

# Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

13. syyskuuta 2007

## 1 Klassinen todennäköisyys

## 2 Kombinatoriikkaa

- Kombinatoriikan perusongelmat
- Permutaatiot
- Kombinaatiot ja binomikertoimet

# Klassinen todennäköisyys

- Olkoon  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  äärellinen otosavaruus.
- Oletetaan, että

$$Pr(s_i) = \frac{1}{n}, \text{ kaikille } i = 1, 2, \dots, n$$

- Tällöin alkeistapahtumat  $s_i$  ovat *symmetrisiä*.
- Tarkastellaan tapahtumaa  $A \subset S$ , johon kuuluu  $k$  alkeistapahtumaa. (Näitä tapahtumia kutsutaan  $A$ :lle suotuisiksi.)
- Nyt tapahtuman  $A$  klassinen todennäköisyys on

$$Pr(A) = \frac{k}{n}$$

- Entä jos alkeistapahtumat eivät ole symmetrisiä?
- Entä jos otosavaruus on ääretön?

Korttipakasta nostetaan yksi kortti. Millä todennäköisyydellä kortti on (a) ässä, (b) pata, ja (c) ristiseiska?

**Ratkaisu.** Oletetaan, että pakassa on 52 korttia, eli  $n = n(S) = 52$ .

- (a) Olkoon  $A$  tapahtuma "kortti on ässä". Suotuisien alkeistapahtumien määrä  $n(A) = 4$ . Siis  $Pr(A) = n(A)/n = 4/52 \approx 0.0769$ .
- (b) Jos  $B$  on tapahtuma "kortti on pata", niin  $Pr(B) = 13/52 = 1/4$ .
- (c) Tapahtuman  $C$ ="kortti on ristiseiska" todennäköisyys  $Pr(C) = 1/52 \approx 0.0192$ .

# Esimerkki

Heitetään kahta noppaa. Millä todennäköisyydellä (a) molemmat nopat antavat kuutosen, (b) ainakin toinen heitto on kakkonen, ja (c) kumpikaan heitto ei ole viitonen?

**Ratkaisu.** Perusjoukon alkeistapauksia on 36 kpl. Merkitään  $A$ :lla kyseisessä kohdassa mainittua tapahtumaa.

(a)  $Pr(A) = 1/36$

1	2	3	4	5	6	
						1
						2
						3
						4
						5
					■	6

(b)  $Pr(B) = 11/36$

1	2	3	4	5	6	
■	■					1
■	■	■	■	■	■	2
■	■					3
						4
						5
						6

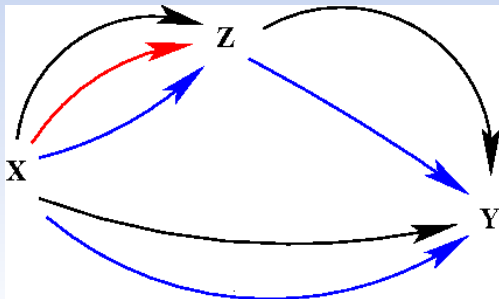
(c)  $Pr(C) = 25/36$

1	2	3	4	5	6	
■	■	■	■		■	1
■	■	■	■			2
■	■	■	■			3
■	■	■	■			4
						5
■	■	■	■		■	6

- Tarkastellaan operaatioita  $M$  ( $m$  suoritustapaa) ja  $N$  ( $n$  suoritustapaa).
- **Yhteenlaskuperiaate:** Jos  $M$  ja  $N$  ovat toisensa poissulkevia operaatioita voidaan yhdistetty operaatio "Suoritetaan  $M$  tai  $N$ " suorittaa  $m + n$  eri tavalla.
- **Kertolaskuperiaate:** Jos  $M$  ja  $N$  ovat toisistaan riippumattomia operaatioita voidaan yhdistetty operaatio "Suoritetaan  $M$  ja  $N$ " suorittaa  $m \times n$  eri tavalla.

# Esimerkki

- Kaupunkien  $X$  ja  $Y$  välillä on 2 suoraa lentoa.
- $X$ :stä pääsee  $Y$ :hyn myös kaupungin  $Z$  kautta:
  - (i) Kaupunkien  $X$  ja  $Z$  välillä on 3 lentoa.
  - (ii) Kaupunkien  $Z$  ja  $Y$  välillä on 2 lentoa.
- Kuinka monella eri tavalla voidaan lentää kaupungista  $X$  kaupunkiin  $Y$ ?

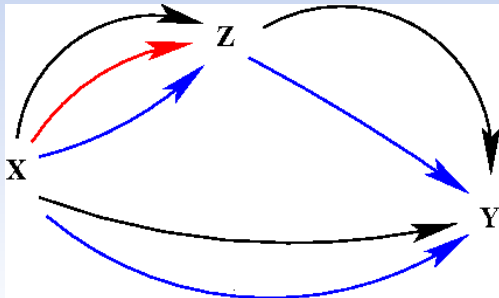


# Esimerkki - Ratkaisu 1/2

- Koska lentojen valinnat voidaan tehdä toisistaan riippumatta,  $Z$ :n kautta tapahtuviin lentoihin voidaan soveltaa *kertolaskuperiaatetta*.
- Sen mukaan  $X$ :stä  $Y$ :hyn pääsee lentämään  $Z$ :n kautta

$$3 \times 2 = 6$$

eri tavalla.



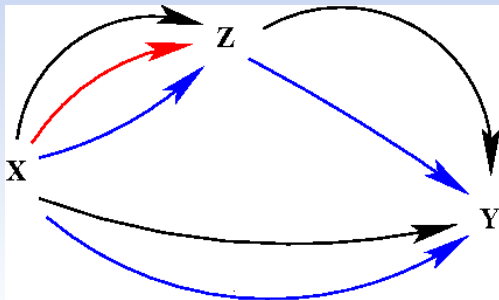


## Esimerkki - Ratkaisu 2/2

- Koska 2 suoraa lentoa  $X$ :stä  $Y$ :hyn ja 6 eri tapaa lentää  $X$ :stä  $Y$ :hyn  $Z$ :n kautta ovat *toisensa poissulkevia*, lentotapojen kokonaislukumäärä saadaan soveltamalla *yhteenlaskuperiaatetta*.
- $X$ :stä  $Y$ :hyn pääsee siis lentämään

$$2 + 6 = 8$$

eri tavalla.



# Esimerkki

Matkapuhelimen PIN-koodit ovat muotoa XXXX, missä kukin X on jokin numeroista 0,1,2,3,4,5,6,7,8 tai 9. Laske erilaisten PIN-koodin lukumäärä, kun (a) ei rajoituksia, (b) samaa numeroa saa käyttää vain kerran.

- (a) Sovelletaan nk. lokeromallia. Käytössä on 4 lokeroa, joista ensimmäinen voidaan täyttää 10:llä eri tavalla, toinen 10:llä tavalla, jne. Saadaan

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$$

PIN-koodia.

- (b) Nyt ensimmäinen lokero voidaan täyttää 10:llä eri tavalla, toinen 9:llä, kolmas 8:lla ja neljäs 7:llä eri tavalla. Saadaan

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

koodia.

## Esimerkki: Syntymäpäiväongelma ("paradoksi")

Millä todennäköisyydellä  $n$ :n umpimähkään valitun henkilön joukossa ainakin kahdella on sama syntymäpäivä?

**Ratkaisu:** Karkauspäivät unohtaen oletetaan, että alkeistapauksina ovat 365 alkion jonot, joiden pituus on  $n$ . Jonoja on  $365^n$  kpl.

Jos  $A$  on tapahtuma "ainakin kahdella on sama syntymäpäivä", niin  $A^c$  on "kaikilla eri syntymäpäivät", ja siis  $A^c$ :n alkioden lukumäärä on  $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)$ .

Saadaan

$$Pr(A) = 1 - Pr(A^c) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

**Huomautus.** Numeerisesti voidaan havaita esimerkiksi, että jos  $n \geq 23$ , niin  $Pr(A) > 0.5$ , ja jos  $n \geq 57$ , niin  $Pr(A) > 0.99$ . Saman syntymäpäivän todennäköisyys on siis suuri jo melko pienillä  $n$ :n arvoilla.

- Kuinka monella eri tavalla joukon  $S$  alkiot voidaan järjestää *jonoon*?
- Kuinka monta erilaista  $k$ :n alkion *osajonoa* joukon  $S$  alkioista voidaan muodostaa?
- Kuinka monella eri tavalla joukon  $S$  alkioista voidaan valita  $k$ :n alkion *osajoukko*?

**Huom.** Joukoille  $A = B$ , jos ja vain jos  $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ .

Jonoille  $a = b$ , jos ja vain jos  $a_i = b_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

- Mikä tahansa äärellisen joukon  $S$  kaikkien alkioiden muodostama järjestetty jono on joukon  $S$  alkioiden *permutaatio*.
- Olkoon joukon  $S$  alkoiden lukumäärä  $n = n(S)$ .
- Tällöin joukon  $S$  alkioiden kaikkien mahdollisten permutaatioiden lukumäärä on

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

eli *n-kertoma*. (On määritelty  $0! = 1$ .)

- Mikä tahansa joukon  $S$  alkioiden järjestetty osajono, jossa on  $k$  alkioita, on joukon  $S$  alkioiden  $k$ -permutaatio eli variaatio.
- Joukon  $S$  alkioiden kaikkien mahdollisten  $k$ -permutaatioiden lukumäärä on

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

- Käytetään myös merkintää  ${}_n P_k = P(n, k)$ .

- Joukon  $N = \{x \mid x \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$  3-permutaatioiden lukumäärä, eli 3 alkioita sisältävien jonojen lukumäärä.
- $P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = 720$ .

# Perustelu $k$ -permutaatioiden lukumäärälle

- Voidaan valita  $k$  alkioita  $n$ :stä alkioista

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1)$$

eri tavalla.

- Laventamalla saadaan nyt

$$\begin{aligned} n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) &= \frac{n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) \times (n - k)!}{(n - k)!} \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$



- Mikä tahansa joukon  $S$  osajoukko, jossa on  $k$  alkia, muodostaa joukon  $S$  alkien  $k$  alkia sisältävän kombinaation.
- Joukon  $S$  alkien kaikkien  $k$  alkia sisältävien kombinaatioiden lukumäärä on

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

missä luku  $\binom{n}{k}$  on *binomikerroin*.

- Nimi tulee siitä, että

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- Käytetään myös merkintää  ${}_n C_k = C(n, k)$ .

Mistä kaava  $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$  seuraa?

Joukon  $S$   $k$ -permutaatioiden lukumäärä voidaan määrittää kahdessa vaiheessa *kertolaskuperiaatteen* avulla:

- (1) Valitaan joukon  $S$  alkioista  $k$  alkioita sisältävä osajoukko. Tämä voidaan tehdä  $C(n, k)$ :lla eri tavalla.
- (2) Järjestetään valitun osajoukon  $k$  alkioita jonoon. Tämä voidaan tehdä  $k!$ :lla eri tavalla.

Vaiheet (1) ja (2) ovat *toisistaan riippumattomia*.

## Perustelu kombinaatioiden lukumäärälle 2/2

*Kertolaskuperiaatteen* mukaan joukon  $S$   $k$ -permutaatioiden lukumäärä on siis

$$P(n, k) = C(n, k)k!$$

Kun tähän sijoitetaan  $k$ -permutaatioiden lukumäärän lauseke

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

saadaan yhtälö

$$C(n, k)k! = \frac{n!}{(n-k)!},$$

josta voidaan ratkaista  $C(n, k)$ :

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

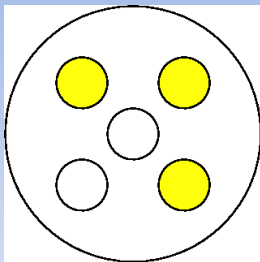
Lottoruudukossa on 39 numeroa, joista saadaan lottorivi merkitsemällä 7 numeroa. Mikä on todennäköisyys saada 7 oikein?

- Erilaisia lottorivejä on siis

$$\binom{39}{7} = 15380937$$

kappaletta.

- Todennäköisyys saada 7 oikein on  $1/15380937 \approx 6.5 \cdot 10^{-8}$ .



Kuvan henkilöhakulaitteessa palaa kerrallaan yhdestä viiteen merkkivaloa. Kuinka monta eri henkilöä laitteella voidaan hakea?

**Ratkaisu:** Yhden lampun avulla saadaan  $\binom{5}{1} = 5$  mahdollisuutta, kahdella  $\binom{5}{2} = 10$  mahdollisuutta, jne.

Yhteensä siis saadaan

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

mahdollista henkilöä.