodon.

Pistetodennäköisyysfunktio

- Diskreettiä satunnaismuuttujaa ξ vastaavan pistetodennäköisyysfunktion f arvo pisteessä x_i on *todennäköisyys*:

$$f(x_i) = Pr(\xi = x_i).$$

Näin ollen

$$0 \leq f(x_i) \leq 1.$$

- **Huomautus.** Jatkuvaa satunnaismuuttujaa ξ vastaavan tiheysfunktion f arvo pisteessä x ei ole todennäköisyys, joten on mahdollista, että

$$f(x) > 1.$$

Pistetodennäköisyysfunktion ominaisuuksia

- Pistetodennäköisyysfunktiolla $f(x) = Pr(\xi = x)$ on aina seuraavat ominaisuudet:

- (i) $f(x) \geq 0$, kun $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Jos $f(x) > 0$, niin x kuuluu numeroituaan arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$.
- (iii) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Esimerkki

- Olkoon ξ kruunien määrä kolmen lantin heitossa.
- Tällöin ξ on diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$ ja vastaavat pistetodennäköisyydet

$$p_0 = Pr(\xi = 0) = 1/8, p_1 = 3/8, p_2 = 3/8 \text{ ja } p_3 = 1/8.$$

Kertymäfunktio

- Satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio

$$F(x) = Pr(\xi \leq x).$$

- kuva todennäköisyysmassan kertymistä argumentin x kasvaessa.
- Kertymäfunktio määrää ko. satunnaisilmiön kaikkien tapahtumien todennäköisyydet.
- Funktio $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ on kertymäfunktio, jos ja vain jos
 - 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
 - 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,
 - 3 F on ei-vähenevä: $F(x_1) \leq F(x_2)$ jos $x_1 \leq x_2$,
 - 4 F on jatkuva oikealta: $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x)$.

- Edellisten lisäksi pätee:
 - $Pr(\xi > x) = 1 - F(x)$,
 - $Pr(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$.
- Diskreetissä tapauksessa kertymäfunktio saadaan kaavalla

$$F(x) = Pr(\xi \leq x) = \sum_{\{i | x_i \leq x\}} p_i.$$

- Jatkuvassa tapauksessa kertymäfunktio saadaan kaavalla

$$F(x) = Pr(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$