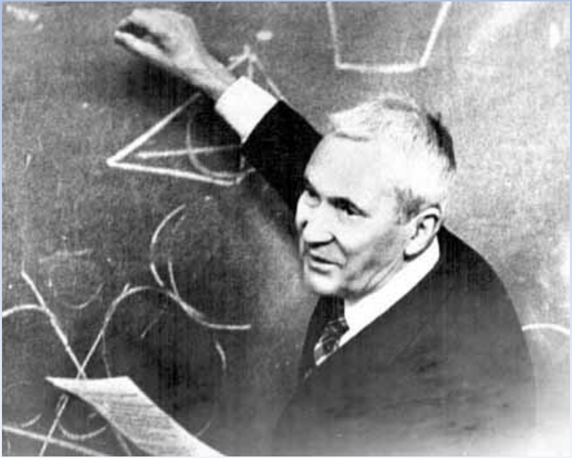
Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

20. syyskuuta 2007

1. Kolmogorovin aksioomat
   - σ-algebra
   - Tapahtuman todennäköisyys
2. Satunnaismuuttujat
   - Todennäköisyysjakauma
   - Satunnaismuuttujien tyyppejä
   - Diskreettejä satunnaismuuttujia
   - Jatkuvia satunnaismuuttujia
   - Tiheysfunktio
   - Pistetodennäköisyysfunktio
   - Kertymäfunktio

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)



σ-algebra

Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon osajoukkoja S on σ-*algebra*, seuraavat ehdot pätevät:

(σA_1) $S \in \mathcal{F}$.

(σA_2) Jos $A \in \mathcal{F}$, niin $A^c \in \mathcal{F}$.

(σA_3) Jos $A_i \in \mathcal{F}$, kun $i = 1, 2, 3, \ldots$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Kolmogorovin aksioomat

Tapahtuman A todennäköisyys $Pr(A)$ on reaaliluku, jonka on oltava yksikäsitteisesti määritelty, kun tapahtuma $A \in \mathcal{F}$ on annettu.

Määritelmä. Funktio $Pr\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys, jos:

(TN_1) $Pr(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.

(TN_2) $Pr(S) = 1$.

(TN_3) Täysadditiivisuus: Jos $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, ja

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ kun } i \neq j \text{ niin } Pr\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(A_i).$$

- Kolmikko $(S, \mathcal{F}, Pr)$ on *todennäköisyysavaruus*, jos S on epätyhjä joukko, $\mathcal{F}$ on σ-algebra ja $Pr\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ on todennäköisyys.

Satunnaismuuttujat

- Jos satunnaisilmiötä halutaan mallintaa matemaattisesti, on ilmiön tulosvaihtoehdot kuvattava *numeerisessa muodossa*.
- Tämä tapahtuu liittämällä satunnaisilmiön tulosvaihtoehtoihin reaaliarvoinen funktio, jota kutsutaan *satunnaismuuttujaksi*
- Satunnaismuuttujan arvoihin liitetään todennäköisyydet määrittelemällä satunnaismuuttujan *todennäköisyysjakauma*.
- Satunnaismuuttujien tarkastelu jaetaan kahteen luokkaan:

(a) *Diskreetit satunnaismuuttujat*.

(b) *Jatkuvat satunnaismuuttujat*.

Satunnaismuuttujan määritelmä

- Olkoon ξ *funktio* otosavaruudesta S reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$: $\xi \colon S \to \mathbb{R}$
- Tällöin ξ on *satunnaismuuttaja*.
- Satunnaismuuttuja on funktiona täysin määrätty, mutta sattuma määrää, mikä alkeistapahtumista realisoituu ja sitä kautta myös minkä arvon satunnaismuuttuja saa.

Todennäköisyysjakauma

- Olkoon kolmikko $(S, \mathcal{F}, Pr)$ otosavaruudessa S määritelty *todennäköisyyskenttä*, jossa on seuraavat elementit:

(i) S on otosavaruus

(ii) $\mathcal{F}$ on otosavaruuden S osajoukkojen joukossa määritelty σ-algebra

(iii) Pr on σ-algebran $\mathcal{F}$ alkioille määritelty todennäköisyysmitta.

- Satunnaismuuttujan ξ *todennäköisyysjakaumalla* tarkoitetaan kuvauksen $\xi \colon S \to \mathbb{R}$ reaalilukukujen joukkoon indusoimaa todennäköisyysmittaa.
- **Selitys**: *Todennäköisyysjakauma* kuvaa otosavaruuden todennäköisyysmassan $(= 1)$ jakautumista otosavaruudessa määritellyn satunnaismuuttujan arvoalueelle.
- *Tilastollinen malli* on satunnaismuuttujan ja sen jakauman yhdistelmä.

Satunnaismuuttujien tyyppejä

(a) *Diskreetit satunnaismuuttujat*

- Satunnaismuuttuja on diskreetti, jos sen arvoalue on diskreetti joukko eli muodostuu erillisistä reaaliakselin pisteistä.
- Diskreetin muuttujan jakauma määrittelee alkeistapahtumien todennäköisyydet.

(b) *Jatkuvat satunnaismuuttujat*

- Satunnaismuuttuja on jatkuva, jos sen arvoalue on jokin reaaliakselin osaväli.
- Jatkuvan muuttujan jakauma määrittelee muuttujan arvoalueeseen kuuluvien reaaliakselin välien todennäköisyydet.

Diskreettejä satunnaismuuttujia

- Kone tekee tuotetta n kpl päivässä. Satunnaisesti valittu tuote on viallinen todennäköisyydellä p. Viallisten tuotteiden lukumäärä päivän aikana tehtyjen tuotteiden joukossa on satunnaismuuttuja, joka noudattaa *binomijakaumaa*.
- Pyydystetään järvestä joukko kaloja, merkitään ne ja päästetään takaisin järveen. Pyydystetään myöhemmin uusi joukko kaloja. Merkittyjen kalojen määrä uudessa saaliissa on satunnaismuuttuja, joka noudattaa *hypergeometrista jakaumaa*.
- Palvelujonoon tulee keskimäärin k asiakasta aikayksikköä kohden. Jonakin aikavälinä saapuvien asiakkaiden lukumäärä on satunnaismuuttuja joka noudattaa *Poisson-jakaumaa*.
- Nämä jakaumat esitellään tarkemmin ensi viikon luennoilla.

Jatkuvia satunnaismuuttujia

- Vapaasti pyörivän onnenpyörä osoittimen kulman muutos osoitinta pyöräytettäessä on tasajakautunut eli tasaisesti jakautunut jatkuva satunnaismuuttuja.
- Palvelujonoon tulee keskimäärin k asiakasta aikayksikköä kohden. Seuraavan jonoon tulevan asiakkaan odotusaika on jatkuva satunnaismuuuttuja, joka noudattaa *eksponenttijakaumaa*.
- Viisivuotiaden tyttöjen pituus on jatkuva satunnaismuuttuja, jonka voidaan sanoa noudattavan approksimatiivisesti *normaalijakaumaa*.

Tiheysfunktio

- Reaaliarvoinen funktio f määrittelee (todennäköisyys-) tiheysfunktion jatkuvalle satunnaismuuttujalle ξ, jos
  1. $f(x)$ on x:n jatkuva funktio,
  2. $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$,
  3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$
  4. $$Pr(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$
- Tiheysfunktion vakioita sanotaan jakauman parametreiksi, ja ne määräävät tiheysfunktion muodon ts. jakauman muodon.

Pistetodennäköisyysfunktio

- *Diskreettiä satunnaismuuttujaa* ξ vastaavan *pistetodennäköisyysfunktion* f arvo pisteessä x_i on *todennäköisyys:*

$$f(x_i) = Pr(\xi = x_i).$$

Näin ollen

$$0 \leq f(x_i) \leq 1.$$

- **Huomautus.** *Jatkuvaa satunnaismuuttujaa* ξ vastaavan *tiheysfunktion* f arvo pisteessä x *ei ole todennäköisyys*, joten on mahdollista, että

$$f(x) > 1.$$

Pistetodennäköisyysfunktion ominaisuuksia

- Pistetodennäköisyysfunktiolla $f(x) = Pr(\xi = x)$ on aina seuraavat ominaisuudet:

(i) $f(x) \geq 0$, kun $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Jos $f(x) > 0$, niin x kuuluu numeroituvaan arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$.

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Esimerkki

- Olkoon ξ kruunien määrä kolmen lantin heitossa.
- Tällöin ξ on diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$ ja vastaavat pistetodennäköisyydet

$$p_0 = Pr(\xi = 0\} = 1/8,\ p_1 = 3/8,\ p_2 = 3/8 \text{ ja } p_3 = 1/8.$$

Kertymäfunktio

- Satunnaismuuttujan ξ kertymäfunktio

$$F(x) = Pr(\xi \leq x).$$

  kuvaa todennäköisyysmassan kertymistä argumentin x kasvaessa.
- Kertymäfunktio määrää ko. satunnaisilmiön kaikkien tapahtumien todennäköisyydet.
- Funktio $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ on kertymäfunktio, jos ja vain jos
  1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$,
  2. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
  3. F on ei-vähenevä: $F(x_1) \leq F(x_2)$ jos $x_1 \leq x_2$,
  4. F on jatkuva oikealta: $\lim_{h \to 0+} F(x + h) = F(x)$.

Lisää kertymäfunktiosta

- Edellisten lisäksi pätee:
  - $Pr(\xi > x) = 1 - F(x)$,
  - $Pr(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$.
- Diskreetissä tapauksessa kertymäfunktio saadaan kaavalla

$$F(x) = Pr(\xi \leq x) = \sum_{\{i \,|\, x_i \leq x\}} p_i.$$

- Jatkuvassa tapauksessa kertymäfunktio saadaan kaavalla

$$F(x) = Pr(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$