

Sovellettu todennäköisyyslaskenta B

Antti Rasila

Kalvoissa käytetään materiaalia P. Palon vuoden 2005 kurssista.

07.09.2007

- 1 Todennäköisyyslaskennan käsitteitä
 - Satunnaisuus ja deterministisyys
- 2 Todennäköisyyslaskennan perusteita
 - Joukko-oppia
 - Otosavaruus
 - Esimerkkejä otosavaruuksista
 - Todennäköisyyden perusominaisuudet
- 3 Todennäköisyyslaskennan peruslaskusäännöt
 - Tapahtumia joukko-opin avulla
 - Venn-diagrammit
 - Komplementti ja leikkaus
 - Toisensa poissulkevat tapahtumat
 - Riippumattomuus
 - Tapahtumien yhdiste ja yleinen yhteenlaskusääntö
 - Osatapahtuma $B \subset A$ (eli A tapahtuu, jos B tapahtuu)
 - Ehdollinen todennäköisyys

- Deterministisessä ilmiössä alkutila määrää lopputilan yksikäsitteisesti.
- Satunnaisilmiö puolestaan arpoo – yhdestä alkutilasta voi päätyä useisiin lopputiloihin. Vaikka lopputilaa ei voidakaan etukäteen määrätä, on kuitenkin mahdollista selvittää eri lopputiloihin päätyminen todennäköisyydet.
- Usein ilmiöt ovat sekoitus determinismiiä ja satunnaisuutta.

- Merkintätapoja:

Tapahtuman A todennäköisyys: $Pr(A) = P(A) = p_A$

Tapahtuman A frekvenssi: $n(A)$

- Todennäköisyyden (naiiveja) määritelmiä:

i) Empiirinen:

$$Pr(A) = \frac{n(A)}{n(\text{toistot})} = \frac{f}{N}.$$

ii) Klassinen:

$$Pr(A) = \frac{n(A)}{n(\text{vaihtoehdot})}.$$

- Klassinen määritelmä olettaa, että kaikki alkeistapahtumat ovat yhtä todennäköisiä.
- iii) Mittateoreettinen: Tapahtuman todennäköisyys on tapahtuman toteutumismahdollisuuden mitta.

Keskeisimpiä ajatuksia todennäköisyyslaskennassa on se, että tapahtumia voidaan käsitellä joukkoina. Seuraavassa lyhyesti määritelmiä ja merkintätapoja:

- *Joukko* muodostuu siihen kuuluvista *alkioista*.
- s on joukon A alkio: $s \in A$.
- s ei ole joukon A alkio: $s \notin A$.
- Jos $\forall s, s \in B \Rightarrow s \in A$, sanomme että B on A :n osajoukko.
- B on A :n osajoukko: $B \subset A$ tai $A \supset B$.
- Joukko on tyhjä, jos se ei sisällä yhtään alkioita. Tyhjä joukko: \emptyset .
- Tyhjä joukko \emptyset on jokaisen joukon osajoukko: $\forall A, \emptyset \subset A$.

- Satunnaisilmiön kaikkien mahdollisten tulosvaihtoehtojen joukkoa kutsutaan *otosavaruudeksi*.
- Otosavaruuden alkioita kutsutaan *alkeistapahtumiksi*.
- Otosavaruutta (engl. *sample space*) merkitään kurssilla yleensä kirjaimella S ja sen alkioita vastaavasti kirjaimella s .
- Alkeistapahtumaa ei voi jakaa alkeellisempiin tulosvaihtoehtoihin.
- Tapahtumat ovat otosavaruuden alkeistapahtumien muodostamia joukkoja.
- Ilmaisui "A tapahtuu" tarkoittaa, että jokin tapahtumaan A kuuluva alkeistapahtuma tapahtuu.

Esimerkkejä otosavaruuksista (1)

- Lapsen sukupuolen määräytyminen: $S = \{\text{Tyttö, Poika}\}$
- Nopanheiton tulos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Kahden nopanheiton tulosten summa:
 $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Esimerkkejä otosavaruuksista (2)

Taulukointiakin voi käyttää. Kahden nopanheiton tulosten summa:

	1.noppa					
2. noppa	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Todennäköisyyden perusominaisuudet

- $0 \leq Pr(A) \leq 1$
- $Pr(\emptyset) = 0$
- $Pr(S) = 1$, kun S on otosavaruutta tarkoittava merkintä.

Tapahtuma

"A ei tapahdu."

"A tai B tapahtuu tai molemmat tapahtuvat"

"A ja B tapahtuvat"

"A tapahtuu, mutta B ei tapahdu"

Vastaava joukko-opin operaatio

Komplementti:

$$A^c = \{s \in S : s \notin A\}$$

Yhdiste eli unioni:

$$A \cup B = \{s \in S : s \in A \vee s \in B\}$$

Leikkaus:

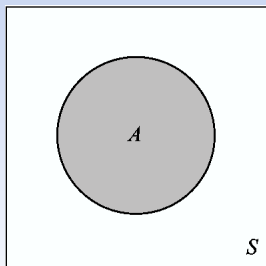
$$A \cap B = \{s \in S : s \in A \wedge s \in B\}$$

Erotus:

$$A \setminus B = \{s \in S : s \in A \wedge s \notin B\}$$

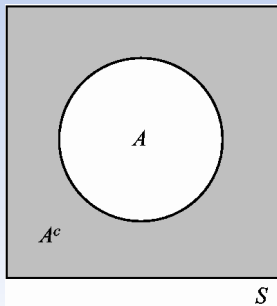
Venn-diagrammit

- Otosavaruutta S kuvaa suorakaide.
- Suorakaiteen pinta-ala vastaa otosavaruuden todennäköisyyttä:
 $Pr(S) = 1$
- Tapahtumaa $A \subset S$ kuvaa varjostettu osa-alue.
- Osa-alueen A pinta-ala vastaa tapahtuman A todennäköisyyttä $Pr(A)$.



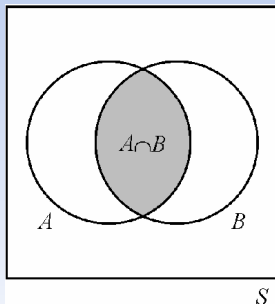
Tapahtuman A komplementti

- Olkoon $A \subset S$ otosavaruuden S tapahtuma ja $Pr(A)$ sen todennäköisyys.
- Tapahtuman A komplementtitapahtuman A^c todennäköisyys on $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$.



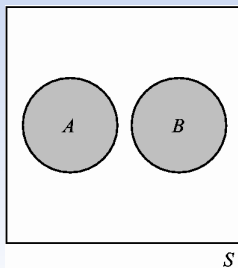
Tapahtumien A ja B leikkaus

- Olkoon $A \subset S$ ja $B \subset S$ otosavaruuden S tapahtumia ja $Pr(A)$ ja $Pr(B)$ niiden todennäköisyydet.
- Muiden uusien tapahtumien laskemiseen on selvitettävä $Pr(A \cap B)$.



Toisensa poissulkevat tapahtumat

- Tapahtumat A ja B ovat *toisensa poissulkevia*, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä otosavaruudessa eli $A \cap B = \emptyset$.
- Siten saadaan toisensa poissulkevien tapahtumien yhteenlaskusääntö $Pr(A \cap B) = 0$ ja $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$.
- Mitä on nyt $Pr(A \setminus B)$?
- Entä miten ym. yhteenlaskusääntö yleistetään?



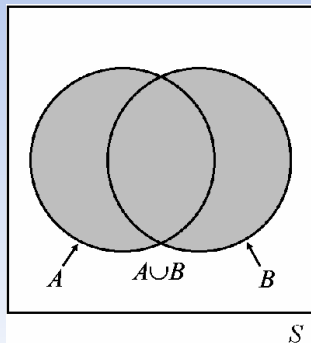
- Tapahtuma A on *riippumaton* tapahtumasta B , jos B :n tapahtuminen (tai tapahtumatta jääminen) ei vaikuta A :n tapahtumisen todennäköisyyteen.
- Merkitään riippumattomuutta: $A \perp\!\!\!\perp B$.
- Jos $A \perp\!\!\!\perp B$, niin tällöin myös $B \perp\!\!\!\perp A$.
- Riippumattomuutta voidaan testata tilastollisesti.

Tulosääntö riippumattomille tapahtumille

- Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$.
- Miten tämä sääntö yleistetään?

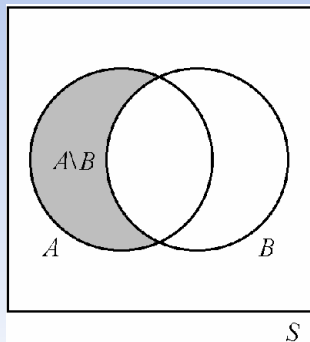
Tapahtumien yhdiste ja yleinen yhteenlaskusääntö

- Tapahtumien A ja B yhdisteen $A \cup B$ todennäköisyys on $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$.



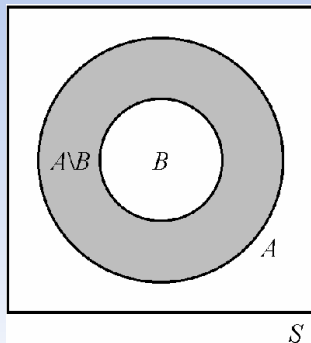
Erotustapahtuman todennäköisyys

- Tapahtumien A ja B erotustapahtuman $A \setminus B$ todennäköisyys on $Pr(A \setminus B) = Pr(A \cap B^c) = Pr(A) - Pr(A \cap B)$.



Osatapahtuma $B \subset A$ (eli A tapahtuu, jos B tapahtuu)

- $Pr(A) \geq Pr(B)$
- $Pr(A \setminus B) = Pr(A) - Pr(B)$

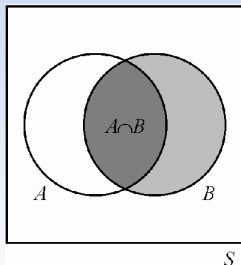


Ehdollinen todennäköisyys

- Olkoon $Pr(B) > 0$
- Tällöin tapahtuman A todennäköisyys ehdolla, että tapahtuma B on tapahtunut on

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}.$$

- $Pr(B|B) = 1$.
- Pelkkä $Pr(A)$ ei kerro (juuri) mitään $Pr(A|B)$:stä.



Lause

Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos $Pr(A|B) = Pr(A)$.

Todistus. Oletetaan, että A ja B ovat riippumattomia.

Tällöin:

$$Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B). \quad (1)$$

Ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}. \quad (2)$$

Kun sijoitetaan (1) kaavaan (2), saadaan

$$Pr(A|B) = Pr(A).$$



Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos ja vain jos:

- i) $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$,
- ii) $Pr(A|B) = Pr(A)$,
- iii) $Pr(B|A) = Pr(B)$.

Jos A ja B ovat riippumattomia, niin myös

- i) A ja B^c ,
- ii) A^c ja B sekä
- iii) A^c ja B^c ovat riippumattomia.

- Olkoon $Pr(B) > 0$.
- Tällöin $Pr(A \cap B) = Pr(B)Pr(A|B)$.
- Yleisesti k :lle tapahtumalle tapahtumien A_1, A_2, \dots, A_k leikkauksen todennäköisyys on

$$Pr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = Pr(A_1) \times Pr(A_2|A_1) \times Pr(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \\ \dots \times Pr(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}).$$