Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

11. syyskuuta 2007

Klassinen todennäköisyys

- Olkoon $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ äärellinen otosavaruus.
- Oletetaan, että

$$Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \text{ kaikille } i = 1, 2, \ldots, n$$

- Tällöin alkeistapahtumat s_i ovat *symmetrisiä*.
- Tarkastellaan tapahtumaa $A \subset S$, johon kuuluu k alkeistapahtumaa. (Näitä tapahtumia kutsutaan A:lle suotuisiksi.)
- Nyt tapahtuman A klassinen todennäköisyys on

$$Pr(A) = \frac{k}{n}$$

- Entä jos alkeistapahtumat eivät ole symmetrisiä?
- Entä jos otosavaruus on ääretön?

Esimerkki

Korttipakasta nostetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti on (a) ässä, (b) pata, ja (c) ristiseiska?

Ratkaisu. Oletetaan, että pakassa on 52 korttia, eli $n = n(S) = 52$.

(a) Olkoon A tapahtuma "kortti on ässä". Suotuisien alkeistapahtumien määrä $n(A) = 4$. Siis $\Pr(A) = n(A)/n = 4/52 \approx 0.0769$.

(b) Jos B on tapahtuma "kortti on pata", niin $Pr(B) = 13/52 = 1/4$.

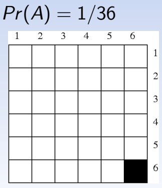
(c) Tapahtuman C="kortti on ristiseiska" todennäköisyys $Pr(C) = 1/52 \approx 0.0192$.

Esimerkki

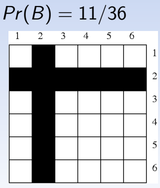
Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä (a) molemmat nopat antavat kuutosen, (b) ainakin toinen heitto on kakkonen, ja (c) kumpikaan heitto ei ole viitonen?

Ratkaisu. Perusjoukon alkeistapauksia on 36 kpl. Merkitään A:lla kyseisessä kohdassa mainittua tapahtumaa.

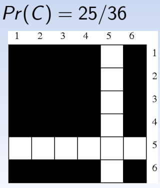
(a) $Pr(A) = 1/36$



(b) $Pr(B) = 11/36$



(c) $Pr(C) = 25/36$



Kombinatoriikan perusperiaatteet

- Tarkastellaan operaatioita M (m suoritustapaa) ja N (n suoritustapaa).
- **Yhteenlaskuperiaate**: Jos M ja N ovat toisensa poissulkevia operaatioita voidaan yhdistetty operaatio "Suoritetaan M tai N" suorittaa $m + n$ eri tavalla.
- **Kertolaskuperiaate**: Jos M ja N ovat toisistaan riippumattomia operaatioita voidaan yhdistetty operaatio "Suoritetaan M ja N" suorittaa $m \times n$ eri tavalla.

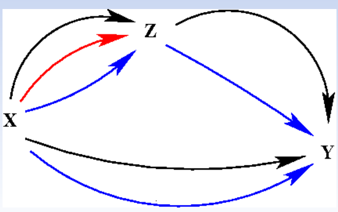
Esimerkki

- Kaupunkien X ja Y välillä on 2 suoraa lentoa.
- X:stä pääsee Y:hyn myös kaupungin Z kautta:

(i) Kaupunkien X ja Z välillä on 3 lentoa.

(ii) Kaupunkien Z ja Y välillä on 2 lentoa.

- Kuinka monella eri tavalla voidaan lentää kaupungista X kaupunkiin Y?

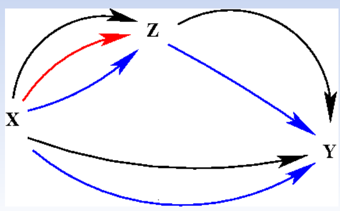


Esimerkki - Ratkaisu 1/2

- Koska lentojen valinnat voidaan tehdä toisistaan riippumatta, Z:n kautta tapahtuviin lentoihin voidaan soveltaa *kertolaskuperiaatetta*.
- Sen mukaan X:stä Y:hyn pääsee lentämään Z:n kautta

$$3 \times 2 = 6$$

eri tavalla.

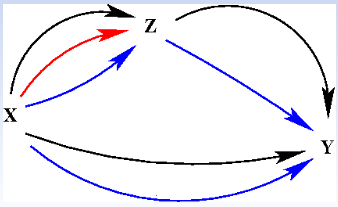


Esimerkki - Ratkaisu 2/2

- Koska 2 suoraa lentoa X:stä Y:hyn ja 6 eri tapaa lentää X:stä Y:hyn Z:n kautta ovat *toisensa poissulkevia*, lentotapojen kokonaislukumäärä saadaan soveltamalla *yhteenlaskuperiaatetta*.
- X:stä Y:hyn pääsee siis lentämään

$$2 + 6 = 8$$

eri tavalla.



Esimerkki

Matkapuhelimen PIN-koodit ovat muotoa XXXX, missä kukin X on jokin numeroista 0,1,2,3,4,5,6,7,8 tai 9. Laske erilaisten PIN-koodin lukumäärä, kun (a) ei rajoituksia, (b) samaa numeroa saa käyttää vain kerran.

(a) Sovelletaan nk. lokeromallia. Käytössä on 4 lokeroa, joista ensimmäinen voidaan täyttää 10:llä eri tavalla, toinen 10:llä tavalla, jne. Saadaan

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

PIN-koodia.

(b) Nyt ensimmäinen lokero voidaan täyttää 10:llä eri tavalla, toinen 9:llä, kolmas 8:lla ja neljäs 7:llä eri tavalla. Saadaan

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

koodia.

Esimerkki: Syntymäpäiväongelma (”paradoksi”)

Millä todennäköisyydellä n:n umpimähkään valitun henkilön joukossa ainakin kahdella on sama syntymäpäivä?

Ratkaisu: Karkauspäivät unohtaen oletetaan, että alkeistapauksina ovat 365 alkion jonot, joiden pituus on n. Jonoja on 365^n kpl.

Jos A on tapahtuma ”ainakin kahdella on sama syntymäpäivä”, niin A^c on ”kaikilla eri syntymäpäivät”, ja siis A^c:n alkioiden lukumäärä on $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$.

Saadaan

$$Pr(A) = 1 - Pr(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Huomautus. Numeerisesti voidaan havaita esimerkiksi, että jos $n \geq 23$, niin $Pr(A) > 0.5$, ja jos $n \geq 57$, niin $Pr(A) > 0.99$. Saman syntymäpäivän todennäköisyys on siis suuri jo melko pienillä n:n arvoilla.

Kombinatoriikan perusongelmat

- Kuinka monella eri tavalla joukon S alkiot voidaan järjestää *jonoon*?
- Kuinka monta erilaista k:n alkion *osajonoa* joukon S alkioista voidaan muodostaa?
- Kuinka monella eri tavalla joukon S alkioista voidaan valita k:n alkion *osajoukko*?

Huom. Joukoille $A = B$, jos ja vain jos $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Jonoille $a = b$, jos ja vain jos $a_i = b_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Permutaatiot

- Mikä tahansa äärellisen joukon S kaikkien alkioiden muodostama järjestetty jono on joukon S alkioiden *permutaatio*.
- Olkoon joukon S alkoiden lukumäärä $n = n(S)$.
- Tällöin joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten permutaatioiden lukumäärä on

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

eli *n-kertoma*. (On määritelty $0! = 1$.)

k-permutaatiot eli variaatiot

- Mikä tahansa joukon S alkioiden järjestetty osajono, jossa on k alkiota, on joukon S alkioiden *k-permutaatio* eli *variaatio*.
- Joukon S alkioiden kaikkien mahdollisten k-permutaatioiden lukumäärä on

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- Käytetään myös merkintää ${}_nP_k = P(n, k)$.

Esimerkki

- Joukon $N = \{x | x \in \{1, 2, \ldots, 10\}\}$ 3-permutaatioiden lukumäärä, eli 3 alkiota sisältävien jonojen lukumäärä.
- $P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = 720$.

Perustelu k-permutaatioiden lukumäärälle

- Voidaan valita k alkiota n:stä alkiosta

$$n \times (n - 1) \times \ldots (n - k + 1)$$

eri tavalla.

- Laventamalla saadaan nyt

$$n \times (n-1) \times \ldots (n-k+1) = \frac{n \times (n - 1) \times \ldots (n - k + 1) \times (n - k)!}{(n - k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n - k)!}$$

Kombinaatiot ja binomikertoimet

- Mikä tahansa joukon S *osajoukko*, jossa on k alkiota, muodostaa joukon S alkioiden k alkiota sisältävän *kombinaation*.
- Joukon S alkioiden kaikkien k alkiota sisältävien kombinaatioiden lukumäärä on
$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$
missä luku $\binom{n}{k}$ on *binomikerroin*.
- Nimi tulee siitä, että
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$
- Käytetään myös merkintää ${}_nC_k = C(n,k)$.

Perustelu kombinaatioiden lukumäärälle 1/2

Mistä kaava $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ seuraa?

Joukon S k-permutaatioiden lukumäärä voidaan määrittää kahdessa vaiheessa *kertolaskuperiaatteen* avulla:

(1) Valitaan joukon S alkioista k alkiota sisältävä osajoukko. Tämä voidaan tehdä $C(n,k)$:lla eri tavalla.

(2) Järjestetään valitun osajoukon k alkiota jonoon. Tämä voidaan tehdä $k!$:lla eri tavalla.

Vaiheet (1) ja (2) ovat *toisistaan riippumattomia*.

Perustelu kombinaatioiden lukumäärälle 2/2

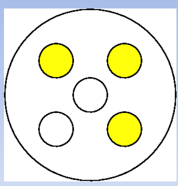
Kertolaskuperiaatteen mukaan joukon S k-permutaatioiden lukumäärä on siis
$$P(n,k) = C(n,k)k!$$
Kun tähän sijoitetaan k-permutaatioiden lukumäärän lauseke
$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$
saadaan yhtälö
$$C(n,k)k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$
josta voidaan ratkaista $C(n,k)$:
$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Esimerkki

Lottoruudukossa on 39 numeroa, joista saadaan lottorivi merkitsemällä 7 numeroa. Mikä on todennäköisyys saada 7 oikein?

- Erilaisia lottorivejä on siis
$$\binom{39}{7} = 15380937$$
kappaletta.
- Todennäköisyys saada 7 oikein on $1/15380937 \approx 6.5 \cdot 10^{-8}$.

Esimerkki



Kuvan henkilöhakulaitteessa palaa kerrallaan yhdestä viiteen merkkivaloa. Kuinka monta eri henkilöä laitteella voidaan hakea?

Ratkaisu: Yhden lampun avulla saadaan $\binom{5}{1} = 5$ mahdollisuutta, kahdella $\binom{5}{2} = 10$ mahdollisuutta, jne.

Yhteensä siis saadaan
$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$
mahdollista henkilöä.