Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

14. syyskuuta 2007

1. Kokonaistodennäköisyys ja Bayesin kaava
   - Otosavaruuden ositus
   - Kokonaistodennäköisyyden kaava
   - Bayesin kaava

2. Puut ja verkot
   - Puut
   - Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa
   - Puudiagrammin konstruointi
   - Puutodennäköisyydet
   - Systeemin toimintatodennäköisyys
   - Toimintaverkot

Otosavaruuden ositus

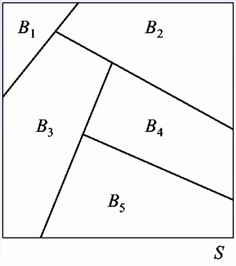
Otosavaruuden S osajoukot $B_1, B_2, \ldots, B_n$ muodostavat otosavaruuden S *osituksen*, jos

(i) $B_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \ldots, n$

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$

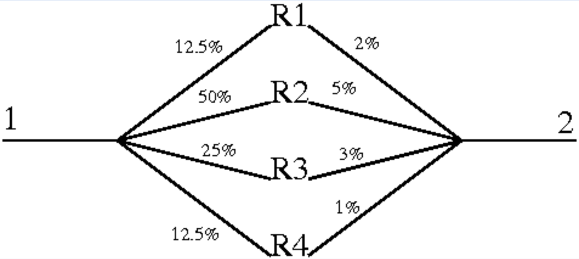
(iii) $S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$

- **Huomautus.** Jos tapahtumat B_i muodostavat S:n osituksen, niistä täsmälleen yksi tapahtuu joka kerta, kun ko. satunnaisilmiö toistuu.



Esimerkki 1/2

- Kuvan mukaisessa tietoverkossa lähetetään testisignaali alkupisteestä 1 loppupisteeseen 2.
- Reititin ohjaa signaalin kuormituksesta riippuen reiteille R_1, R_2, R_3 tai R_4 vastaavasti todennäköisyydellä 12.5%, 50%, 25% ja 12.5%.
- Eri reiteillä koodausvirheiden todennäköisyydet ovat 2%, 5%, 3% ja 1%.
- Millä todennäköisyydellä tapahtuu koodausvirhe?



Esimerkki 2/2

- Merkitään A:lla tapahtumaa "signaalissa tapahtuu koodausvirhe" ja B_i:llä "signaali kulkee reittieä R_i".
- Nyt A voidaan jakaa toisensa poissulkeviin osiin $A = (A \cap B_1) \cup \ldots \cup (A \cap B_4)$, joten $Pr(A) = Pr(A \cap B_1) + \ldots + Pr(A \cap B_4)$.
- Koska $Pr(A \cap B_i) = Pr(B_i)Pr(A|B_i)$, saadaan

$$Pr(A) = Pr(B_1)Pr(A|B_1) + \cdots + Pr(B_4)Pr(A|B_4).$$

- Todennäköisyydet yhtälön oikealla puolella ovat tunnettuja. Laskemalla saadaan: $Pr(A) = 0.03625$.

Kokonaistodennäköisyyden kaava

- Olkoon $A \subset S$. Yhteenlaskusäännön perusteella:

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr(A \cap B_i) \tag{1}$$

- Toisaalta yleisen tulosäännön perusteella:

$$Pr(A \cap B_i) = Pr(B_i)Pr(A|B_i) \tag{2}$$

- Yhdistämällä kaavat (1) ja (2) saadaan *kokonaistodennäköisyyden kaava*:

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr(B_i)Pr(A|B_i) \tag{3}$$

Kokonaistodennäköisyyden kaava, huomautuksia

Kokonaistodennäköisyyden kaavaan

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{n} Pr(B_i)Pr(A|B_i) \tag{4}$$

liittyviä tulkintoja ja huomatuksia:

- $Pr(A)$ on todennäköisyys sille, että päädytään lopputilaan A.
- Kaava (4) sanoo siis, että todennäköisyys $\mathrm{Pr}(A)$ saadaan laskemalla yhteen alkutilasta lopputilaan A välitilojen B_i kautta kulkevien reittien todennäköisyydet

$$Pr(A \cap B_i) = Pr(B_i)Pr(A|B_i).$$

- Kaavasta ei ole apua, jos todennäköisyyksiä $Pr(B_i)$ ja $Pr(A|B_i)$ ei tunneta.
- Jos tapahtuma A on riippumaton jokaisesta tapahtumasta B_i kaavasta myöskään ei ole hyötyä.

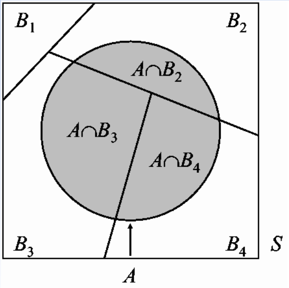
Bayesin kaava

- Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan:

$$Pr(B_i|A) = \frac{Pr(A \cap B_i)}{Pr(A)} = \frac{Pr(B_i)Pr(A|B_i)}{Pr(A)}$$

- Soveltamalla nimittäjään kaavaa (4) saadaan *Bayesin kaava*:

$$Pr(B_i|A) = \frac{Pr(B_i)Pr(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} Pr(B_j)Pr(A|B_j)}$$



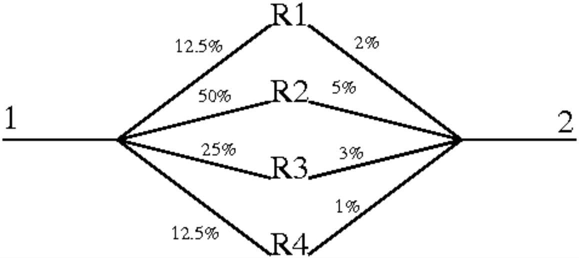
Huomautuksia

- $Pr(B_i)$ on nimeltään *a priori* -todennäköisyys eli ennakkokäsitys ennen tietoa A:n tapahtumisesta.
- $Pr(B_i|A)$ on *a posteriori* -todennäköisyys.
- Samat käyttöehdot kuin kokonaistodennäköisyyden kaavalla.
- Jos riippuvuusehto ei päde, ei käsitys muutu uuden tiedon myötä.

Esimerkki

- Tarkastellaan uudestaan aikaisempaa esimerkkiä (ks. kuva).
- Esimerkin signaalissa todettiin koodausvirhe. Millä todennäköisyydellä signaali on käyttänyt reittiä R_2?
- Ratkaistaan käyttämällä Bayesin kaavaa:

$$Pr(B_2|A) = \frac{Pr(B_2)Pr(A|B_2)}{Pr(B_1)Pr(A|B_1) + \ldots + Pr(B_4)Pr(A|B_4)} \approx 69.0\%.$$

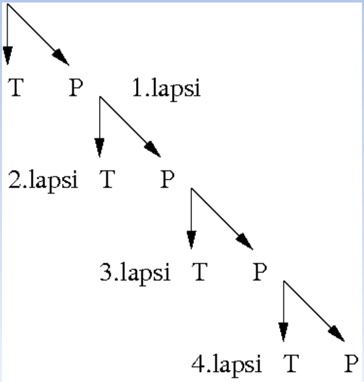


Esimerkki (Mellin) 1/4

- Pariskunta haluaa saada tytön, mutta ei halua hankkia kuin enintään neljä lasta.
- Tehdään seuraavat yksinkertaistavat oletukset:
  (i) Lapset syntyvät aina yksi kerrallaan.
  (ii) Syntyvän lapsen sukupuoli ei riipu aikaisemmin syntyneiden lasten sukupuolesta.
  (iii) $\Pr(\text{Poika}) = \Pr(\text{Tyttö}) = 1/2$.
- Pariskunta päättää käyttää lasten hankkimisessa seuraavaa strategiaa: (i) Lapsia hankitaan kunnes saadaan tyttö. (ii) Lapsia hankitaan enintään neljä.
- Jos siis syntyy neljä poikaa, strategia on epäonnistunut.
- Mikä on onnistumisen todennäköisyys?

Esimerkki 2/4

- Vaihtoehtoja vastaava puudiagrammi on esitetty oikealla.
- Vasemmanpuoleiset särmät johtavat strategian onnistumiseen.
- Vastaavasti oikeanpuoleiset särmät johtavat strategian epäonnistumiseen.
- Jokaisen särmän todennäköisyys on 1/2.



Esimerkki 3/4

- Merkitään $A =$ "strategia onnistuu", $Ti =$ "i. lapsi on tyttö", $Pi =$ "i. lapsi on poika"
- Tapahtumat T1, T2, T3, T4 muodostavat joukon A osituksen: $A = T1 \cup T2 \cup T3 \cup T4$, $Ti \cap Tj = \emptyset$, kun $i \neq j$
- Riippumattomien tapahtumien tulosäännön perusteella:

$$
\begin{aligned}
Pr(T1) &= Pr(T) = 1/2 = Pr(P_1) \\
Pr(T2) &= Pr(T \cap P) = Pr(T)Pr(P) = 1/4 = Pr(P2) \\
Pr(T3) &= Pr(T \cap P2) = Pr(T)Pr(P2) = 1/8 = Pr(P3) \\
Pr(T4) &= Pr(T \cap P3) = Pr(T)Pr(P3) = 1/16 = Pr(P4)
\end{aligned}
$$

Esimerkki 4/4

- Todennäköisyydet 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 saadaan määräämällä loppupisteisiin T vievien reittien todennäköisyydet.
- Reittien todennäköisyydet saadaan reitin muodostavien särmien todennäköisyyksien tulona.
- Onnistumisen todennäköisyys 15/16 saadaan laskemalla loppupisteisiin vievien reittien todennäköisyydet yhteen.

Verkot

- Verkko koostuu pisteistä, särmistä ja insidenssikuvauksesta, joka kertoo, mitkä pisteet ovat särmien yhdistämiä.
- Ajatellaan, että jokaisella särmällä on alkupisti ja loppupiste, joten tässä tarkasteltavat verkot ovat suunnattuja verkkoja.
- Pisteeestä v on reitti pisteeseen w, jos on olemassa suunnattujen särmien jono, joka vie pisteestä v pisteeseen w niin, että jokaisen särmän alkupiste on edellisen loppupiste.
- Reitti muodostaa silmukan, jos $v = w$.
- Verkko on yhtenäinen, jos sen pisteiden joukkoa ei voida osittaa kahdeksi epätyhjäksi joukoksi siten, että verkon jokaisen särmän alkupiste ja loppupiste kuuluvat samaan osajoukkoon.

Puut

- Verkko on puu, jonka juuri on piste v_1, jos seuraavat ehdot pätevät:

(i) Verkko on yhtenäinen.

(ii) Verkossa ei ole silmukoita.

(iii) Jos $w \neq v_1$ on mielivaltainen verkon piste, pisteestä v_1 pisteeseen w pääsee täsmälleen yhtä reittiä pitkin.

Puudiagrammien käyttö todennäköisyyslaskennassa

- Puudiagrammi on puun graafinen esitys.
- Periaatteessa jokainen alkeistodennäköisyyslaskennan laskutehtävä voidaan ratkaista käyttämällä hyväksi puudiagrammeja.
- Käytännössä vaaditaan seuraavaa:

(i) Ilmiöllä on yksi alkutila sekä yksi tai useampia lopputiloja.
(ii) Ilmiö koostuu vaihtoehtoisista tapahtumajonoista.
(iii) Tapahtumajonossa eteminen on vaiheittaista.
(iv) Jokaisessa vaiheessa kohdataan yksi tai useampia toisensa poissulkevia tapahtumavaihtoehtoja.

Puudiagrammin konstruointi

(i) Asetetaan puun juuri vastaamaan ilmiön alkutilaa.

(ii) Asetetaan puun loppupisteet (”oksien kärjet”) vastaamaan ilmiön lopputiloja.

(iii) Asetetaan puun pisteet (”oksien haarautumiskohdat”) vastaamaan ilmiön tapahtumia.

(iv) Viedään puun jokaisesta pisteestä särmä (”oksa”) kaikkiin sellaisiin pisteisiin, joita vastaavat tapahtumat ovat kyseisessä vaiheessa mahdollisia.

(v) Liitetään jokaiseen pisteestä lähtevään särmään mahdollisia tapahtumavaihtoehtoja vastaavat todennäköisyydet.

Puutodennäköisyydet

- Puutodennäköisyydellä tarkoitetaan todennäköisyyttä päästä puun alkupisteestä yhden tai useamman muun puun pisteen määräämään tapahtumaan.
- Mielivaltaisen puun pisteen todennäköisyys saadaa maarittämällä alkupisteestä kyseiseen pisteeseen vievän reitin todennäköisyys.
- Tulosääntö: Reitin todennäköisyys on reittiin kuuluvien särmien tulo.
- Yhteenlaskusääntö: Jos useita lopputiloja yhdistetään yhdeksi tapahtumaksi, niin yhdistetyn tapahtuman todennäköisyys on ko. tapahtumiin vievien reittien todennäköisyyksien summa.

Systeemin toimintatodennäköisyys

- **Kysymys:** Määritä sellaisen systeemin toimintatodennäköisyys, joka koostuu komponenteista, jotka on kytketty joko sarjaan tai rinnan.
- Tehdään komponenteista seuraavat oletukset:

(i) Jokaisen komponentin toimintatodennäköisyys tunnetaan.

(ii) Jokaisen komponentin toiminta (tai toimimattomuus) on riippumatonta muiden komponenttien toiminnasta.

Toimintaverkot

- Toimintaverkot koostuvat sarjaan ja rinnankytkennöistä.
- Merkitään: $Pr(''K_1 \text{ toimii}'') = Pr(A_1) = p_1$ ja $Pr(''K_2 \text{ toimii}'') = Pr(A_2) = p_2$.
- Sarjaankytkennän toimintatodennäköisyys on $Pr(A_1 \cap A_2) = p_1 p_2$
- Rinnankytkennän toimintatodennäköisyys on $Pr(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$