Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

Kalvoissa käytetään materiaalia P. Palon vuoden 2005 kurssista.

07.09.2007

Satunnaisuus ja deterministisyys

- Deterministisessä ilmiössä alkutila määrää lopputilan yksikäsitteisesti.
- Satunnaisilmiö puolestaan arpoo – yhdestä alkutilasta voi päätyä useisiin lopputiloihin. Vaikka lopputilaa ei voidakaan etukäteen määrätä, on kuitenkin mahdollista selvittää eri lopputiloihin päätymisen todennäköisyydet.
- Usein ilmiöt ovat sekoitus determinismiä ja satunnaisuutta.

Todennäköisyys

- Merkintätapoja:
  Tapahtuman A todennäköisyys: $Pr(A) = P(A) = p_A$
  Tapahtuman A frekvenssi: $n(A)$
- Todennäköisyyden (naiiveja) määritelmiä:

i) Empiirinen:
$$Pr(A) = \frac{n(A)}{n(toistot)} = \frac{f}{N}.$$

ii) Klassinen:
$$Pr(A) = \frac{n(A)}{n(vaihtoehdot)}.$$

- Klassinen määritelmä olettaa, että kaikki alkeistapahtumat ovat yhtä todennäköisiä.

iii) Mittateoreettinen: Tapahtuman todennäköisyys on tapahtuman toteutumismahdollisuuden mitta.

Joukko-oppia

Keskeisimpiä ajatuksia todennäköisyyslaskennassa on se, että tapahtumia voidaan käsitellä joukkoina. Seuraavassa lyhyesti määritelmiä ja merkintätapoja:

- *Joukko* muodostuu siihen kuuluvista *alkioista*.
- s on joukon A alkio: $s \in A$.
- s ei ole joukon A alkio: $s \notin A$.
- Jos $\forall s$, $s \in B \Rightarrow s \in A$, sanomme että B on A:n osajoukko.
- B on A:n osajoukko: $B \subset A$ tai $A \supset B$.
- Joukko on tyhjä, jos se ei sisällä yhtään alkiota. Tyhjä joukko: $\emptyset$.
- Tyhjä joukko $\emptyset$ on jokaisen joukon osajoukko: $\forall A$, $\emptyset \subset A$.

Otosavaruus

- Satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa kutsutaan *otosavaruudeksi*.
- Otosavaruuden alkioita kutsutaan *alkeistapahtumiksi*.
- Otosavaruutta (engl. *sample space*) merkitään kurssilla yleensä kirjaimella S ja sen alkiota vastaavasti kirjaimella s.
- Alkeistapahtumaa ei voi jakaa alkeellisempiin tulosvaihtoehtoihin.
- Tapahtumat ovat otosavaruuden alkeistapahtumien muodostamia joukkoja.
- Ilmaisu "A tapahtuu" tarkoittaa, että jokin tapahtumaan A kuuluva alkeistapahtuma tapahtuu.

Esimerkkejä otosavaruuksista (1)

- Lapsen sukupuolen määräytyminen: $S = \{\text{Tyttö}, \text{Poika}\}$
- Nopanheiton tulos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Kahden nopanheiton tulosten summa:
  $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Esimerkkejä otosavaruuksista (2)

Taulukointiakin voi käyttää. Kahden nopanheiton tulosten summa:

	1.noppa					
2. noppa	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Todennäköisyyden perusominaisuudet

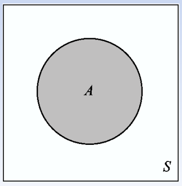
- $0 \leq Pr(A) \leq 1$
- $Pr(\emptyset) = 0$
- $Pr(S) = 1$, kun S on otosavaruutta tarkoittava merkintä.

Tapahtumia joukko-opin avulla

Tapahtuma	**Vastaava joukko-opin operaatio**
"A ei tapahdu."	Komplementti: $A^c = \{s \in S : s \notin A\}$
"A tai B tapahtuu tai molemmat tapahtuvat"	Yhdiste eli unioni: $A \cup B = \{s \in S : s \in A \vee s \in B\}$
"A ja B tapahtuvat"	Leikkaus: $A \cap B = \{s \in S : s \in A \wedge s \in B\}$
"A tapahtuu, mutta B ei tapahdu"	Erotus: $A \setminus B = \{s \in S : s \in A \wedge s \notin B\}$

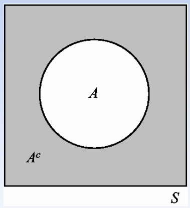
Venn-diagrammit

- Otosavaruutta S kuvaa suorakaide.
- Suorakaiteen pinta-ala vastaa otosavaruuden todennäköisyyttä: $Pr(S) = 1$
- Tapahtumaa $A \subset S$ kuvaa varjostettu osa-alue.
- Osa-alueen A pinta-ala vastaa tapahtuman A todennäköisyyttä $Pr(A)$.



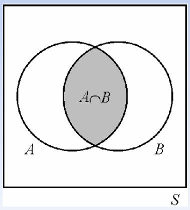
Tapahtuman A komplementti

- Olkoon $A \subset S$ otosavaruuden S tapahtuma ja $Pr(A)$ sen todennäköisyys.
- Tapahtuman A komplementtitapahtuman A^c todennäköisyys on $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$.



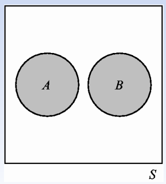
Tapahtumien A ja B leikkaus

- Olkoon $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia ja $Pr(A)$ ja $Pr(B)$ niiden todennäköisyydet.
- Muiden uusien tapahtumien laskemiseen on selvitettävä $Pr(A \cap B)$.



Toisensa poissulkevat tapahtumat

- Tapahtumat A ja B ovat *toisensa poissulkevia*, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä otosavaruudessa eli $A \cap B = \emptyset$.
- Siten saadaan toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö $Pr(A \cap B) = 0$ ja $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$.
- Mitä on nyt $Pr(A \setminus B)$?
- Entä miten ym. yhteenlaskusääntö yleistetään?



Riippumattomuus

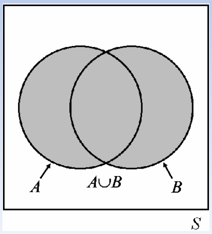
- Tapahtuma A on *riippumaton* tapahtumasta B, jos B:n tapahtuminen (tai tapahtumatta jääminen) ei vaikuta A:n tapahtumisen todennäköisyyteen.
- Merkitään riippumattomuutta: $A \perp\!\!\!\perp B$.
- Jos $A \perp\!\!\!\perp B$, niin tällöin myös $B \perp\!\!\!\perp A$.
- Riippumattomuutta voidaan testata tilastollisesti.

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

- Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$.
- Miten tämä sääntö yleistetään?

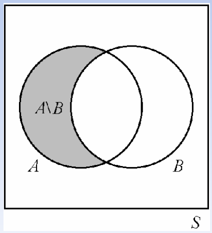
Tapahtumien yhdiste ja yleinen yhteenlaskusääntö

- Tapahtumien A ja B yhdisteen $A \cup B$ todennäköisyys on $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$.



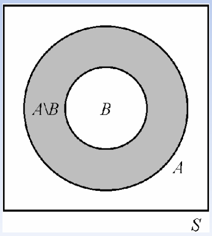
Erotustapahtuman todennäköisyys

- Tapahtumien A ja B erotustapahtuman $A \setminus B$ todennäköisyys on $Pr(A \setminus B) = Pr(A \cap B^c) \; = Pr(A) - Pr(A \cap B)$.



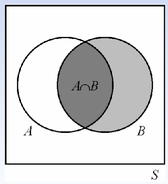
Osatapahtuma $B \subset A$ (eli A tapahtuu, jos B tapahtuu)

- $Pr(A) \geq Pr(B)$
- $Pr(A \setminus B) = Pr(A) - Pr(B)$



Ehdollinen todennäköisyys

- Olkoon $Pr(B) > 0$
- Tällöin tapahtuman A todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on tapahtunut on
$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}.$$
- $Pr(B|B) = 1$.
- Pelkkä $Pr(A)$ ei kerro (juuri) mitään $Pr(A|B)$:stä.



Ehdollinen todennäköisyys ja riippumattomuus

Lause

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos $Pr(A|B) = Pr(A)$.

Todistus. Oletetaan, että A ja B ovat riippumattomia. Tällöin:
$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B). \tag{1}$$
Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan:
$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}. \tag{2}$$
Kun sijoitetaan (1) kaavaan (2), saadaan
$$Pr(A|B) = Pr(A).$$
□

Riippumattomuuden yhtäpitävät ehdot

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos:

i) $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$,
ii) $Pr(A|B) = Pr(A)$,
iii) $Pr(B|A) = Pr(B)$.

Riippumattomuuden seurauksia

Jos A ja B ovat riippumattomia, niin myös

i) A ja B^c,
ii) A^c ja B sekä
iii) A^c ja B^c ovat riippumattomia.

Yleinen tulosääntö

- Olkoon $Pr(B) > 0$.
- Tällöin $Pr(A \cap B) = Pr(B)Pr(A|B)$.
- Yleisesti k:lle tapahtumalle tapahtumien $A_1, A_2, \ldots A_k$ leikkauksen todennäköisyys on

$$\begin{aligned} Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k) \;&=\; Pr(A_1) \times Pr(A_2|A_1) \times Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \\ &\; \ldots \times Pr(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1}). \end{aligned}$$